【 論文 】

作図ツール GC/html5 を用いた数学的探究における精度・誤差について
― インターラクティブな探究に向けて ―

飯　島　康　之

愛知教育大学教育学部

要旨

OECDのキーコンピテンシーでは、1-cとしてICTのインターラクティブな利用を挙げている。作図ツール（動的幾何ソフト）はインターラクティブな数学用ソフトの代表例であり、そのケーススタディはICTのインターラクティブな利用について考察することに資すると思われる。本稿では、「測定」を利用した作図ツールの利用における誤差や精度に関して分析した。内部での計算は非常に精確ではあるものの、特に表示桁数に合わせた四捨五入による誤差やポインティングデバイスでの位置の選択等による誤差などがあることが明らかになった。そして，それらから生じる問題点を、様々な数学的活動を展開していく必然性として生かしていけることを、具体例を基に明らかにした。またそのような授業で使うためのコンテンツ開発において、表示桁数、表示する数式の種類、点の束縛条件などがコントロール可能な変数となりうることを示した。

キーワード

数学的探究、数学教育、作図ツール、誤差、インターラクティブ

Ⅰ．問題及び目的

OECD（2005）によるキーコンピテンシーでは、第一のカテゴリーとして、「（言語やテクノロジーなどの）道具をインターラクティブに使う（Use tools interactively (e.g. language, technology)）」が挙げられ、コンピテンシー1-cとして、「テクノロジーをインターラクティブに使う能力」が挙げられている。この観点は、教育における今後のICT利用のあり方を考える上で「インターラクティブな利用」の重要性を示唆している（飯島、2015b）。

一方、数学教育の中で、長く使われ、実践されているソフトの一つに、作図ツールがある。これは「数学的な意味での作図を行い、変形・測定等を行えるソフト」のことをいう（飯島、1991）が、同時に、「ツール」という言葉は、（単独の問題を解決するためのものではなく）さまざまな数学的探究で利用可能な汎用の道具であることを示すものでもある。海外ではこれらのソフトに対して、dynamic geometry software, dynamic geometry environment, interactive geometry software などの名称も使われ、それに合わせて、動的幾何ソフト、動的幾何環境、対話的幾何ソフトなどの名称も使われる。これらのソフトに「interactive」という名称が使われる一つの理由は、マウス等を使って図形を構成したり、動かしたりすることができることなど、インターフェイスの設計の特徴も関わっているが、それは単に操作性を指すだけでなく、それらを使った数学的探究がインターラクティブであることを目指すものでもある。このような意味において、数学の中で「テクノロジーをインターラクティブに使う」とはどういうことかを明らかにする上でも、作図ツールを使った数学的探究は代表的な事例を提供するものといえるであろう。

飯島（2014b）では、三角形の角の二等分線の交点をなす角と頂角との関数関係の教材化・授業化に際して、誤差の発生を意識的に教材化し、研究授業を実施した様子について記述した。本稿では、そこでの考察をさらに一般化し、「測定」との関わりに焦点をあて検討する。紙などを使った「実測」との共通点もあるが、異なる点も多い。

実際、「実測」は理科、特に物理学における実験との共通点があるが、物理学においても理論と実験は相補的な役割を果たしていて、精度の高い実験が新しく説明すべき事実を提示し、理論の発展を促したり、理論から示された仮説を検証するために実験の内容な精度の発展が求められたりする。数学においてテクノロジーによる実験が豊富に行えるようになり、精度や誤差に起因する現象が生まれるなら、それに対応して数学的推論を中心とする数学的活動が活躍する場面が増えていくことが想定される。

そこで本稿では、特に精度や誤差に関して、どのよう

な特徴があるのかを、さまざまな具体例を踏まえて明らかにする。誤差等の存在は、次に何をすべきかを考える原動力にもなる。問題を発見し、それを解決するための複数の選択肢を考え、選択しながら数学的探究を構成していく様子は、「インターラクティブな利用」の一部を明らかにすることに結びつくともいえる。一方、それらの特性を活かすための GC/html5 での教材開発についてもふれることにする。

Ⅱ．作図ツールを使った測定における誤差

(1) 基本的な例でも発生する誤差

作図ツールを使った数学的探究の基本は、（条件を満たしながら）図形を動かしたときに成り立つことを発見することである。動かしても変わらない関係(不変要素)や、変化の様子（関数関係）が基本的な対象である。たとえば、「どんな三角形に関しても、内角の和は 180° になる」とか「円周角は中心角の半分になる」ことの観察は、作図ツールの測定機能を使った探究の最も基本的な例である。分度器を使った角度の測定を児童・生徒が行うと技能の習熟の問題や道具の精度などの問題から誤差が生まれ、「三角形の内角の和を合計すると 179° にしかならなかった」というようなことも多々あることを考えると、誰が行っても「正確に 180° になる」ことが期待される使い方といえよう。

しかし、実際に測定すると、上記の二つの場合に関して、図 -1, 2 のような測定結果になることがある。

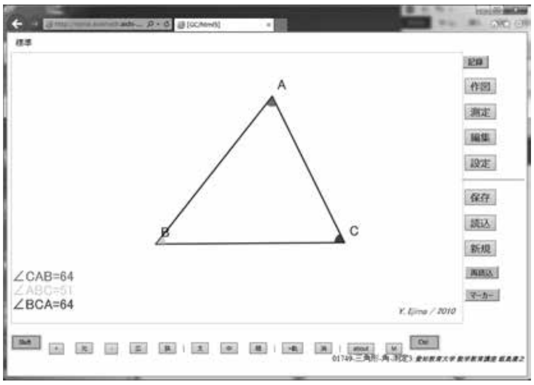


図- 1　三角形の内角の和は179°?

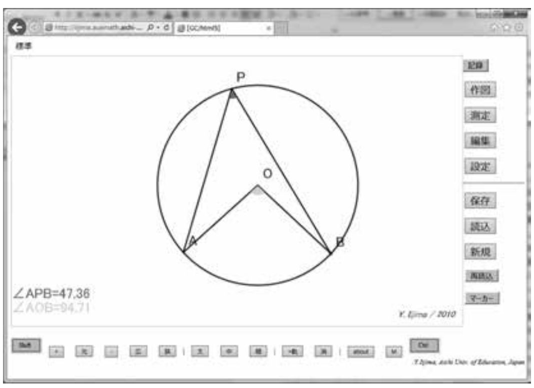


図- 2　円周角は中心角の半分ではない?

