| | | | |
|---|---|---|---|
| 氏名 | 下村　昂平 | 論文題目 | 4 次元の微分幾何 |

# 1　はじめに

私は 3 次元空間の問題が苦手だった. しかし, $z$ 座標という文字が 1 つ増えただけと思えば, 2 次元平面と同じように考えることができる, ということに気付いてからは 3 次元空間の問題が最も得意な分野になった.

そこで今回私は, 図などでは到底考えることができない 4 次元の世界についても, 座標の文字を 1 つ増やせば考えることができるのではないかと思い, 3 年前期に学んだ幾何学概論の内容を 4 次元の世界に拡張した場合に, 3 次元と同じように考えることができるのか, 何か変わることがあるのか, ということについて本論文で考察した.

# 2　4 次元空間内の曲線

**定義 2.1** (曲線)
空間 $\mathbb{R}^4$ 内の曲線 $\boldsymbol{p}(t)$ とは, ${}^\forall t \in I = [a,b]$ に対して, $\mathbb{R}^4$ の点

$$\boldsymbol{p}(t) = (x(t), y(t), z(t), w(t))$$

が定まるものであり, $\boldsymbol{p}(t)$ が $t$ について何回でも微分可能であるときをいう.

**定義 2.2** (弧長パラメーター)
曲線 $\boldsymbol{p}(t) = (x(t), y(t), z(t), w(t))(t \in I)$ に対して, $t$ が $\boldsymbol{p}(t)$ の**弧長パラメーター**であるとは, ${}^\forall t \in I$ について

$$\left|\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}(t)\right| = 1$$

を満たすものをいう. 弧長パラメーターは普通 $s$ と書く.

**定義 2.3** (曲率)
曲線 $\boldsymbol{p}(s)$ の**曲率**を

$$\kappa(s) := \left|\frac{d^2\boldsymbol{p}}{ds^2}(s)\right|$$

と定義する.

**定理 2.4** (3 次元空間内の曲線に対するフレネ-セレの公式)
$\boldsymbol{e}_1 = \dfrac{d\boldsymbol{p}}{ds},\ \boldsymbol{e}_2 = \dfrac{\dfrac{d^2\boldsymbol{p}}{ds^2}}{\left|\dfrac{d^2\boldsymbol{p}}{ds^2}\right|},\ \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2$ とおく. このとき, 次が成り立つ.

$$\begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{e}_1}{ds} &= 0\cdot\boldsymbol{e}_1 + \kappa\boldsymbol{e}_2 + 0\cdot\boldsymbol{e}_3 \\ \dfrac{d\boldsymbol{e}_2}{ds} &= -\kappa\boldsymbol{e}_1 + 0\cdot\boldsymbol{e}_2 + \tau\boldsymbol{e}_3 \\ \dfrac{d\boldsymbol{e}_3}{ds} &= 0\cdot\boldsymbol{e}_1 - \tau\boldsymbol{e}_2 + 0\cdot\boldsymbol{e}_3 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{d}{ds}\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{e}_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \kappa & 0\\ -\kappa & 0 & \tau\\ 0 & -\tau & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{e}_3\end{pmatrix}$$

**定理 2.5** (4 次元空間内の曲線に対するフレネ-セレの公式)
$\boldsymbol{e}_1 = \dfrac{d\boldsymbol{p}}{ds},\ \kappa_1 = |\boldsymbol{e}_1'|,\ \boldsymbol{e}_2 = \dfrac{\boldsymbol{e}_1'}{\kappa_1},\ \kappa_2 = |\boldsymbol{e}_2' + \kappa_1\boldsymbol{e}_1|,\ \boldsymbol{e}_3 = \dfrac{\boldsymbol{e}_2' + \kappa_1\boldsymbol{e}_1}{\kappa_2},$
$\boldsymbol{e}_4 : \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ すべてと直交する単位ベクトル　とする. このとき以下の式が成り立つ.

