Bulletin of Aichi Univ. of Education, 65（Educational Sciences）, pp. 221 − 225, March, 2016

教科内容と教科教育両方の視点からのグラフ理論の一事例

金光 三男

名誉教授

An Example of Graph Theory Viewpoint from Both Subject Content and Mathematics Education

Mitsuo KANEMITSU

Professor Emeritus of Aichi University of Education, Kariya 448-8542, Japan

1　はじめに

教育系大学における数学の教科内容と教科教育の両側面から見た数学や両者の融合を重視した授業内容について述べる。このような考察には、学生の学ぶ心理的状況の考慮の下で、現場の教員の要請と大学での学術的な視点の両方を加味し考慮することが必要である。教育系の教科内容学としての数学について、現場から発信された高校教員の意見が京都大学数理解析研究所発行の講究録に「共同研究の報告集」の欄に記載されている。以下は大阪府立大手前高等学校の深川久（[F、2014年]）の内容の抜粋を引用したものである。意見では、「（ア）数学教師として、直接教える内容よりも広く深く数学を理解しておきたい。（イ）生徒が中学校卒業までに何をどのように学んできたかについて理解しておくとともに、卒業後大学へ進学した生徒がどのような数学を学び、またどのように使っていくのかについても一定の見通しをもっておきたい。（ウ）自身にとって未知の数学的内容に取り組み理解の範囲を広げていくときの自分なりの方法論や、数学に向かう構えのようなものを体得しておきたい。」と述べている。この後半の部分は大学教員が研究を授業に如何に滲ませて努力していくかその過程で行っていることに関連している。

また深川久（[F、2014年]）は、「数学Aの内容として「整数の性質」が置かれている。これまでも、高校の数学授業で「整数問題」が扱われることはあったが、よりまとまった形で導入され、教科書では「発展」のような形で合同式まで扱われている。（中略）高校の教師を目指す学生には必須の内容である。」と述べ、アンドレ・ヴェイユ（[W、2010年]）の著書の訳者である片山孝次・田中茂・丹羽敏雄・長岡一昭は「訳者あとがき」（p. 148）で、下記のような引用をしている。

「学生たちは、高校とは質の違った数学を前にとまどいを感じながらも勉強する意欲に燃え立つようである。それは一つには、もっと身近な有理整数が媒介になっているため考える手がかりが各自、自分なりにいろいろあるからであろうし、また、この本を通じて現代数学の片鱗を感じるからであろう」。

このような未知の数学に対するワクワク感が数学の学習では上達の鍵になることが多い。

理学部数学科には、初等整数論、グラフ理論や初等幾何学の講義は時間的余裕が無いせいもあり多くの場合割愛されるのが普通である。教育系の学部の授業にはこれら三者の授業を行うことは具体的でワクワク感を学生の心に持たせることができる可能性が大であり有意義である。実際、遠山啓［T、1972年］の「はしがき」に英国の数学者ハーディ（1877−1947）の述べた以下の内容が引用されて注目されている。

「初等整数論は早期の数学教育にとってもっともよい教材の一つであろう。それは予備知識をほとんど必要としない。その主題は確実で親しみやすく、用いられる推論の過程は単純で、一般的で、また新しい。そして人間の自然な好奇心に訴える点では、数学的な学問の中では独特なものがある。整数論をうまく教えると、技術者のための微分積分学を1ケ月教えたのよりは2倍も役に立ち、10倍も面白い」と述べている。

次に初等幾何の図形に関連した論文に拙著・長谷川順一［KH、2007年］がある。ここには大学で行き詰まった教材内容が教員になって教える側に立ったときに、今度は難しかった悩みや行き詰まった体験が教育に役立つであろうと記載してある。

初等整数論や初等幾何学は小学校・中学校の算数・数学の教材を多く内包した教材であり、密接に関係して算数･数学教育に寄与する内容が多くある。例えば、最大公約数や最小公倍数などがそうである。また、グラフ理論は工学部で授業として必要とされるが、教育系でも幾何学や代数学と関連させて扱うと抽象的な

りがちな内容を身近に捉え具体的な内容となり理解し易い教材であるなどの点でも有意義である。参考書として、最近出版された宮崎修一著（[M、2015年]）は工学部向けであるが興味のある内容が豊富である。また、小林みどり著（[Ko、2013年]）は教育系でも有用な内容（例えば、線形代数学とも関連する）を多く含んでいる。