実測での誤差の扱いに閉口している方がデジタルコンテンツなら正確な現象を提示できると期待しているとしたら、算数・数学の基本的な例でさえも、誤差が発生することに驚かれるかもしれない。

(2) 作図ツールによる精確な作図

作図ツール GC で行う作図は正確ではないが、精確である。図形において、元になっている点の座標を独立変数とし、それぞれの作図手続き（垂直二等分線、角の二等分線など）によって、構成される幾何的対象を、JavaScript での浮動小数点の精度に基づき順次計算している。そのため、無理数や一部の分数のように無限小数になる場合は一定の精度で打ち切られ、（数式処理などによる）正確な計算ではないが、かなりの精度を保った計算を行っている。

紙上で定規・コンパスでの作図を行った場合、機器の精度の問題や、生徒の作図技能の問題などから、誤差が生まれる。「三角形の 3 つの角の二等分線は一点（内心）で交わる」という程度の図であっても、生徒が行う作図では確信が持てないことも多い。確信が持てないときに命題そのものが正しくないのか、作図技能の問題なのかが分からず、定規・コンパスを「精確に使う」ことにこだわってしまうことを考えると、作図ツールによる精確な図でいろいろな場合を調べたときに、「正しくない命題の場合には、明らかな反例が見つかる」ことや「いろいろな場合を調べたがこの予想は成り立ちそう」という妥当性を実感できることは画期的である。

(3) 測定値の表示桁数の指定と四捨五入

内部の計算は 16 桁程度の精度で行っているが、そのまま表示しても、人間による観察には適さない。そのため、GC/html5 の標準設定では小数点以下 3 位を四捨五入し 2 位までを表示する（「設定」において変更可能）。

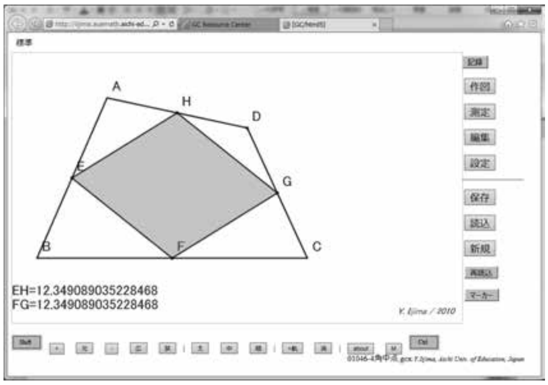


図- 3　小数点以下10位まで表示

図 -3 では EH と FG を測定しているが、両方とも BD の長さの半分になるので、どの桁においても等しい値になり、どの桁で四捨五入をしても同じ値として表示される。

これに対して、図 -2 の円周角の定理の図について図 -4 のように小数点以下 10 桁まで表示してみると、元の

値では円周角は中心角の半分になっているが、たとえば整数部分のみを表示しようと思うと、∠APBは切り捨て、∠AOBは切り上げと扱いが変わってしまうので、誤差として認識されることになる。

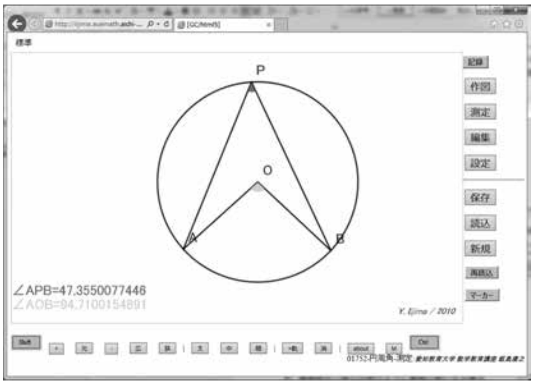


図-4　小数点以下10位まで表示

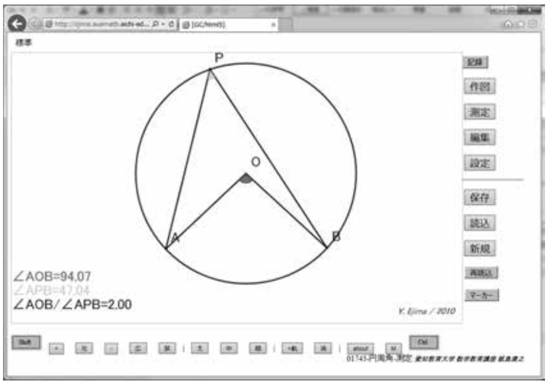


図-5　円周角と中心角の比

一方、数式を使うときには、内部の精度に基づいて計算し、その結果に関して、所定の桁で四捨五入をして表示するため、図-5のように、一見矛盾する結果が表示される。同様に三角形の内角の和に関しても、内部では図-6のような計算をして180°が表示される。

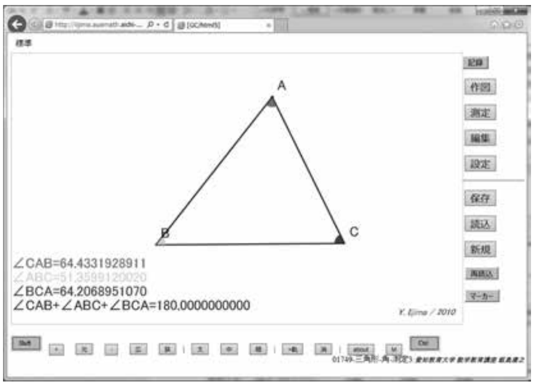


図-6　三角形の内角の和

(4) 必要に応じて精度の高い測定が可能

円周角や三角形の内角の和にみられるような現象は、テクノロジー固有の現象ではない。紙上の図に関して分度器を使って「正しく」測定したとしても、四捨五入を正確に行えば発生する現象である。

「3つの角の和が179°になった」とき、実測の場合には、精度を1桁上げるだけでもより精密な道具が必要になる。たとえば、「0.1°まで測定可能な分度器を使う」ことは非常に難しい。これに対して、作図ツールでの測定では、表示桁数を変えるだけですぐに精度を変えられる。精度を変えながら、「そういうことか」と納得し、たとえば、角の大きさがそれぞれ60.3、60.3 59.4の場合には、四捨五入をすると決して180ぴったりにはならないことを理解するチャンスに変えられるとよい。

(5) 1/3や無理数は正確な表示は不可能

多くの場合は精確、つまり精度の高い近似による処理で問題は起きないのだが、たとえば、「有理数なのか無理数なのか」に注目したいような場合には作図ツールの測定では対処できない。有限小数で打ち切られてしまうから、その先が循環する（有理数）のか、循環しない（無理数）のかがわからないからである。