$$\begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{e}_1}{ds} &= 0\cdot\boldsymbol{e}_1 + \kappa_1\boldsymbol{e}_2 + 0\cdot\boldsymbol{e}_3 + 0\cdot\boldsymbol{e}_4 \\ \dfrac{d\boldsymbol{e}_2}{ds} &= -\kappa_1\boldsymbol{e}_1 + 0\cdot\boldsymbol{e}_2 + \kappa_2\boldsymbol{e}_3 + 0\cdot\boldsymbol{e}_4 \\ \dfrac{d\boldsymbol{e}_3}{ds} &= 0\cdot\boldsymbol{e}_1 - \kappa_2\boldsymbol{e}_2 + 0\cdot\boldsymbol{e}_3 + \kappa_3\boldsymbol{e}_4 \\ \dfrac{d\boldsymbol{e}_4}{ds} &= 0\cdot\boldsymbol{e}_1 + 0\cdot\boldsymbol{e}_2 - \kappa_3\boldsymbol{e}_3 + 0\cdot\boldsymbol{e}_4 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{d}{ds}\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{e}_3\\ \boldsymbol{e}_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \kappa_1 & 0 & 0\\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 & 0\\ 0 & -\kappa_2 & 0 & \kappa_3\\ 0 & 0 & -\kappa_3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{e}_3\\ \boldsymbol{e}_4\end{pmatrix}$$

また, $\kappa_i (i = 1, 2, 3)$ を第 $i$ 曲率という.

**命題 2.6** (一般のパラメーターでの曲率の公式)
$\dfrac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{a}$, $\dfrac{d^2\boldsymbol{p}}{dt^2} = \boldsymbol{b}$, $\dfrac{d^3\boldsymbol{p}}{dt^3} = \boldsymbol{c}$ とする. このとき, 以下の式が成り立つ.

$$\kappa_1 = \frac{\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2 |\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}}{|\boldsymbol{a}|^3}$$

$$\kappa_2 = \frac{\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2 |\boldsymbol{b}|^2 |\boldsymbol{c}|^2 - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2 |\boldsymbol{c}|^2 - (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})^2 |\boldsymbol{a}|^2 - (\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})^2 |\boldsymbol{b}|^2 + 2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})}}{|\boldsymbol{a}|^2 |\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}$$

# 3　4 次元空間内の 3 次元多様体

**定義 3.1** (3 次元多様体)
$x, y, z, w$ 座標を表す 3 変数関数

$$x(u_1, u_2, u_3),\ y(u_1, u_2, u_3),\ z(u_1, u_2, u_3),\ w(u_1, u_2, u_3)$$

によるベクトル値関数

$$\boldsymbol{p}(u_1, u_2, u_3) = (x(u_1, u_2, u_3), y(u_1, u_2, u_3), z(u_1, u_2, u_3), w(u_1, u_2, u_3))$$

の像を 4 次元空間内の 3 **次元多様体**と呼ぶ. 但し, ${}^\forall(u_1, u_2, u_3)$ に対して

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u_1},\ \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u_2},\ \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u_3} \quad \text{は一次独立である}$$

という条件を要請しておく.

**定義 3.2** (第 1 基本量)
3 次元多様体 $\boldsymbol{p}(u_1, u_2, u_3)$ の**第 1 基本量**とは次式で定義される 9 つの関数のことをいう.

$$g_{ij}(u_1, u_2, u_3) := \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u_j} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

**定義 3.3** (第 2 基本量)
$\boldsymbol{p}(u_1, u_2, u_3)$ に対し, $\boldsymbol{e}(u_1, u_2, u_3)$ を $\dfrac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u_1}, \dfrac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u_2}, \dfrac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u_3}$ と垂直な単位ベクトルとし, これを $\boldsymbol{p}(u_1, u_2, u_3)$ の**単位法ベクトル**という.
このとき, $\boldsymbol{p}(u_1, u_2, u_3)$ の**第 2 基本量**とは, 次式で定義される 9 つの関数のことをいう.

$$h_{ij} := \frac{\partial^2 \boldsymbol{p}}{\partial u_i \partial u_j} \cdot \boldsymbol{e}(u_1, u_2, u_3) \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

**定義 3.4** (測地線)
多様体 $\boldsymbol{p}(u_1, u_2, u_3)$ 上の曲線 $\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{p}\,(u_1(t), u_2(t), u_3(t))$ が**測地線**であるとは, 次の 2 式が成り立つときをいう.

$$\left|\frac{d\boldsymbol{q}}{dt}\right| = \text{一定}$$

$$\frac{d^2\boldsymbol{q}}{dt^2} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u_i}\,(u_1(t), u_2(t), u_3(t)) = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

# 参考文献


[1]　中内 伸光, じっくり学ぶ曲線と曲面—微分幾何学初歩—, 共立出版, 2005.

[2]　山田光太郎, 幾何学概論講義資料 5,
http://www.ocw.titech.ac.jp/index.php?module=General&action=DownLoad&file=201325006-95-0-16.pdf&type=cal&JWC=201325006, 2011.

[3]　渡辺 敬一・松浦 豊・泊 昌孝, 具体例から始める線型代数, 日本評論社, 2007.