先にも述べたが整数の剰余類を学習する前段階として合同式は学ぶ価値がある。整数の剰余類群、また整数の剰余環の内容は可換環とイデアルを具体的に扱うことにより、具体と抽象の橋渡しとして意義がある。これに関連して拙著［Ka、2015年］に創り上げながら行うことを推奨した教材例として整数の性質に関連したグラフ理論に関する教科内容学の論文がある。

これら数学的内容を更に追加してグラフ理論に関連付けてこの小論の内容を、整数の剰余類と簡単な多項式環の剰余類の計算をしながら、小学校の低学年で学ぶ「整数をある観点から分類する」（[M、2008年]）では奇数と偶数の分類について述べてあるが、この一般化という観点から以下で考察したい。日本数学教育学会編（[N、2010年]）に述べてあるが「小学校の算数では有限の対象を扱うことから、多くの内容が離散数学の側面を持つ。離散数学をカリキュラムにどのように取り入れ、生徒のどのような資質を育てるのかということは今後の課題である」。離散数学教材の一つの試みとして、中部児童教育研究会編［T2、2014年］の教職教育の新展開（第1部の第2章、算数･数学教育の方法と教材研究―分数・素数・対称性などの教材化―（拙著））では、素数をグラフ理論の彩色数と関連付けて導きだしてある。グラフ理論に関連して算数・数学内容学の研究内容から教育系学部の教材の教科教育に向けての素材を提供する試案・仮説として以下に述べてみたい。

2　準備と用語など

整数環を$\mathbf{Z}$とする。負でない整数nに対して、その数の倍数に更に負の倍数や0も含めた集合の全体が作るイデアルを(n)、また$\mathbf{Z}$のイデアル(n)による剰余環をZ/(n)または$\mathbf{Z}_n$と書く。

〈約束〉　以下、$\mathbf{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \cdots, \overline{n-2}, \overline{n-1}\}$の任意の元を$\bar{a}$と書くところを前後関係から判断できるので（本来、同値類$\bar{a}$と整数aは異なる概念であるが）、特に断らない限り、単にaと書くことと約束する。従って、$\mathbf{Z}_n = \{0, 1, 2, \cdots, n-2, n-1\}$となる。

頂点と辺から構成された図形をグラフといい、頂点全体の集合をV、辺全体の集合をEとするグラフGをG = (V, E)と書く。グラフ理論全般の用語などに関しては先にも挙げた小林みどり著［K、2013年］を参照のこと。また具体的で分かり易さをうたってある著書には、安藤清・土屋守正・松井泰子共著（[AT、2013年]）がある。

可換環Rの元aが零因子であるとは、0でないRの元bが存在して、ab = 0のときをいう。この特別な場合であるが、Rの元aが冪零元であるとは、aを何乗かすると0になるときをいう。また、Rのuが単元であるとは、Rの元vが存在してuv = 1となるときをいう。

環やイデアルを零因子グラフと関連付けて、S.P. Redmond（[Re、2003年]）が定義したイデアルを基礎とする零因子グラフの定義について述べよう。

定義（S.P. Redmond［Re、2003年］)、可換環Rのイデアル I に対して、次のような頂点集合Vと辺集合Eからなるグラフ$\Gamma_I(R) = (V, E)$が下記の性質を持つときイデアル I を基礎とするRedmondの零因子グラフ（以下では簡単のためレッドモンドの零因子グラフ）という。

（1）$V = \{a \in R - I \mid$ ある$b \in R - I$に対して$ab \in I\}$。

（2）$E = \{[a, b] \mid ab \in I,\quad a, b \in V(a \neq b)\}$。

ただし[a, b]は頂点aとbが隣接している、すなわち、辺をなすことを表すものとする。従って無向グラフでは[a, b]と[b, a]は同じものを表す。

特に$I = \{0\}$のとき$\Gamma_I(R)$はベックの定義した環の彩色数に関連した零因子グラフ（[B、1986年]）や、D.F. Anderson and P.S. Livingston（[AL、1999年]）達が定義した零因子グラフ$\Gamma(R)$と一致する。この零因子グラフはベックの定義した零因子グラフから0を除いた零因子を頂点集合としたものである。