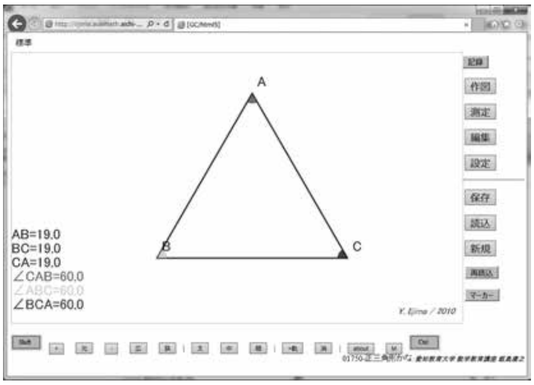
(6) 平面内を自由に動く点に関してポインティングデバイスで指定可能な点の有限性と精緻性

作図ツールを使った探究において、誤差や精度の問題が生まれるのは、上記のように、作図機能を使った「精確な作図」を使うときに限定されるわけではない。たとえば、三角形の辺の長さと角の関係を調べる場合であれば、3点を自由に動かせる三角形を作図し、この3点を平面内で自由に動かし、二等辺三角形の場合にはどうなるのか、正三角形の場合にはどうなるのかなど、一般的な作図をしておいて、点を動かし、特殊な場合について観察することも多い。また、測定値を使って調べる場合、定点A, B, Cに対して、PA=PB=PCという条件を満たす位置を求める場合のように、平面内を自由に動く点Pをとり、Pを自由に動かしながら測定値を観察することも多いからである。

数学的に理想化された平面と違って、パソコン上に表示されているのは、有限の点（ドット）の集まりである。平面内を自由に動ける点は、本来無限の位置をとりうるはずだが、パソコン上では有限個（GC/html5の標準では、900×540個）の中の一つの位置を指定することしかできない。GC/html5の標準設定では、0.05の距離ごとに1つずつの点があるだけだ。ズーム機能を使えば、その間隔を細かくすることはできるが、精度が$\frac{1}{2^n}$に変わるだけで、たとえば、座標が1/3とか無理数となる点を正確に指定することはできない。

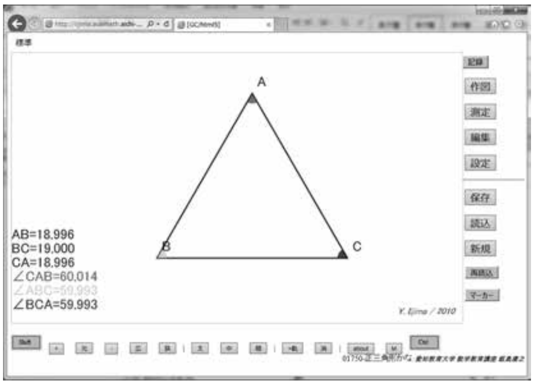
しかも、マウスやタッチで点を動かす場合、細かな1ドット単位の動きをきちんと制御することは難しく、数ドット違っている場所であっても、「だいたいそうなっている点」をもとに、「だいたいの結果」を観察することが現実的である。実際「正三角形の3つの角は等しい」ことを確認するために、自由な3点を動かして該当する

図を作ろうとすると図 -7 のようになるが、マウスやタッチでこの図をつくるには１ドット単位で動かすのでかなり大変だ。

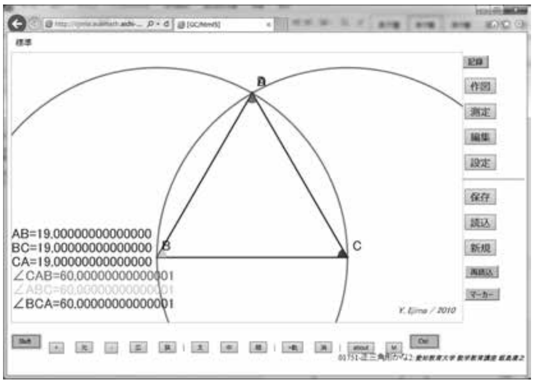


図−７　点Aを動かして正三角形をつくった

しかも、この図の場合でも、測定値の表示桁数を増やすと、実は図 -8 のようになっている。精度を挙げてしまうと、「正三角形はつくれない」ことになる。



図−８　測定精度を上げると厳密には正三角形ではない



図−９　正三角形になるはずの点を作図した場合

一方、「直線上を動く点」、「円上を動く点」、「他の点と重ねる」などを使う場合には、画面上のドットの位置から直線や円上に射影した点として扱うので、精確な位置を与えることが可能になる。たとえば、上記の例に関して、BC を半径とし、B, C を通る２円を作図し、その交点 D と A を一致させた図の場合には、図 -9 のような測定値になる。小数点以下 13 桁まで精確であり、３つの角の大きさは一致している。（もっとも、末尾において、丸め誤差が発生しているので、精確な作図であっても、一定の精度しか期待できないと割り切る方がテクノロジー利用においては現実的であろうが。）

(7) 精度に応じた「条件を満たす点の集合」の変化

たとえば、A, B に対して、∠ APB=60°になる P の集合を求める場合（円周角の定理の逆）を考えてみよう。GC の標準である、小数点以下２位まで表示し、60.00°になる場所を探すとほとんど見つからない。たとえば次図の 59.99°から１ドットずらすと 60.09°になったりする。その理由は、∠ APB=60°となる集合（円）と GC の画面上で表示されている点（0.05 刻みの格子点）の共通部分は厳密には空集合あるいはほんの数ケ所しかないことによる。そのため、現実的には「60 に近い数値だったらプロットする」とか、「整数部分のみを表示し、それが 60 だったらプロットする」という方法を選択することになる。つまり、当初の狙いとしては、

$$\angle APB = 60^\circ$$

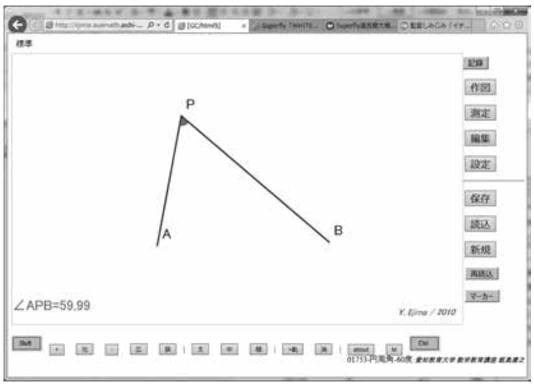
という等式を満たす集合を求めるのに対して、

$$59.5^\circ \leqq \angle APB < 60.5^\circ$$

という不等式を満たす集合を観察することに切り換えている。そして、表示桁数を変えるということは

$$|\angle APB - 60^\circ| < \varepsilon$$

という不等式の ε の値を変えることに相当する。ε の値を大きくすると、条件を満たす集合は大きな領域になり、ε の値を小さくすると、小さくなり、ある値よりも小さくなると、観察結果としては見つからないこともありうることになる。



