学籍番号		論文題目	モアレが起きてる模様です． —周期模様の干渉とレンズ効果の解明—
氏名	舟橋 亜季		

1　音のうなり

周波数のわずかに異なる 2 つの音が同時に鳴ると，うなりが生じる．たとえば 2 つの純音（周波数 : 400, 401Hz）を同時に鳴らすと

$$\sin(2\pi 400t) + \sin(2\pi 401t) \fallingdotseq 2\cos(\pi t)\sin(2\pi 400t)$$

と合成され，これは周波数が約 400Hz の純音が振幅を時間とともに $2|\cos(\pi t)|$ で変化する様子を表し，うなりは単位時間あたり $|401-400| = 1$ 回おこることになる．

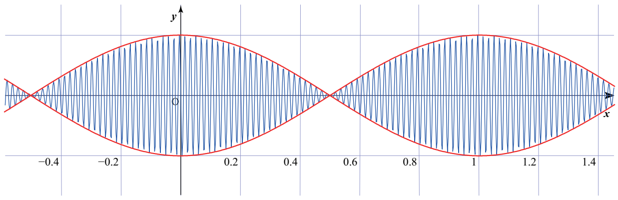

図 1　400Hz と 401Hz の sin 波の合成波とそのうなり成分．振幅の時間変動は 1 秒ごとに繰り返されている．

2　繰り返し模様からできるモアレ

周波数のひとしい平行縞と同心円群を重ね合わせる．平行縞を $z_1 = \sin(2\pi f x)$，同心円群を $z_2 = \sin(2\pi f r), r = \sqrt{x^2+y^2}$ と表せば，$y \ll x$ の範囲では合成波は

$$\frac{z_1+z_2}{2} \fallingdotseq \cos\left(2\pi f\left(\frac{y^2}{4x}\right)\right)\sin(2\pi f x)$$

と近似される．特に振幅 0 は $\dfrac{y^2}{4x} = \dfrac{1}{2f}\left(n+\dfrac{1}{2}\right), n \in \mathbf{Z}$ で起き，放物線 $y^2 = \dfrac{2}{f}\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x$ が現れる．

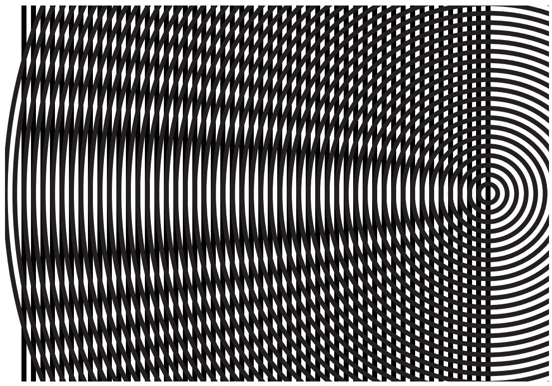

図 2　10cm に 50 本の縦縞模様 ($f = 5$[本/cm]) とそれと同一周波数をもつ同心円群によるモアレ．

3　モアレのレンズ効果-穴モアレ-

$R_\theta(x,y) = x\cos\theta - y\sin\theta$ として六方格子状の穴は sin 波の重ね合わせ $z_1 = \left(\sin\left(2\pi R_{\frac{\pi}{3}}(x,y)\right) + \sin\left(2\pi R_{-\frac{\pi}{3}}(x,y)\right)\right)/2$ で代用する．これを微小角 ϵ 回転すると近似的に $z_2 \fallingdotseq \left(\sin\left(2\pi R_{\frac{\pi}{3}}(x-\epsilon y, y+\epsilon x)\right) + \sin\left(2\pi R_{-\frac{\pi}{3}}(x-\epsilon y, y+\epsilon x)\right)\right)/2$ となる．x と y が同程度の大きさの範囲において z_1 と z_2 の重ね合わせは

$$z_1 + z_2 \fallingdotseq \cos\left(2\pi\cdot\frac{\epsilon}{2}R_{\frac{\pi}{3}}(y,-x)\right)\sin\left(2\pi R_{\frac{\pi}{3}}(x,y)\right) + \cos\left(2\pi\cdot\frac{\epsilon}{2}R_{-\frac{\pi}{3}}(y,-x)\right)\sin\left(2\pi R_{-\frac{\pi}{3}}(x,y)\right)$$