S.P. Redmondのイデアルをベースにした零因子グラフに関しては多くの論文がある。例えばD.F. AndersonとS. Shirinkam共著［AS、2014年］などの論文があり、$\Gamma(R)$と$\Gamma_I(R)$の関係を述べた具体的な内容が考察されている。例えば、次のような例があげてある。これからも可換環論とグラフ理論の関連を見て取れる。

D.F. AndersonとS. Shirinkamの例：

$R = \mathbf{Z}_4 \times \mathbf{Z}_2$とし、$I = \{0\} \times \mathbf{Z}_2$とする。このとき、$\Gamma_I(R)$の頂点集合は{(2, 0), (2, 1)}である。$\Gamma(R)$の頂点集合は{(2, 0), (2, 1), (0, 1), (1, 0), (3, 0)}となりこれは(0, 0)以外のRの零因子全体である。従って、$\Gamma_I(R)$は$\Gamma(R)$の誘導部分グラフである。しかしこのようなことは一般の環では成立しない。その例として、$J = \{0, 2\} \times \{0\}$としたとき$\Gamma_J(R)$を考察する。このとき、$\Gamma_J(R)$では(1, 0)と(2, 1)は隣接しているが、$\Gamma(R)$では(1, 0)と(2, 1)は隣接していない。勿論、$\Gamma_J(R)$は$\Gamma(R)$の部分グラフではない。

このような例の検証を通じて教育系の代数学の教科専門を学習すれば、群や環の直積に関する具体例を考察することになり内容が十分に理解できることが予想され、また興味が深まると思われる。環の一般論は重要であるが、多くの例で裏打ちされて環が出来たことを考えれば当然のことであろう。

3　$\mathbf{Z}_{36}$のイデアル(18)を基礎とするレッドモンドの零因子グラフ

$\mathbf{Z}_{36}$のイデアル(18) $= \{0, 18\}$をベースとするRedmondの零因子グラフを$\Gamma_{(18)}(\mathbf{Z}_{36}) = (V, E)$とする。即ち、$V = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 20, 21, 22, 24, 26, 27, 28, 30, 32, 33, 34\}$、$E = \{[a, b], [b, c], [c, d], [e, f] \mid a \in A, b \in B, c, e, f \in C, d \in D\}$。但し、$A = \{2, 4, 8, 10, 14, 16, 20, 22, 26, 28, 32, 34\}$、$B = \{9, 27\}$、$C = \{6, 12, 24, 30\}$、$D = \{3, 15, 21, 33\}$とする。ここで、Eは54個の元からなり、[r, s]は$rs \in (18)$となるときである。

この2つの異なる頂点の隣接状態を指数指標で表現してみる。各頂点を例えば$6 = 2 \times 3$なら、2の冪と3の冪から6の指数指標を(1, 1)とし、32のときなら、$32 = 2^5$だから(5, 0)を32の指数指標などとする。$30 = 2 \times 3 \times 5$のとき5の冪は関係無いので考慮せずに30の指数指標を(1, 1)とする。このように頂点を指数指標で表すと、Vの2元r、sが隣接していることを調べるには$36 = 2^2 \times 3^2$、$18 = 2 \times 3^2$だから、rsの指数指標が辞書式順序で(1, 2)以上か$rs = 0$であるとき、rとsは隣接している頂点となりr s が(18)に属する元であることが分かる。

4　$\mathbf{Z}_2[X]/(X^4) = \mathbf{Z}_2[x]$（xはXの剰余類とする）のレッドモンド零因子グラフ$G = (V, E)$

可換環は整数論と代数幾何を源流として発展してきたといわれている。代数幾何に関連した可換環は多項式環の剰余環およびそれらの局所化が重要で代数曲線など多くの代数多様体に関係している。しかし、教育系の内容としては一番簡単な体$\mathbf{Z}_2$上の一変数多項式環$\mathbf{Z}_2[X]$のイデアル(X^4)による剰余環$\mathbf{Z}_2[X]/(X^4) = \mathbf{Z}_2[x]$を内容とした教材の事例が適当で、抽象的になりがちな代数学が具体的に扱える。$\mathbf{Z}_2[X]/(X^4) = \mathbf{Z}_2[x]$の元はxに関する4次以上の項を0とみなした簡単なものだからである。この環は定数項、1次の項、2次の項、3次の項の係数の場所に0と1の2個が入る重複順列の個数となるから$2^4 = 16$個の元からなる有限環である。従ってこれらを頂点とするグラフは有限グラフとなり、この環に付随するレッドモンドの零因子グラフが考えられる。