図−10　ぴったり60°になる場所の発見は困難

Ⅲ．インターラクティブな探究のために

(1) 観察結果を踏まえて「次、どうする？」という問い

逆説的に、「インターラクティブではない」のはどういう場合かを検討してみよう。なんらかの問題があり、それを解決する上で作図ツールを使った観察・測定等をして結果を得たとする。その結果がどのようなものであっても、影響されることなく、所定の手続きを経て解決を進めていくものが、「インターラクティブではない」

といえるであろう。所定の一連の手続きが明確にあり、それをよどみなく実行できるようにしていく学習とでもいうべきか。逆にいえば、観察結果を踏まえて、それを吟味・解釈し、次に行いうる選択肢を明確にし、理由を伴って選択し、次に進めていくプロセスをここではインターラクティブと呼ぶことにしたい。つまり、標語的にいえば、結果を踏まえて、「次、どうする ?」というような問いを投げかけ、考察を進めるような学習ということができるであろう。

(2)「もう一度取り組める」ことが可能にすること

「実験を正確に行えば、三角形の内角の和は必ず 180° になる」のだろうか。いや、そんなことはない。前述のように、真の値が 60.3、60.3、59.4 の場合、整数の精度で正確に測定すると、合計は 179° になる。一度だけの測定が前提の場合と、必要に応じて（精度も変えて）やり直すことができる場合では、学習可能なことが変わってくる。そもそも、実験とはそういうものなのだ。いろいろな意味での誤差が存在し、求める精度に応じて道具等を選択し、仮説が検証されるのか、否定されるのか。否定された場合に、どこに問題があるのかなどを考えるプロセスこそ、「実験」の意義があるとすれば、実験について学ぶには、インターラクティブであることが不可欠である。

逆に、「どんな三角形に関しても、内角の和は 180° になる」ことを示すための観察として使いたいなら、必ず和が 180° となるような場合のみを扱うような使い方の工夫をするとか、和が常に 180° と表示されるようなデジタルコンテンツをつくる方法も選択可能かもしれないが、「実験のための道具」としてテクノロジーを使うなら、それは本末転倒であろう。

(3) デジタル表示された数値との接し方

「どんな測定にも有効桁数や誤差がある」とか「必要に応じて精度を高めたデータを得ることができる」ということと同時に、デジタル表示された数値はそのまま信用していいかどうかは疑わしいという認識にも結びつく。

実際、テクノロジーを使うとアナログ的な道具ではありえないほどの桁数で測定値が表示されることも少なくない。たとえば、GPS 機能を持つスマホやタブレットではブラウザの geolocationAPI を使うと次図のように緯度・経度を小数点以下 14 桁まで取得できる。

- 緯度：35.03626705525756
- 経度：137.04537832792994

図-11　iPadのブラウザで表示した緯度・経度

しかし、1° あたりの距離が最も長い赤道付近でさえ、1° は 111km、小数点以下 2 位で 1km、5 位で 1cm、6 位で 1mm の精度に対応していることを考えると、この数値はあまりに精度が高すぎる。そのまま信頼していいはずがない。最後の演算の精度は高くても、その前の GSP データ取得の部分にボトルネットがあるのだろう。逆にいえば、デジタル表示された数値は必ずその精度を意識しながら接することが不可欠であり、そういう接し方も学ぶべきといえるであろう。

(4) 数学的活動を引き出すきっかけとしての測定

三角形の内角の和のような基本的なことでさえ、きちんとした実測を行うと、「いつも 180° 」とは限らない。それを踏まえて、「次にどうするか」を意識化し、測定桁数をあげてみたり、「理想的にはどうなるか」を意識化するのが、インターラクティブな探究の在り方といえる。次に行いうる選択肢は一般には複数ありうるし、その選択の基準も複数ありうる。それらを想定しながら、数学的活動が有意義なものとして位置付きうるような授業の流れを設計することが、数学教育の観点からの、「測定」等を生かした ICT 利用に関する教材研究・授業設計ということになるであろう。

Ⅳ. 測定に関わる探究における数学的活動とその役割

(1) 実験と相補的な役割を果たすべき数学的活動

テクノロジー利用による豊富な実験に関わり、精度や誤差に起因する現象が生まれ、それに対応して数学的推論を中心とする数学的活動が活躍する場面も増える。最も基本的なのは、観察結果から推測される予想に関して証明を与えるのが数学的推論の役割だが、さまざまな事例を通して見いだされるさまざまな数学的活動やその役割について具体例に則して述べる。

(2) 証明への手がかりを与えてくれる「特別な場合」への注目

円周角の定理をみてみよう。点 P を動かしたときに「角の大きさが変わらない」ことが観察されるが、その中に図 -12 のような特殊な場合がある。PB が中心 O を通る場合、「中心角は円周角の 2 倍になる」という証明の手がかりがある。測定値間の関係を示唆する場合に注目することは、重要な数学的活動といえる。

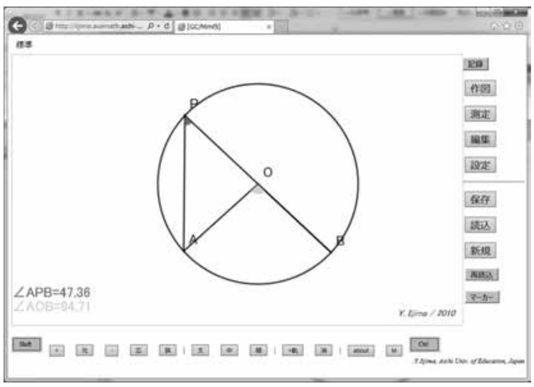


図-12　二等辺三角形が現れ証明が明確になる場合

△ OPA は二等辺三角形になるから、∠ APO= ∠ PAO になり、三角形の外角の性質から、∠ AOB = ∠ APO+ ∠ PAO = 2 ∠ APO = 2 ∠ APB となることが証明できる。

小数点以下 1 位まで表示したときには上記のように表現されるものの、もともとぴったり 2 倍になっているはずだということを推論することができる。そして必要なら、それを確証するために表示桁数を増やして測定しなおすこともできる。

