学籍番号		論文題目	フィボナッチ数の判定式とその一般化について
氏名	松浦友助		

よく知られている数列にフィボナッチ数列がある．フィボナッチ数列 F_n とは, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ $(F_1 = 1, F_2 = 1)$ という式を満たす数列である．非常にシンプルな形の数列であるが, フィボナッチ数には様々な性質が含まれていて, 非常におもしろく感じた．大学でフィボナッチ数列について学んでいく中で, フィボナッチ・テストというものに出会った．フィボナッチ・テストは, 次のようなものである．

定理 1. $5n^2+4$ または $5n^2-4$ が完全平方数ならば, n はフィボナッチ数である．

今回の発表では, このフィボナッチ・テストの証明の概略と, 新たに得られたフィボナッチ・テストの一般化について紹介する．

フィボナッチ数列の一般項は, 次のビネーの公式で与えられる．

定理 2 (ビネーの公式)**.** $\phi = (1+\sqrt{5})/2$ とすると, 次が成り立つ．

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\phi^n - \left(-\frac{1}{\phi}\right)^n\right).$$

$K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ を 2 次体で, $d \in \mathbb{Z}$ は平方因子を持たないとする．フィボナッチ・テストの証明では, $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ の整数の環の単数を利用する．ここで, 単数は次の定義で与えられる．

定義 1. A を整域とする．A の元 ε が A において乗法に関して可逆のとき, すなわち $\varepsilon\eta = 1$ となる $\eta \in A$ が存在するとき ε を A の**単数**という．

フィボナッチ・テストの証明を行うために, まず $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ の整数の環 A は $(u+v\sqrt{5})/2$ $(u, v \in \mathbb{Z}, u \equiv v \pmod 2)$ の形の元で構成されることを示す必要がある．このことは次の定理からわかる．

定理 3. $d \equiv 1 \pmod 4$ ならば, K の整数の環 A は $(u+v\sqrt{d})/2$ $(u, v \in \mathbb{Z}, u \equiv v \pmod 2)$ の形の元で構成される．また, $d \equiv 2$ または $d \equiv 3 \pmod 4$ ならば, K の整数の環 A は $a + b\sqrt{d}$ $(a, b \in \mathbb{Z})$ の形の元で構成される．

定義 2. $\xi = r + s\sqrt{m}$ の**ノルム** $N(\xi)$ は次で定義される．

$$N(\xi) = \xi\bar{\xi} = (r+s\sqrt{m})(r-s\sqrt{m}) = r^2 - ms^2.$$

2 次体 K の整数の環の元 ε が単数であるとき, $N(\varepsilon) = \pm 1$ である．このことを用いて, フィボナッチ・テストの証明に必要な, $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ の整数の環 A の単数の形に関する次の定理を証明することができる．

定理 4. $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ の単数は $\pm\omega^{\pm n}$ で表される数のみである．ここで $\omega = (1+\sqrt{5})/2$.

定理 1. の証明. $5n^2 \pm 4 = m^2$ とすると, $m^2 - 5n^2 = \pm 4$ となるので,

$$\frac{m+\sqrt{5}n}{2} \cdot \frac{m-\sqrt{5}n}{2} = \pm 1$$

となる. また m と n は同じ偶奇性を持ち, 定理 3 より

$$\frac{m+\sqrt{5}n}{2}, \frac{m-\sqrt{5}n}{2}$$

は $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ の整数である. $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ の単数は定理 4 より $\pm x^{\pm r} \quad (x = (1+\sqrt{5})/2)$ の形で表される. このとき,

$$\frac{m+\sqrt{5}n}{2} = x^r = \frac{1}{2}\left[(x^r + y^r) + \frac{x^r - y^r}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5}\right] \quad \left(y = -\frac{1}{x}\right)$$

と表せる. ここで, $x^r + y^r = L_r$, $(x^r - y^r)/\sqrt{5} = F_r$ なので,

$$\frac{1}{2}(m + \sqrt{5}n) = \frac{1}{2}(L_r + \sqrt{5}F_r)$$

となる. よって $n = F_r$ となる. □

フィボナッチ・テストを次の様に一般化することに成功した.

定理 5. $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ ($d \equiv 2$ または $d \equiv 3 \pmod 4$) の単数が $\pm\omega^{\pm r}$ ($\omega = a + b\sqrt{d}$) で表される数であるとき, $n^2/b^2d + 1/b^2d$ または $n^2/b^2d - 1/b^2d$ が完全平方数ならば, n は $F^{(d)}_{n+2} = 2aF^{(d)}_{n+1} - (a^2 - b^2d)F^{(d)}_n$ ($F^{(d)}_1 = 1, F^{(d)}_2 = a$) の項である.

定理 6. $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ ($d \equiv 1 \pmod 4$) の単数が $\pm\varepsilon^{\pm r}$ ($\varepsilon = (a + b\sqrt{d})/2$) で表される数であるとき, $b^2dn^2 + 4$ または $b^2dn^2 - 4$ が完全平方数ならば, n は $F^{(d)}_{n+2} = aF^{(d)}_{n+1} - (a^2 - b^2d)F^{(d)}_n/4$ ($F^{(d)}_1 = 1, F^{(d)}_2 = a$) の項である.

参考文献

[1] アルフレッド・S・ポザマンティエ, イングマル・レーマン著, 松浦俊輔訳, 不思議な数列フィボナッチの秘密, 日経 BP 社, 2010.

[2] P. サミュエル著, 織田進訳, 数の代数的理論, 丸善出版, 2012.

[3] G.H. ハーディ, E.M. ライト著, 示野信一, 矢神毅訳, 数論入門 1, シュプリンガー・フェアラーク東京, 2001.

[4] 雪江明彦, 代数学 2 環と体とガロア理論, 日本評論社, 2010.

[5] Daniel Duverney 著, 塩川宇賢訳, 数論—講義と演習—, 森北出版株式会社, 2006.