と近似でき，常に振幅が 0 となる (グレーの模様に相当) 位置は

$$R_{\frac{\pi}{3}}(y,-x) = \frac{1}{\epsilon}\left(n_1+\frac{1}{2}\right) \text{ かつ } R_{-\frac{\pi}{3}}(y,-x) = \frac{1}{\epsilon}\left(n_2+\frac{1}{2}\right), \quad n_1, n_2 \in \mathbf{Z}$$

である．これは例えば元の模様での濃淡のピーク $z_1 = \pm 1$ を与える座標を $\boxed{(x,y) \mapsto \left(-\frac{2}{\epsilon}y, \frac{2}{\epsilon}x\right)}$ と変換したものであり，もとの構造が $2/\epsilon$ 倍，$\pi/2$ 回転されたものとなる．また，z_1 に微小倍率 $1+\epsilon$ で相似変換した模様は

$$z_3 = \left(\sin\left(2\pi(1+\epsilon)R_{\frac{\pi}{3}}(x,y)\right) + \sin\left(2\pi(1+\epsilon)R_{-\frac{\pi}{3}}(x,y)\right)\right)/2$$

となる．z_1 と z_3 を重ね合わせると，$|\epsilon| \ll 1$ ならば

$$z_1 + z_3 \fallingdotseq \cos\left(2\pi\cdot\frac{\epsilon}{2}R_{\frac{\pi}{3}}(x,y)\right)\sin\left(2\pi R_{\frac{\pi}{3}}(x,y)\right) + \cos\left(2\pi\cdot\frac{\epsilon}{2}R_{-\frac{\pi}{3}}(x,y)\right)\sin\left(2\pi R_{-\frac{\pi}{3}}(x,y)\right)$$

と近似でき，再び振幅が 0 となる位置は

$$R_{\frac{\pi}{3}}(x,y) = \frac{1}{\epsilon}\left(n_1+\frac{1}{2}\right) \text{ かつ } R_{-\frac{\pi}{3}}(x,y) = \frac{1}{\epsilon}\left(n_2+\frac{1}{2}\right), \quad n_1, n_2 \in \mathbf{Z}$$

である．これは濃淡のピーク $z_1 = \pm 1$ を与える座標を $2/\epsilon$ 倍したもの，したがって元の模様を $2/\epsilon$ 倍したものとわかる．

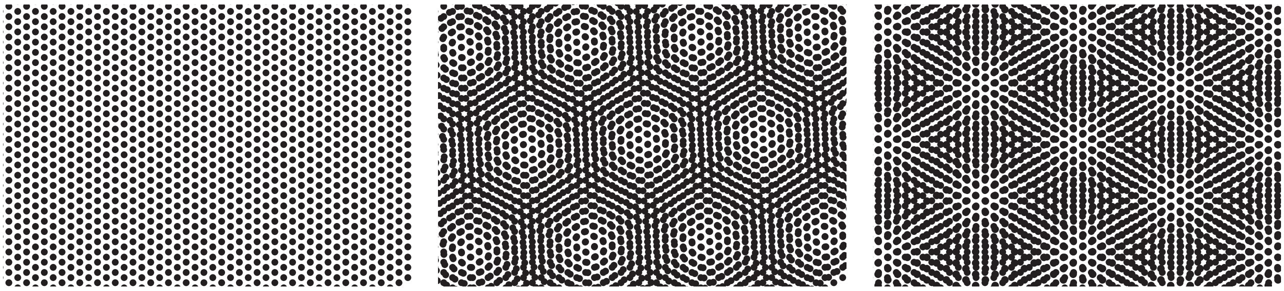

図 3　パンチングメタルによるモアレ．元になった六方格子状に穴の開いた金属板（左）を二枚用意し，これらを重ね合わせて $\pi/45$ 回転させる（中），あるいは一枚を手前に動かすことでピッチが 10% 拡大されたものを重ねる（右）