(3) 観察結果の数学的表現

図 -13 において、△ ABC と△ PBC の面積が等しくなるような点 P の集合を調べる場合を考えよう。

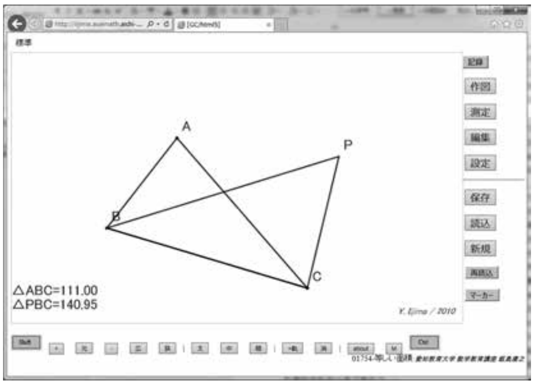


図-13　△ABC=△PBCとなるPの位置を探す

面積がほぼ一致する場所を何カ所かプロットした結果として、図 -14 がえられたとする。

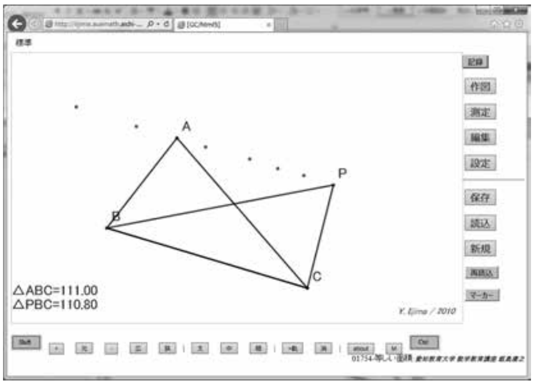


図-14　プロットした結果

しかし、これだけでは次に進めない。この集合を数学的に表現できれば､その予想を数学的に証明することや、それを図の中で作図し、検証することもできる。「直線」「BC に平行な直線」というような言葉を候補に挙げながら､「それでは一つにはきまらない」等の反論を受け､「A を通って BC に平行な直線」という表現に到達することができる。

すると、図 -15 のように候補となる直線を追加して測定値を観察して確かめることや、BC を底辺と考えると､「高さが一定」に結びつけ､証明に到達することもできる。「正しい数学的表現をすること」は、検証や証明を進めていく上での第一歩ともいえる活動である。

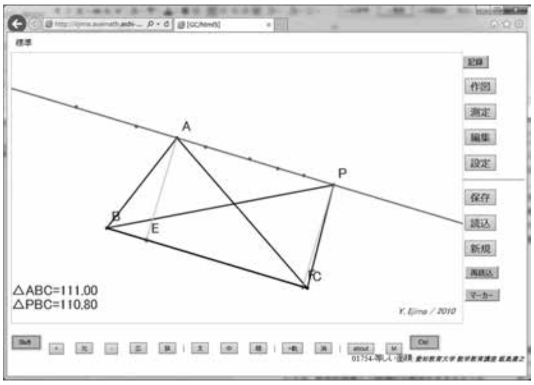


図-15　BCに平行でAを通る直線を追加し検証

(4) 数学的表現の明確化のための特殊な場合への注目

定点 A,B に対して、PA=2PB となる点 P の集合を求める場合、図 -16 のような円になるが、中心・半径などの手がかりがなく、円をきちんと表現するには難しい。

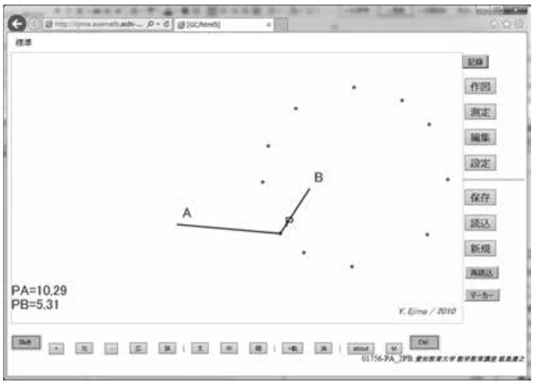


図-16　PA=2PBとなる点をプロット

しかし、たとえば確実に PA=2PB になるはずの場所を直線 AB 上に求め、AB の 2:1 の内分点と外分点に注目することができれば、それを端点とする線分を直径とする円が候補となることを見いだせる。このような、実験をしなくても確実に条件を見いだす場合に注目するのは、特殊化という数学的活動そのものといえるだろう。

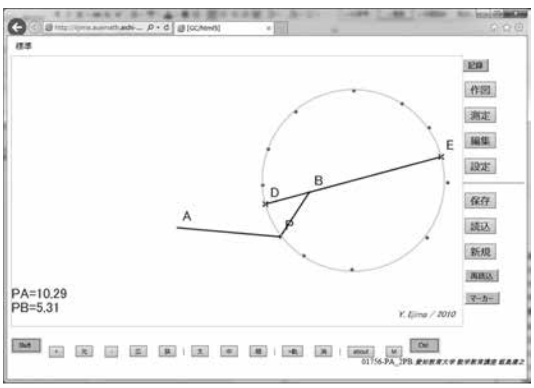


図-17　内分点・外分点に注目し円を作図

⑸ 表やグラフへの表現と数学的活動

たとえば、図-18のように、△ABCの∠B、∠Cの二等分線を引き、その交点をIとするとき、∠BACと∠BICの関係について注目する場合を考える。

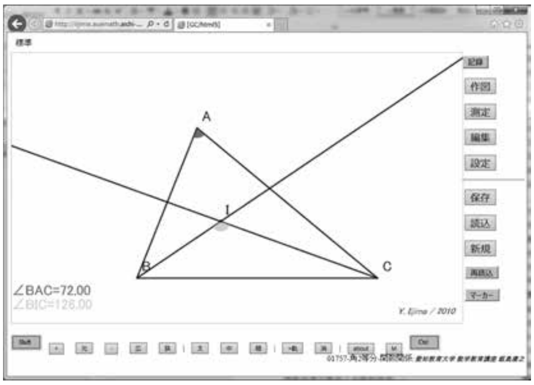


図-18　∠BACと∠BICの関係に注目

頂点Aを動かしても二つの間に明確な関係が見いだせないとすると、組織的に測定・記録・考察することの必要性が生まれ、たとえば表にまとめることになる。その後の表での考察が想定されると、むやみにデータを集めるのではなく、たとえば∠BACが一定の間隔になるようにデータを集め、図-19のような結果をえることができる。そして,グラフ用紙にプロットすると、次のような結果を得る

