学籍番号		論文題目	スキューブ三兄弟 —立体パズルの群構造—
氏名	山下 樹悦朗		

1　スキューブの群構造

スキューブには 8 つのコーナーパーツ（三面体と呼ぶ）と 6 つのセンターパーツ（一面体と呼ぶ）がある．これらのパーツに番号付けを図 1 のように行う．また，パーツの捻れはこのシールの向きの変化で判断する．スキューブを分解してみると図 2 のように 4 つの三面体が正四面体の頂点を成している．そのため正四面体を構成している三面体は移り変われないことがわかる．そこで，8 つの三面体の内，正四面体を構成している方の 4 つを不動 (fixed) 三面体と呼び，そうでない方の 4 つを可動 (move) 三面体と呼ぶ．構造的に可動三面体と不動三面体では移り変わり得ない．

スキューブの単位操作は三面体を中心にその三面体と接する 3 つの一面体を置換し，3 つの一面体の内の 2 つと接する 3 つの三面体を置換し，その向きを変えるものである．この操作を観察してみると中心となった三面体の位置が変わっていないことが分かる．スキューブには不動三面体と可動三面体があった．そこで単位操作を不動三面体を中心として回す操作とし，操作の名前を回転の中心となった三面体の番号で呼ぶことにする．例えば三面体の 2 番を中心に時計回りに回す操作は「2」と表記する．すると単位操作は一面体の置換 $\alpha \in S_6$，可動三面体の置換 $\beta \in S_4$ と向き $\boldsymbol{y}_m \in C_3^4$，不動三面体の向き $\boldsymbol{y}_f \in C_3^4$ で表される．

分解して組み立て直す（ただし，不動三面体の位置は変えない）ことを許すスキューブ群 G を考える．集合 $G = S_6 \times S_4 \times C_3^4 \times C_3^4$ の演算を $p = (\alpha, \beta, \boldsymbol{y}_m, \boldsymbol{y}_f)$，$q = (\alpha', \beta', \boldsymbol{y}'_m, \boldsymbol{y}'_f) \in G$ に対し，

$$p \cdot q = (\alpha \cdot \alpha', \beta \cdot \beta', \beta^*(\boldsymbol{y}'_m) + \boldsymbol{y}_m, \boldsymbol{y}_f + \boldsymbol{y}'_f)$$

で定義すると G は群になる．ここで S_4 の C_3^4 への作用 $\beta^*(\boldsymbol{y})$ は

$$\beta^*(\boldsymbol{y}) = (y_{\beta^{-1}(1)}, \dots, y_{\beta^{-1}(n)}) \tag{1}$$

で与えると，半直積構造が G に入り，$G = S_6 \times (S_4 \ltimes C_3^4) \times C_3^4$ となる．

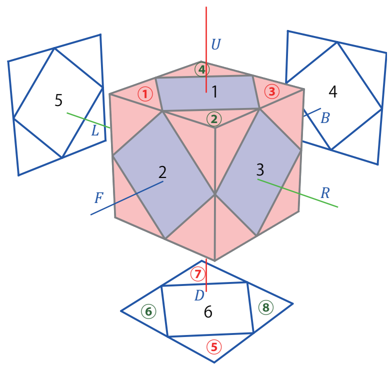

図 1: スキューブの番号付けと向き付け

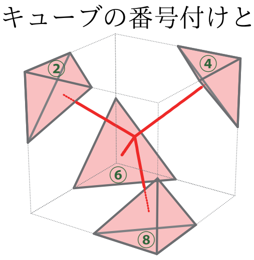

図 2: 不動三面体

$$2 = ((1\ 3\ 2), (1\ 3\ 5), (2, 2, 2, 0), (1, 0, 0, 0))$$
$$4 = ((1\ 5\ 4), (1\ 7\ 3), (2, 2, 0, 2), (0, 1, 0, 0))$$
$$6 = ((2\ 6\ 5), (1\ 5\ 7), (2, 0, 2, 2), (0, 0, 1, 0))$$
$$8 = ((3\ 4\ 6), (3\ 7\ 5), (0, 2, 2, 2), (0, 0, 0, 1))$$

