学籍番号		論文題目	夢の国での少し現実的な話 —最短経路問題, 最小費用流問題, 輸送問題—
氏名	早川 幸希		

1　グラフとフロー

定義 1 有限集合である**頂点** V, **辺** E に対して $G=(V,E)$ を**グラフ**という．頂点の部分集合 $S \subset V$ に対し，$N_S = \{v \in V \backslash S \mid (u,v) \in E, u \in S\}$ を S の**隣接点集合**と呼ぶ．すべての点 $v \in V$ について，$(v,s) \notin E, (t,v) \notin E$ となる点 $s,t \in V$ をそれぞれ**始点**，**終点**と呼ぶ．ここでは**始点終点付き有向グラフ** $G=(V,E,\delta,s,t)$ を用いる．ただし，各辺 $(i,j) \in E$ には長さ $\delta(i,j) \geq 0$ が与えられているとする．

定義 2 関数 $a : E \to \mathbf{R}_+ := \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 0\}$ が与えられた有向グラフ G に対して，関数 $f : E \to \mathbf{R}_+$ がすべての $e \in E$ で $f(e) \leq a(e)$ を満たすとき，f を**フロー**，a を**容量**と呼ぶ．さらに各点 v で $ex_f(v) := \sum_{e\in\zeta^-(v)} f(e) - \sum_{e\in\zeta^+(v)} f(e)$ とする．$ex_f(v)=0$ ならば，f は v で**フロー保存則**を満たすという．ただし，$\zeta^-(v)$ は点 v に入ってくる点の集合，$\zeta^+(v)$ は点 v から出ていく点の集合とする．与えられたグラフに対して，$ex_f(s) < 0$ かつすべての $v \in V \backslash \{s,t\}$ で $ex_f(v)=0$ であるフローを s-t-**フロー**といい，$value(f) := -ex_f(s) = ex_f(t)$ を s-t-フローの**流量**という．

2　最短経路探索

グラフ $G=(V,E,\delta,s,t)$ において，s から t に至る最短経路を探す問題を**最短経路問題**という．問題を解決する方法の 1 つとして Dijkstra 法を用いる．はじめに $V_0=\{s\}$ とし，各 $v \in V \backslash V_0$ に対し，ラベル $L_0(v) = (*,\infty) \in (V \cup \{*\}) \times (\mathbf{R}_+ \cup \{\infty\})$ を与える．1 ステップ目では，$v \in N_{\{s\}}$ に対して，$L_1(v) = (P_1(v), d_1(v)) = (s, \delta(s,v))$ と定め，$d_1(v) = \min\{d_1(u) \mid u \in N_{V_0}\}$ となる $v \in N_{V_0}$ をとり，それを v_1 とし，$V_1 = V_0 \cup \{v_1\}$ とする．走査が $n-1>0$ ステップまで行われたものとすると，走査済み点集合 $V_{n-1} \subset V$，$n-1$ ステップ目で s からの最短路が決まった点 v_{n-1}，各 $v \in V$ に対し，ラベル $L_{n-1}(v) = (P_{n-1}(v), d_{n-1}(v))$ が与えられている．n ステップ目において $v \in V$ に対して，

$$L_n(v) = \begin{cases} (v_{n-1}, d_{n-1}(v_{n-1}) + \delta(v_{n-1}, v)), \\ \quad d_{n-1}(v_{n-1}) + \delta(v_{n-1},v) < d_{n-1}(v) \text{ かつ } v \in N_{\{v_{n-1}\}} \setminus V_{n-1} \text{ のとき}, \\ L_{n-1}(v), \text{その他} \end{cases}$$

と定める．$d_n(v) = \min\{d_n(u) \mid u \in N_{V_{n-1}}\}$ となる $v \in N_{V_{n-1}}$ を 1 つとり，それを v_n とし，$V_n = V_{n-1} \cup \{v_n\}$ とする．以上の走査を，$V_n = V$ となるまで繰り返し行う．