表-1　∠BACと∠BICの測定結果

∠BAC	30.02	40.03	49.99	60.05	70.03	80.00	90.03	100.00	110.06	120.09	130.25	140.10
∠BIC	105.01	110.01	115.00	120.02	125.02	130.00	135.01	140.00	145.03	150.05	155.13	160.05

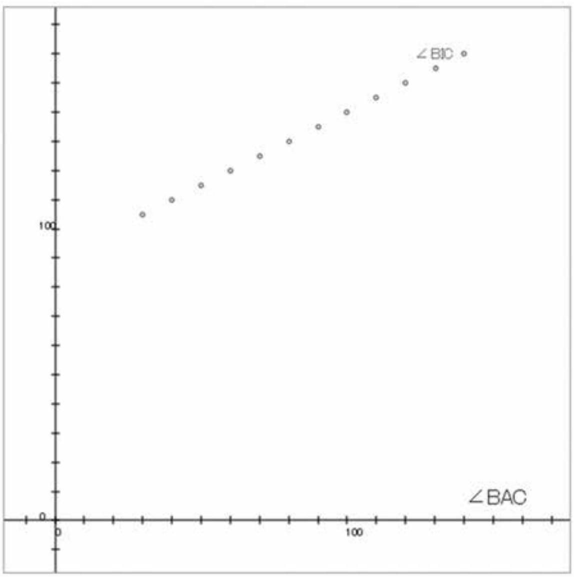


図-19　表-1の結果をプロット

これらを手がかりに、グラフが直線になっていそうだとか、変化の割合が一定のようだとか、点を結んだ直線を引き、それを表す式を推定したり、∠BACが0°や180°に限りなく近くなる場合を思い浮かべてみることなどがありうる。

⑹ 条件の緩和・分解・組み合わせ

たとえば、定点A,B,Cに対して、PA=PB=PCとなる点Pを見つけたいと思っているのに、なかなか見つからないこともある。たとえば、そのようなとき、三つの条件を満たす場所を闇雲に探すのではなく、条件を緩和して、「PA=PB」となる場所をとりあえず探してみることもできる。実際、条件を満たす集合は1次元的な広がりを持つことになり、見いだしやすくなる。ABの垂直二等分線が見いだされ、AB,BCの垂直二等分線の交点が求める点であることがわかる。

⑺ 観察だけでは主張できないことの証明

上記で挙げた事例においては、観察結果の中で成り立つことの理由を明らかにすることとして数学的証明が機能するものが多い。一方、観察だけでは説明できないこともある。たとえば、定点Aから直線CDにタッチして定点Bに至る経路を考えるときの最短経路を求める場合を考える。小数点以下2位までで調べると図-20のように、一定の幅においてPA+PBは同じ値をとるが、これは一点に確定するはずかどうか。観察精度を上げれば幅は短くなるようにも思えるが、一点しかない「はず」ということの論拠にはならない。

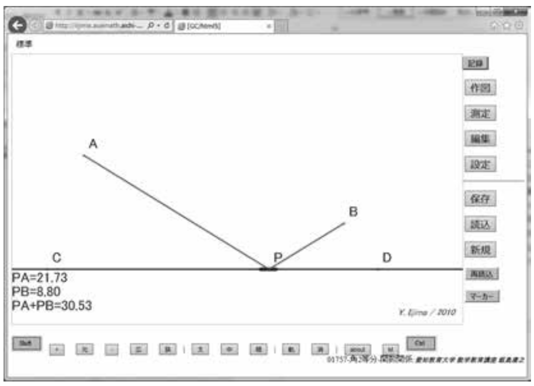


図-20　PA+PB=30.53になる場所はたくさんある

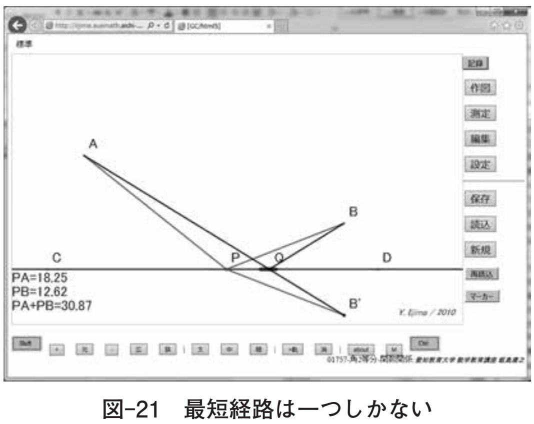


図-21　最短経路は一つしかない

図-21のように、CDに関するBの対称点B'をとり、AB'とCDの交点Qを構成し、A-P-Bという経路と

A-Q-Bという経路を比較し、三角不等式で証明することが不可欠になる。

また、4つの定点A,B,C,Dに対して、PA=PB=PC=PDという条件を満たす点を探す場合を考えてみよう。点Pをどんなに動かしても、4つの距離が等しいなる場所は見つからない。しかし、「努力しても見つからない」ということは、「ない」ことの証明にはならない。PA=PBとなる点の集合はABの垂直二等分線になることなどを論拠に図-22のような図を作り、「もし存在するとしたら、4つの垂直二等分線が一点で交わる必要がある」ことなどを論拠とする必要がある。