この環の単元の全体は乗法に関して群をなす。この乗法群$U(\mathbf{Z}_2[x]) = \{1, 1 + x, 1 + x^2, 1 + x^3, 1 + x + x^2, 1 + x + x^3, 1 + x^2 + x^3, 1 + x + x^2 + x^3\}$は8個からなる。この環の零因子全体$Z(\mathbf{Z}_2[x])$も8個で、$Z(\mathbf{Z}_2[x]) = \{0, x, x^2, x^3, x + x^2, x + x^3, x^2 + x^3, x + x^2 + x^3\} = (x)$となる。$\mathbf{Z}_2[x]$のイデアルは包含関係に関して全順序集合となり、5個存在する。小さい順に書くと、(0), (x^3), (x^2), (x), $(1) = \mathbf{Z}_2[x]$である。詳しく述べると、$I(2) = (x^2) = \{0, x^2, x^3, x^2 + x^3\}$ $(= (x^2 + x^3))$、$I(3) = (x^3) = \{0, x^3\}$である。$I(0) = (0)$とおく。ここで、$(x^2) = (x^2 + x^3)$になることは、$x^2 + x^3 = x^2(1 + x)$と書くことができ、$1 + x$は単元だから$(x^2) = (x^2 + x^3)$になる。

レッドモンドの零因子グラフは3個できる。(x)は極大イデアルだから素イデアルである。従ってレッドモンドの零因子グラフは定義から存在しないことが論理的にわかる。これら3個のレッドモンド零因子グラフを計算して考察する。

(1)　$\Gamma_{\mathbf{I}(2)}(\mathbf{Z}_2[X]/(X^4)) = (V, E)$の考察

$I(2) = (x^2) = \{0, x^2, x^3, x^2 + x^3\}$であった。

頂点集合は$V = \{x, x + x^2, x + x^3, x + x^2 + x^3\}$で辺集合Eは、このグラフのすべての頂点が隣接してクリークをなし、従ってこのグラフは完全グラフK_4である。頂点数（グラフの位数）は4個、辺の個数（サイズ）は${}_4C_2 = 6$個でこれは握手補題からも得られ、全ての頂点の次数の和12の半分である。また頂点はすべて奇数の位数を持ち頂点数は4個で偶数となり奇点定理を満たしている。三角形の個数は${}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$個である。通常の四角形は${}_4C_4 = {}_4C_0 = 1$だが、1個の四角形に3個の4-サイクルができるのでここではこれも異なる四辺形に数える。即ち、今の場合四角形は3個で計算する。これらの個数からこのグラフの隣接行列の固有多項式$f(\lambda, K_4) = \lambda^4 + C_1\lambda^3 + C_2\lambda^2 + C_3\lambda + C_4$は、$C_1 = 0, C_2 = -$(サイズ) $= -6$、$C_3 = -2 \times$(三角形の個数) $= -8$、$C_4 =$ (四辺形の個数) $- 2 \times$ (2-マッチングの個数)。2-マッチングの定義および個数の公式で計算すると3である。詳しくは、拙著［K2、2010年］に記載してある。$C_4 = 3 - 2 \times 3 = -3$。故に、このグラフの固有多項式は$f(\lambda, K_4) = \lambda^4 - 6\lambda^2 - 8\lambda - 3$。ここで述べたように隣接行列の固有多項式から行列式の計算をして求めた既知の事柄を、再度、図形の個数から上記のように固有多項式を得るという追体験も必要であると考える。

(2)　$\Gamma_{\mathbf{I}(3)}(\mathbf{Z}_2[X]/(X^4)) = (V, E)$の考察

$I(3) = \{0, x^3\}$であった。以下は図1を参照のこと。$V = \{x, x^2, x + x^2, x + x^3, x^2 + x^3, x + x^2 + x^3\}$, $E = \{[x, x^2], [x, x^2 + x^3], [x^2, x + x^2], [x + x^3, x^2], [x^2 + x^3, x + x^3], [x^2, x^2 + x^3], [x^2, x + x^2 + x^3], [x + x^2, x^2 + x^3], [x^2 + x^3, x + x^2 + x^3]\}$。ここで[a, b]はaとbが隣接している辺であった。