4　モアレレンズ-フーリエ級数による解明-

$\mathbf{R}^2$ の整数格子上に同じ文字を並べてできる模様を x, y 両方向について区分的に連続で周期 1 をもつ周期関数 $f(x,y)$ で表し，フーリエ級数 $f(x,y) = \sum_{p,q\in\mathbf{Z}} f_{p,q} \exp(2\pi i(px+qy))$ に展開できるとする．その模様の上に太さ $0 < a < 1/2$ をもつ格子 $L_a = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x-m| < a$ または $|y-n| < a$ となる $m, n \in \mathbf{Z}$ が存在する $\}$ を被せる．人間の目は煩雑な微細構造を「平均化」して受け取る一方で，脳が大まかな構造を「補完」しようとする両方の働きによって起こる一種の「錯視」を起こす．この仕組みがモアレの拡大レンズ効果をもたらす．

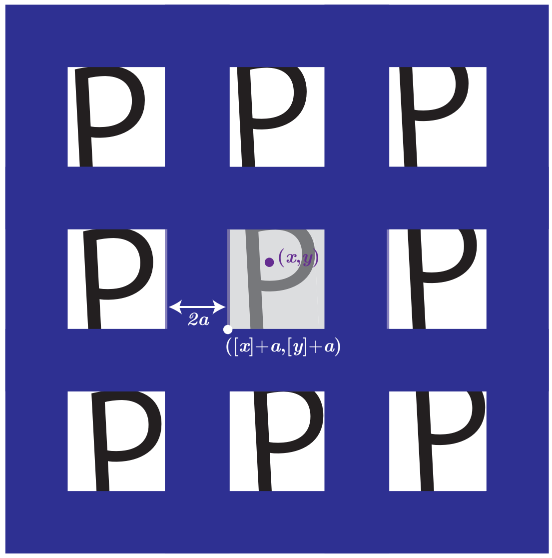

図 4　格子 L_a による平均化．周期模様を格子 La で覆い，残った各窓ごとに濃淡の平均化を行う．

定義 4.1（格子 L_a による平均化）　格子 L_a に対し周期模様 $f(x,y)$ の L_a に関する平均化を

$$L_a(f)(x,y) = \int_{[x]+a}^{[x]+1-a} \int_{[y]+a}^{[y]+1-a} f(x,y)\,dydx$$

と定義する．ただし $[a]$ は a を超えない最大の整数を表す．

定理 4.2　$|\epsilon| \ll a$ として $f(x,y)$ を微小角 ϵ による回転をした $g(x,y) = f(x-\epsilon y, y+\epsilon x)$ および，微小倍率 $1+\epsilon$ で相似変換した $h(x,y) = f((1+\epsilon)x, (1+\epsilon)y)$ の L_a による平均化は

$$L_a(g)(x,y) = \sum_{p,q\in\mathbf{Z}} C_{p,q} \exp 2\pi i\epsilon\,(q([x]+a) - p([y]+a))$$
$$L_a(h)(x,y) = \sum_{p,q\in\mathbf{Z}} D_{p,q} \exp 2\pi i\epsilon\,(p([x]+a) + q([y]+a))$$

となる．ただし，$|C_{p,q}| \le \left|\frac{f_{p,q}}{\pi^2(p+\epsilon q)(q-\epsilon p)}\right|, |D_{p,q}| \le \left|\frac{f_{p,q}}{\pi^2(1+\epsilon)^2 pq}\right|$ を満たす定数である．

したがって微小角 ϵ 回転した周期模様に格子 L_a を被せると元の模様をほぼ $\pi/2$ 回転し $1/\epsilon$ 倍した模様が現れ，また微小倍 $1+\epsilon$ で相似変換した周期模様に格子 L_a を被せると元の模様を $1/\epsilon$ 倍した模様が現れる．

参考文献

[1] 金子 隆芳, 色の科学-その心理と生理と物理-, 朝倉書店, 1995.

[2] 清水 宣芳, うなりとフーリエ級数, 2007 年度卒業論文, 愛知教育大学教育学部, 2008.

[3] 杉原 厚吉, エッシャー・マジック-だまし絵の世界を数理で読み解く-, 東京大学出版会, 2011.

[4] 西山 豊, サイエンスの香り-生活の中の数理-, 日本評論社, 1991.