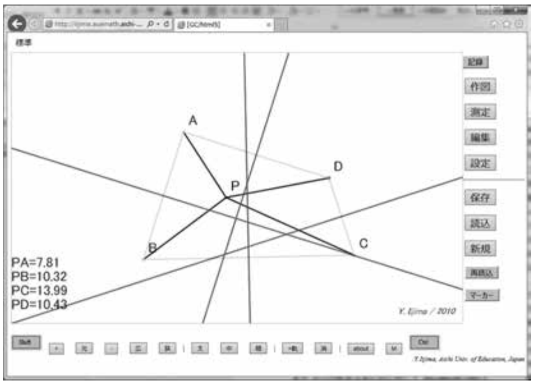


図-22　4本の垂直二等分線が一点で交わらない

別の例として、平面上の格子点をA, B, C, Dとし、直線AB, CDを引いたとき、2直線の交点Pの座標について観察した場合を考えよう。

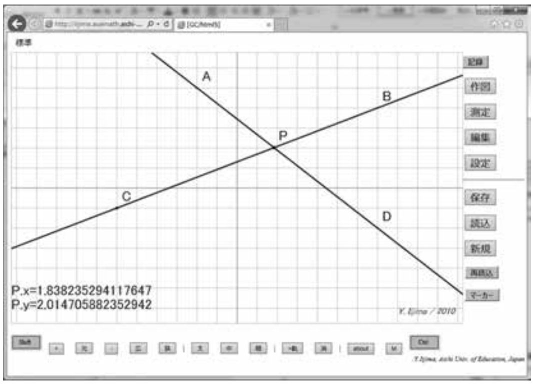


図-23　格子点を通る直線2本の交点の座標

計算結果はかなり精確なはずだが、この値からは、この二つの座標は有理数なのか分数なのかわからない。A, B, C, Dを動かしてみると、明らかに整数になるときや有理数になる場合があることはわかるが、無理数になることがあるかどうかはわからない。それを明らかにするには、文字を使った数学的証明が有力な候補になる。実際、二つの格子点を通る直線は、整数係数の方程式で表現できることと、そのような2つの直線の交点は有理数になることを示すことが一つの証明方法になる。

V．教材開発における「変数」としての「精度」

(1)「表示桁数」がもたらす影響

GCを使った授業の多くでは、事前につくっておいた図を生徒に配布し、使うことが多い。このとき、測定の精度、つまり測定値の「表示桁数」をどれくらいにしておくかは、教材開発においてコントロール可能な変数の一つになる。

たとえば、3つの定点A, B, Cから等しい距離にある点Pの位置を求めるとき、整数分のみを表示していれば、数分のうちに、3つの値が等しくなる場所を発見する生徒が出てくる。逆に、小数点以下3位くらいまで表示すると、A, B, Cの配置が特別でない限り、3つの値が等しくなることはありえない。

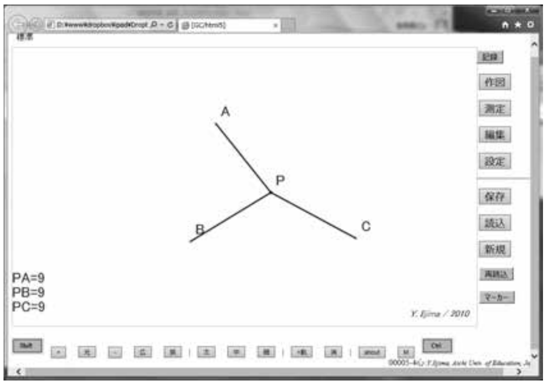


図-24　3つの長さの等しい位置はすぐに見つかる

「GCを使うとここにあることがわかった」ということを踏まえ、たとえば「現実の広場や紙の上ではそういう測定ができないけれど、どうしたらいいだろう」というような展開につなげたい場合には、図-24のような整数表示が適している。逆に、GCの環境下で「いくら探しても見つからないけれど、どうしたらいいだろうか」という問いを投げかけ、「3つでは難しそうだからとりあえず、2つに絞ってみよう」という流れにしたい場合には、図-25のように表示桁数を増やしておく方がいい。

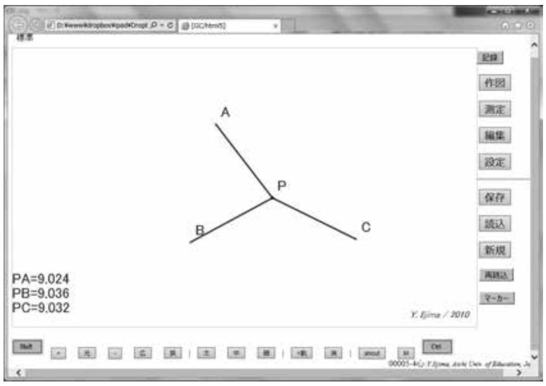


図-25　3つの長さの等しい位置は見つからない

また、数値ではなく、視覚的な長さで扱いたい場合には、図-26のように、測定値の長さをもつバーとして表

示することもできる。この表示方法の場合、視覚的に表示される長さが等しければ末尾の位の数値などにこだわらず、「大体等しい」として扱いやすくなる。

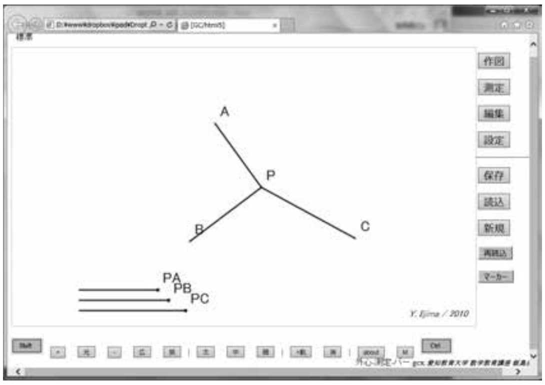


図-26　３本のバーで長さを視覚的に表現

(2) 数式機能を使った測定値の表示などの選択肢

また、PA=2PBとなる点Ｐの位置を求める場合、表示する数式としては、次のような候補が考えられる。

Ａ．PAとPB
Ｂ．PAと2PB
Ｃ．PA － 2PB
Ｄ．PB / PA
Ｅ．上記のいずれかを視覚的に表現

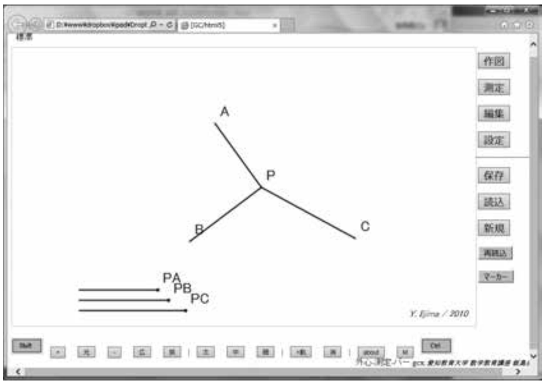


図-27　候補となるいろいろな数式

測定結果を観察しながら暗算をすることを生徒に求めた方がいい場合はＡだが、それが負担になる場合はＢの方がいい。内部で精密な値で計算し、PA=2PBからのズレを的確に表現するならＣやＤの方がいい。数値にこだわらず、視覚的な長さで考察させる方が適している場合はＥの方がいい。どれを選択するかも、教材開発におけいる変数の一つといえる。