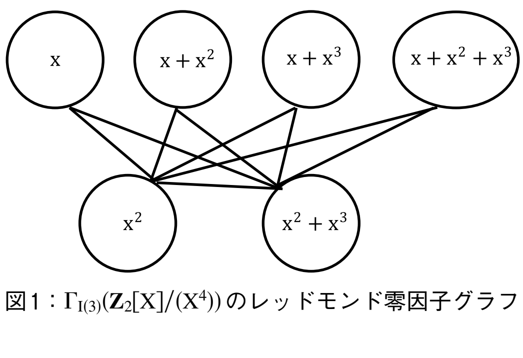

図1：$\Gamma_{I(3)}(\mathbf{Z}_2[X]/(X^4))$のレッドモンド零因子グラフ

(3) $\Gamma_{\mathbf{I}(0)}(\mathbf{Z}_2[X]/(X^4)) = (V, E)$ の考察

以下は図2を参照のこと。$V = \{x, x^2, x^3, x + x^2, x + x^3, x^2 + x^3, x + x^2 + x^3\}$ で7個、辺集合も $E = \{[x, x^3], [x^2, x^3], [x^3, x + x^2], [x^3, x + x^3], [x^2, x^2 + x^3], [x^3, x + x^2 + x^3], [x^3, x^2 + x^3]\}$ の7個となる。これは D.F. Anderson と P.S. Livingston（[AL、1999年]）やその他の多くの研究者の定義した零因子グラフである。グラフを予想する。3つの頂点 $x^2, x^3, x^2 + x^3$ の作る1つの三角形とその三角形の1頂点 x^3 から4個のペンダント（次数が1の頂点）$x, x + x^2, x + x^3, x + x^2 + x^3$ が隣接している。四辺形は存在しない。2-マッチングの個数はグラフから4個であることが分かる。従って、このグラフの固有多項式は、$f(\lambda) = \lambda^7 - 7\lambda^5 - 2\lambda^4 + 4\lambda^3 + (\lambda$ に関して2次以下の項）となる。

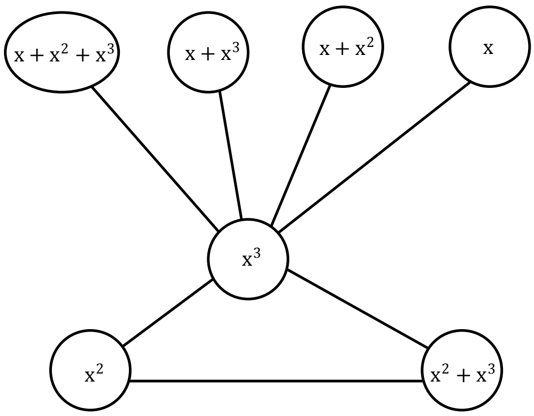

図2：$\Gamma_{\mathrm{I}(0)}(\mathbf{Z}_2[X]/(X^4))$ のレッドモンド零因子グラフ

ここで述べた（1）から（3）のレッドモンドの零因子グラフは、お互いに部分グラフにはなっていない。元のイデアルは包含関係に関して全順序集合である。

5 考察

第3節と4節で、レッドモンドの零因子グラフを計算で求めた。これは出来上がった数学のみでなく、考えながら創り上げていく授業が重要と考えるからである。

教材を通じて教科内容学的な内容と教科教育的な方法の可能な限りの融合の一例を、通常の理学的な授業では演習問題として扱われる内容を、試案・仮説で教科教育に近い素材として扱ってみよう。

上記の第4節の $\mathbf{Z}_2[X]/(X^4) = \mathbf{Z}_2[x]$ で述べた零因子の個数と単元の個数について学生に観察してもらう。

観察結果1：零因子の個数と単元の個数の両者が同じ個数を持つ。

初めての学生なら、これは偶然か必然性があってそうなっているのか解明しようとする時間と状況を設定する必要がある。十分時間をかけて、学生にどうなるか考察してもらい、結果を発言してもらう。結論はすぐには言わないで保留にしておき、観察して、x に $1 + x$ を対応させ、x^2 には $1 + x^2$ の対応に注目してもらう。この対応は1：1だから個数が等しいことがわかる。

x は x^3 を掛けると0になるから冪零元である。単元は1に置き換えることができる。冪零元に単元を掛けても冪零元である。従って単元の逆元をかけると単元と冪零元の掛け算は、冪零元と1の掛け算で十分であることがその理由である。