補題 1. $n \geq 3$ のとき，交代群 A_n は $(1\ 2\ 3), (1\ 2\ 4), \dots, (1\ 2\ n)$ で生成される．

（分解を許さない通常の）スキューブ群を G_0 とすれば，定義から $G_0 \subset G$ となる．全ての単位操作は一面体および可動三面体に関して三項巡換のため，補題 1 から $(\alpha, \beta, \boldsymbol{y}_m, \boldsymbol{y}_f) \in G_0$ の置換 α, β はどちらも偶置換となる．したがって G_0 は $S_6 \times (A_4 \ltimes C_3^4) \times C_3^4$ の部分群となる．また，各単位操作は各々ある一つの不動三面体を中心に時計回りに 120° 回転するため，1 単位操作当たり不動三面体の向き $\boldsymbol{y}_f$ は 4 成分のうちいずれか 1 成分のみが 1 増加する．そこで単位操作の組み合わせで表される β による不動三面体の向きの変化の総計を $\rho(\beta)$ と表すと，ρ は全射準同型 $\rho : A_4 \to C_3$ となり，その核はクラインの四元群 $\ker \rho \cong \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ に等しい．

補題 2. C_3^4 の部分集合

$$E = \{(y_1, y_2, y_3, y_4) \in C_3^4 \mid y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \equiv 0 \pmod 3\}$$

は $(1, 2, 0, 0), (0, 1, 2, 0), (0, 0, 1, 2)$ で生成される部分群であり，C_3^3 に同型である．

定理 1.1. スキューブ群 G_0 は次の準同型 φ の核 $G_0 = \ker \varphi$ である．

$$\varphi : S_6 \times (A_4 \ltimes C_3^4) \times C_3^4 \ni (\alpha, \beta, \boldsymbol{y}_m, \boldsymbol{y}_f) \mapsto (\operatorname{sgn}(\alpha), \sum_{v \in V_m} y_m(v), \sum_{v \in V_f} y_f(v) - \rho(\beta)) \in \{1, -1\} \times C_3 \times C_3$$

その結果，$G_0 \cong A_6 \times (A_4 \ltimes C_3^3) \times C_3^3$ となり，その位数は $|G_0| = \frac{1}{2}6! \times \frac{1}{2}4! \times 3^3 \times 3^3 = 3,149,280$ である．

Proof. （概略）単位操作が$\ker\rho$に含まれることは容易に確認できるので$G_0 \subset \ker\rho$である．逆に$p = (\alpha, \beta, \boldsymbol{y}_m, \boldsymbol{y}_f) \in \ker\rho$を単位操作の組み合わせで表わそう．基本操作が$A_4$を生成することから可動三面体の置換$\beta \in A_4$は基本操作で表され，$p$に操作$\beta^{-1}$を施せば

$$p \to p' = (\alpha', e, \boldsymbol{y}'_m, \boldsymbol{y}'_f)$$

に変形できる．また，補題 2 の生成元が構成できる可動三面体のみ，不動三面体のみの向きを変える手順がそれぞれ実際に見つかるので，p'に操作を行うと

$$p' \to p'' = (\alpha'', e, \mathbf{0}, \boldsymbol{y}''_f) \to p''' = (\alpha''', e, \mathbf{0}, \mathbf{0})$$

まで変形できる．さらに一面体のみ置換する操作も基本操作から構成でき，それらはA_6を生成することが補題 1 から分かるので，$p''' \in G_0$となる．したがって$\ker\rho \subset G_0$が得られ，主張が示された． □

2 デカミンクス（スキューブアルティメット）群

定理 2.1. デカミンクス群Decは

$$(A_6 \ltimes C_2^5) \times (A_4 \ltimes C_3^3) \times C_3^3$$

に同型であり，その位数は

$$|G_0| = \frac{6!}{2} \times 2^5 \times \frac{4!}{2} \times 3^3 \times 3^3 = 100,776,960$$