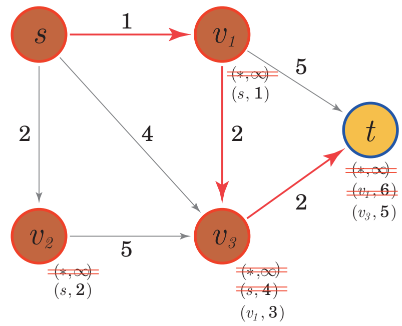

図 1: Dijkstra 法の結果．各頂点からラベルに従ってさかのぼればその頂点までの最短経路が求められる．

3　最小費用流問題

ネットワーク $N=(G,a,c,s,t)$ に対し，フロー保存則を満たす中で，費用 $c(f) := \sum_{e\in E} f(e)c(e)$ が最小になる s-t-フローを求める問題を**最小費用流問題**という．

定義 3 ネットワーク $N=(G,a,c,s,t)$ にフロー f が流れているとする．枝 E_f，および各 $e \in E_f$ に対し容量 $a_f(e)$，コスト $c_f(e)$ を記号 $E_f^+ = \{e \mid e \in E, f(e) < a(e)\}, E_f^- = \{e \mid \overline{e} \in E, f(\overline{e}) > 0\}$ を用いて

$$E_f = E_f^+ \cup E_f^-, \quad a_f(e) = \begin{cases} a(e) - f(e), & e \in E_f^+ \text{のとき}, \\ f(e), & e \in E_f^- \text{のとき}, \end{cases} \qquad c_f(e) = \begin{cases} c(e), & e \in E_f^+ \text{のとき}, \\ -c(e), & e \in E_f^- \text{のとき}, \end{cases}$$

と定める．ただし辺 e の向きを変えた辺を $(\overline{e})$ と表した．ネットワーク $N_f = (G, a_f, c_f, s, t)$ を**残余ネットワーク**という．

最小費用流問題を解く方法として，Primal Dual 法がある．初期フロー $f_0 \equiv 0$ からはじめて以下のアルゴリズムに従ってフロー f_n を決定していく．残余ネットワーク N_{f_n} において，コスト c に関する始点 s から終点 t までの最短経路を探し，その経路を P とする．$\tilde{f}_{n+1} = \min\{a(e)(e \in E(P)), W - value(f_n)\}$ を求め，経路 P に $\tilde{f}_{n+1}$ 流す．フロー

$$f_{n+1}(e) = \begin{cases} f_n(e) + \tilde{f}_{n+1}, & e \in E(P) \text{のとき}, \\ f_n(e), & \text{その他} \end{cases}$$

に対し，残余ネットワーク $N_{f_{n+1}}$ を新たに作り，$W > value(f_{n+1})$ ならはじめに戻り，$W = value(f_{n+1})$ なら終了する．

4 輸送問題

定義 4 有向グラフ G と発送地の集合 $S \subset V(G)$ と目的地の集合 $T \subset V(G)$ があり，$u \in S$ からの各供給量 a_u，$v \in T$ の各需要量 b_v 及び発送地 $u \in S$ から目的地 $v \in T$ への輸送コスト $c(u,v)$ と輸送できる量 $a(u,v)$ がわかっているネットワーク $N = (G, a, c, S, T)$ を考える．このとき S から T への総輸送コスト $c(f) := \sum_{e \in E} f(e)c(e)$ の最小値を求める問題を**輸送問題**という．

輸送問題では $V(G)$ に属さない新たな始点 s と終点 t を追加した頂点集合 $V' = V(G) \cup \{s,t\}$ と新たな辺集合 $E' = E(G) \cup \{(s,u) \mid u \in S\} \cup \{(v,t) \mid v \in T\}$ からなる有向グラフ G' を考え，コスト c' と容量 a' を $(u,v) \in E'$ に対し

$$c'(u,v) = \begin{cases} c(u,v), & u \neq s \text{ かつ } v \neq t\text{のとき}, \\ 0, & u = s \text{ または } v = t\text{のとき}, \end{cases} \quad a'(u,v) = \begin{cases} a(u,v), & u \in S \text{ かつ } v \in T\text{のとき}, \\ a_u, & u = s\text{のとき}, \\ b_u, & v = t\text{のとき} \end{cases}$$