観察結果2：冪零元に1を加えると単元になる。

この証明は、まず単元は1として、1と冪零元の和は単元になるとして、考える条件を簡単にする。

$(1 + x)(1 - x + x^2 - x^3) = 1$ となることが $x^4 = 0$ だから証明できる。

このようなクルル次元が0の可換環では、その元は単元と零因子のどちらかである。極大イデアルが一個しかない可換環では、零因子と冪零元は一致することが一般論で知られている。

この単元と冪零元の和はまた単元であることが上記のように一般にも言える。

以上のように、ゆっくりと時間をかけて内容学の教材を扱うと教科教育の手法がその中に含まれることが理解できる。

6 おわりに

先にも述べたが、教育系の教科内容学的なものは教科教育の内容も多く含んでいる。従って、具体的なものと抽象的な内容を、あまり困難なく行ったり来たり出来ることが望まれる。それは、教育現場で教師の発した質問や授業内容に関して、児童･生徒･学生のツブヤキや児童・生徒・学生から質問などが非常に簡単に表現されている内容として出てきても、背景としては高度な抽象的な数学的内容と結びついていることが多いからである。教師がその内容に深い理解があるか否かで、教材としてそれを取り上げるか否かの判定など教材の扱いに影響する。将来の子どもの理解や心に影響を与えることを考慮した教材の理解が必要になる。教育系大学での教材として、教員が研究している内容を易しく教材化する努力が必要である。

教科教育と教科内容学の大きな乖離は授業としては望ましいものではない。教科の内容学的なものと教科教育的な教材の融合が必要である。

引用・参考文献

[AL] D.F. Anderson and P.S. Livingston, The zero-divisor graph of a commutative ring, J. Algebra 217 (1999), 434–447

[AT] 安藤清･土屋守正･松井康子、例題で学ぶグラフ理論、森北出版株式会社、2013年

［AS］D.F. Anderson and Sara Shirinkam, Some remarks on the graph $\Gamma_I(R)$, Communications in Algebra, 42 (2014), 545–562

［B］I. Beck, Coloring of commutative rings, J. Algebra 116 (1986), 208–226

［F］深川久、現場から見た数学教師に必要な数学的能力、数理解析研究所講究録1920（数学教師に必要な数学能力の育成法に関する研究）150–159（2014年10月）

［JK］Y. Jin and M. Kanemitsu, Beck's graphs associated with Zn and their characteristic polynomials, International Journal of Applied Mathematics and Statistics, 11 (2007), 81–93

［K］金光三男、整数の性質に関連したグラフ理論の教材化、日本教科内容学会誌、vol.1 no.1、（2015）、53–61

［K2］M. Kanemitsu, The number of distinct 4-cycles and 2-matchings of some zero-divisor graphs, (In Automata, Formal Languages and Algebraic Systems, Edited by M. Ito, Y. Kobayashi and K. Shoji), World Scientific, (2010), 63–69

［KH］金光三男・長谷川順一、教員養成課程「数学科教育」の授業における図形の論証的指導の扱いについてー教員養成系大学・学部学生への調査をもとにー。香川大学教育実践総合研究15、（2007）、7–17

［Ko］小林みどり、あたらしいグラフ理論入門、牧野書店、2013年

［M］宮崎修一、グラフ理論入門—基本とアルゴリズム—、森北出版株式会社、2015年

［Mo］文部科学省編、小学校学習指導要領解説、算数編、東洋館出版社、2008年

［N］日本数学教育学会編、数学教育学研究ハンドブック、東洋館出版　2010年

［R］S.P. Redmond, An ideal-based zero-divisor graph of a commutative ring, Communications in Algebra 31 (2003), 4425–4443

［T］遠山啓、初等整数論、日本評論社 1972年

［T2］中部児童教育研究会編、教職教育の新展開—第1部第2章算数・数学教育の方法と教材研究—分数・素数・対称性などの教材化— 7–16（拙著）、学術図書出版社、2012年

［W］A.ヴェイユ（訳者:片山孝次・田中茂・丹羽敏雄・長岡一昭）、初学者のための整数論、ちくま学芸文庫、筑摩書房、2010年

（2015年9月18日受理）