である．

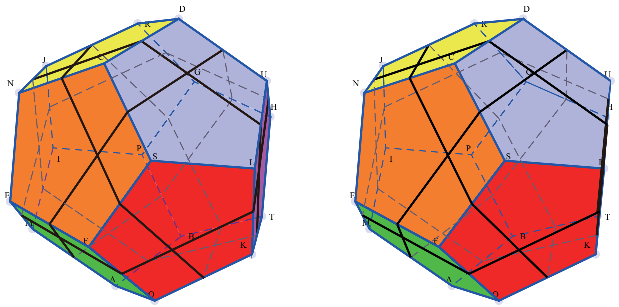

図 3: デカミンクス．図は 3D 視できるように描かれている．

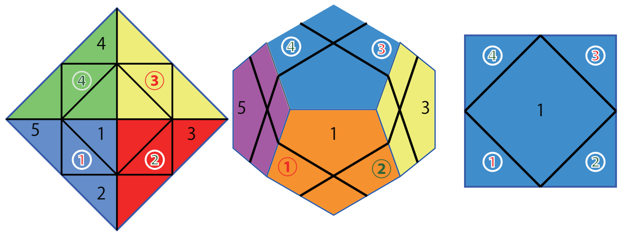

図 4: スキューブ三兄弟（右からスキューブ，デカミンクス，スキューブダイアモンド）

Proof. 図 4 を見ると分かるように，デカミンクスはスキューブの一面体を二面体（実際は四面あるが，向きとしては二面であるため二面体と呼ぶことにする）にしただけである．そのため，デカミンクス群は二面体の向き以外はスキューブと同じである．よって

$$Dec = D_0 \times (A_4 \ltimes C_3^3) \times C_3^3$$

と表される．ただしD_0は二面体に関する群とする．二面体を外して戻す際に向きを自由に変えて元の位置に戻すという操作を許した二面体に関する群をDとすると，Dは集合として$D = A_6 \times C_2^6$と表される．さらに集合Dの演算を$p = (\alpha, \boldsymbol{x})$，$q = (\alpha', \boldsymbol{x}') \in D$に対し$p \cdot q = (\alpha \cdot \alpha', \alpha^*(\boldsymbol{x}') + \boldsymbol{x})$で定義する．ただし$A_6$の$C_2^6$への作用は (1) である．したがって$D = A_6 \ltimes C_2^6$と表される．

次に準同型

$$\psi : D \ni (\alpha, \boldsymbol{x}) \mapsto (\mathrm{sgn}(\alpha), \sum_{c \in C} x(c)) \in \{1, -1\} \times C_2$$

を考える．スキューブ群での一面体のみの置換操作を援用し，また$C' = \{\boldsymbol{x} \in C_2^6 \mid x_1 + \cdots + x_6 \equiv 0 \pmod 2\} \cong C_2^5$，および一面体のみの置換が$C'$を生成することから，スキューブで行った手法を真似れば$D_0 = \ker\psi$が得られる．すなわち$D_0 \cong A_6 \ltimes C_2^5$となり，定理が示された． □

3 スキューブダイアモンド群

図 4 からスキューブダイアモンドはスキューブの一面体が四面体になり，三面体が一面体になったものであることが分かるので，次は容易に分かる．

定理 3.1. スキューブダイアモンド群SDは$(A_6 \ltimes C_2^5) \times A_4$に同型であり，その位数は$|SD| = \frac{1}{2}6! \times 2^5 \times \frac{1}{2}4! = 495,360$である．

参考文献

[1] 川辺 治之, David Joyner 群論の味わい 置換群で解き明かすルービックキューブと 15 パズル共立出版株式会社, 2010

[2] Jurgen Voigt The Skewb Group, `http://www.math.tu-dresden.de/~voigt/vopubl/vopu_n/skewb-04.pdf`

[3] 飯高 茂, 群論, これはおもしろい ―トランプで学ぶ群― (数学のかんどころ 16), 共立出版, 2013.