(3) 点の動きの束縛や座標軸等の表示

円周角の定理のように、ある円の上に点をとるかどうかが重要な場合、自由な点として動かすならば、「予想」としての円を見いだすことを想定することになる。一方、「検証」を行いたい場合には、その円上に動きを束縛することになる。その両者を随時切り換えながら操作したいときには、「Shiftキー」あるいは「Ｓボタンを押しながら操作する」ことが適している。それらに関して事前にどの設定をしておくのがいいのか、あるいは機能や操作の仕方を教えておいて、生徒が操作するようにしておく方がいいのかによって、探究の様子は変わってくる。

同様に、格子点において特徴的な現象が起こる場合には、マウスやタッチで格子点上に合わせることに時間と労力を使ってしまう方が不適切と思えることもある。それらの場合には、事前に格子点上に束縛しておくなり,点を離したときに格子点に吸着されるようにしておくなり、「Ctrlキーを押しながら動かすことで、格子点に束縛される」機能を使いこなすことができるが、そのいずれを使うことを基本とするかを想定しておくことが必要になる。

Ⅵ．考察と今後の課題

本稿では、GC/html5の測定機能を使ったさまざまな具体的な事例を踏まえながら、誤差や精度に関して、どのような現象があるのか、そしてそこから生まれる問題を解消するために、どのような数学的活動と関わりうるかを明らかにした。

まず、誤差等の発生の原理に関しては、内部での計算は非常に精確ではあるものの、特に表示桁数に合わせた四捨五入により、かなり基本的な事例であっても、誤差が生じる可能性があることやマウスやタッチによる点の決定にも誤差が生じる可能性があること、さらに有限の桁数なので、無限小数で表現される場合には正確な値になりえないことが明らかになった。

一方、誤差の発見に際して実測の場合には有効桁数を一桁上げるには精度の高い測定機器への変更など多大な労力等を要するのと比較して、テクノロジーを使う場合は、内部計算の精度の範囲内であれば、表示している小数点以下の桁数を上げることは容易に行えるため、「精度を上げたらどうなる?」というアイデアを即座に実行可能であること、そのため、学習過程の中に取り込むことが十分可能なことが明らかになった。

また、数学的活動に関連して次のようなことが明らかになった。

まず、数学的活動の必要性を引き出すための誤差等の役割である。測定等で常に正しい結果がえられるなら数学的証明等の必要性は実感できない。誤差の発生や膨大なデータからシンプルな法則を見いだし説明することのよさなどを実感する契機を与える。

第二に、得られたデータから観察されたことの解釈の重要性あるいは、解釈可能にするために,言語･グラフ･式などで表現することの重要性である。

第三に、解釈にもとづいて、注目すべき特別な場合や、注目すべき（図形の）構成要素を発見することの重要性

である。

これらのことは、通常の数学的探究の中でも重要なことではあるが、特にテクノロジーを使った場合には、少ない時間・労力等の下で豊富なデータをえることができるため、観察結果を解釈し、次に注目したい場合を考え、再び観察し、さらに考察するというような、人（生徒）と環境（機器）の間のインターラクティブなやりとりを授業の中でも実現することができる点に大きな特徴があるといえるだろう。

個々の具体例に則してケーススタディをすることは、教材開発の基本となる。一方、表示桁数の設定や表示する測定値あるいは数式の工夫の仕方は、授業の流れをコントロールする要因になりうるので、GC/html5でのコンテンツ開発における変数の一つになることが明らかになった。

今回扱ったさまざまな事例に関して、それが具体的にどのような学習として成立したのか、そして「インターラクティブ」と呼ぶにふさわしいのかどうかは、実際の授業記録などを分析することが適切であろう。それらは今後の課題として残されている。

引用・参考文献

飯島康之(1991),「作図ツールの導入に伴う作図の新しい役割について」, 第24回数学教育論文発表会論文集, 275-280

飯島康之(2014a), iPadで作図ツールGC/html5を利用した実践－愛知教育大学附属名古屋中学校におけるグループ活動での利用を中心に－, コンピュータ＆エデュケーション, 2014,17-23

飯島康之(2014b), GCを用いた二つの角の関数関係を発見する授業の授業研究－2013年度の新城合宿での研究授業から－イプシロン, 56, 15-36

飯島康之(2015a), 作図ツールGC/html5の開発－HTML5 + JavaScriptによる教育用ソフト開発の可能性－, 科学教育研究, 39-2, 161-175

飯島康之(2015b), 作図ツールを用いた数学的探究における「暫定的な解決と問題の再設定」－インターラクティブな名用からの「思考力・判断力・表現力」に向けて－, 数学教育学論究, 臨時増刊, 97, 9-18

GC/html5(2010-), http://www.auemath.aichi-edu.ac.jp/teacher/iijima/gc_html5/

OECD(2005), The Definition and selection of key competencies Executive summary. http://www.oecd.org/pisa/35070367.pdf

清水克彦編(1999), コンピュータで支援する生徒の活動, 明治図書

［**謝辞**］

本研究の一部は科研基盤（A）24240101（代表者：銀島文）と科研基盤（C）26350192（代表者:飯島康之）の助成を受けて行った。

【連絡先　飯島　康之
yiijima@auecc.aichi-edu.ac.jp】

Error in measurement in the mathematical inquiry using dynamic geometry software GC/html5
— its influence to the interactive mathematical inquiry —

Yasuyuki IIJIMA
Department of Mathematics Education, Aichi University of Education

Abstract

OECD (2005) made the definition and selection of key competencies, in which competency category 1 is "using tool interactively" and competency 1-c is "the ability to use technology interactively". But we have not enough consensus about the meaning of "interactive" in the context of mathematical inquiry. In mathematics education, we have used dynamic geometry software(e.g. cabri, Geometer's SketchPad, Geometric Constructor and GeoGebra etc.), which is also called interactive geometry software because that they have interactive interface and that the mathematical inquiry using them is interactive. To clarify the meaning of "interactive", we focused on the mathematical inquiry using dynamic geometry software GC/html5, especially using the function of measurement.

The accuracy of the measurement in GC/html5 is 16 digits, but it show measurements rounded off with two decimal places. (we can change the decimal place for rounding.) So, we observe measurement with error by this rounding. And if we deform general figure to the special case to inquiry the functional relations in figure, there is some error in the measurement because the special case is not so accurate.

With these error in measurement, we find some problems. We think about the choices to overcome this problem, and decision making. We do something mathematically (change the decimal place for rounding, add some geometrical objects, represent data in table and graph to find some relation, try to proof the relation etc.) and observe the result with it. We think that this process is interactive and important for mathematics education. In this paper, some concrete examples are described.

Keywords

Dynamic geometry software, measurement, error, accuracy, interactive, mathematical inquiry