とおいてできるネットワーク $N = (G', a', c', s, t)$ を考えると輸送問題は始点 s から終点 t への最小費用流問題を考えることと等しくなる．しかし負の辺が現れる可能性のある残余ネットワークに対しては Dijkstra 法が適用できない．そこでこの問題を残余ネットワークを修正することで解決する．

定義 5 各 $v \in V$ への最小費用を $c_n(v)$ とし，残余ネットワークを N_{f_n} と各 $v \in V$ にポテンシャル $\rho_n(v)$ が与えられているとする，ただし $\rho_0(v) = 0$，$\rho_{n+1}(v) = \rho_n(v) - c_n(v)$ とする．N_{f_n} からコストだけ $\kappa_n(v,w) = c_n(v,w) - \rho_n(v) + \rho_n(w)$, $(v,w) \in E(G_n)$ によって修正した新たなネットワーク $M_{f_n} = (G_n, a_n, \kappa_n, s, t)$ を**修正残余ネットワーク**と呼ぶ．

修正残余ネットワーク M_{f_n} における任意の枝のコストは非負であり，修正残余ネットワーク M_{f_n} における最短経路と，残余ネットワーク N_{f_n} における最短経路は一致するので，修正コスト κ_n に関しての最小費用経路を求めればよい．

5 ディズニーランドシーへの適用

ここでは東京ディズニーランドシーを 13 個の頂点 V と 19 本の辺 E で構成されている有向グラフであると考える．また避難の際，個々の特徴を無視し，各人は分速 $40m$ で進むとする．まず Lr から DSP への避難経路を考える．Dijkstra 法を用いて始点 Lr から終点 DSP まで，所要時間に関する最小費用を求めると Lr →Po→X→Y→Z→DSP が最短経路となり，その所要時間は 26 分である．次に Lr にいる 30000 人を DSP へ誘導することを考える．各々の辺には道幅があり一度に通る人数が限られているため，先ほどの経路で全員を避難させると 151 分かかってしまう．そこで PrimalDual 法を用いて最適な解を求めると，Lr→Po→X→Y→Z→DSP，Lr→Ma→W→DSP，Lr→ ra →Ar→W→DSP を用いればよいことがわかり，Lr にいる 30000 人は 102.5 分で全員を誘導できる．

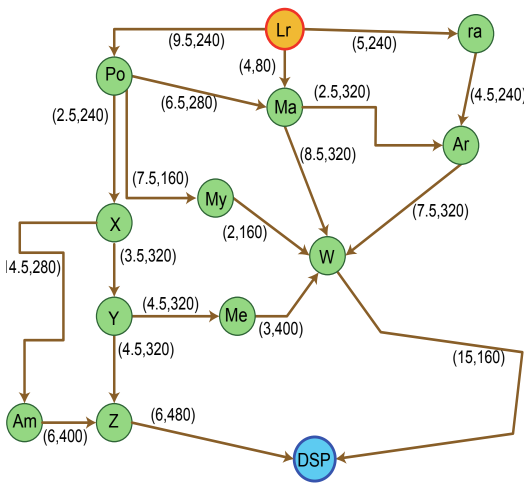

図 2: ディズニーランドシーのモデル化．数値は所要時間及び 1 分あたりに通ることができる人数を表す．

現実問題として，1 箇所に入場者全員がいるという状況や出口が 1 つしか状況は考えにくいので，複数の地点から，複数の出口への避難方法を考える．ここでは Lr，My，Am の 3 箇所に客が多数いるとし，避難場所は DSP と Ar の 2 箇所だとする．輸送問題だと捉え，最適な解を求めると，Lr→Ma→Ar，Lr→ra→Ar，Lr→Po→Ma→Ar，Am→Z→DSP，My→W→DSP を用いればよいことががわかる．その結果，例えば Lr に 5122 人，Am に 19024 人，My に 5854 人いた場合，59.5 分で全員を誘導できることが分かった．

参考文献

[1] B. コルテ, J. フィーゲン， 組合せ最適化 第 2 版 (理論とアルゴリズム) , 丸善出版, 2012.
[2] 加藤直樹, コンピュータサイエンス教科書シリーズ 19 数理計画法, コロナ社, 2008.
[3] 久野誉人, 数理最適化, オーム社, 2012.