学籍番号		論文題目	和音の幾何学 —音楽を構成する「縦糸」「横糸」 からながめる心地よい進行—
氏名	北角　沙織		

1　和音の不協和度，緊張度，Modality

定義 1 *3* つの純音 W_1,W_2,W_3 の周波数とその大きさ（相対値）をそれぞれ $f_1 < f_2 < f_3$ および v_1,v_2,v_3 とする．また $x = 12\log_2(f_2/f_1)$,$y = 12\log_2(f_3/f_2)$ とおく．このとき不協和度，緊張度，*Modality* を

$$\text{不協和度}：d(f_1,f_2,v_1,v_2) = v_{12}\alpha_3(\exp(-\alpha_1 x) - \exp(-\alpha_2 x)) \tag{1}$$

$$\text{緊張度}：t(f_1,f_2,f_3,v_1,v_2,v_3) = v_{123}\exp\left(-\left(\frac{y-x}{\beta}\right)^2\right) \tag{2}$$

$$Modality：m(f_1,f_2,f_3,v_1,v_2,v_3) = v_{123}\frac{2(x-y)}{\epsilon}\exp\left(-\frac{(y-x)^4}{4}\right) \tag{3}$$

$$n\text{ 倍音まで考慮した不安定度}：I(f_{1i},f_{2j},f_{3k},v_{1i},v_{2j},v_{3k}) = \frac{1}{3}\sum_{i,i+1\in Z/3Z} D(f_i,f_{i+1}) + \delta T \tag{4}$$

で定義する．ただし，D,T はそれぞれ n 倍音まで考慮した不協和度，緊張度とする．

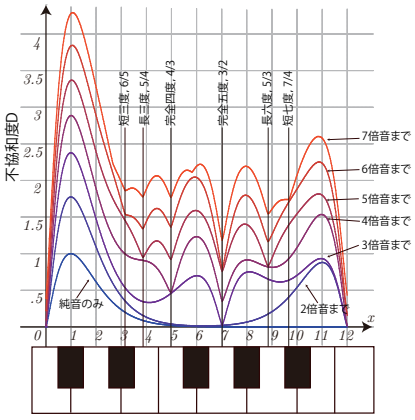


図 1: 倍音まで考慮した 2 音の不協和度曲線．

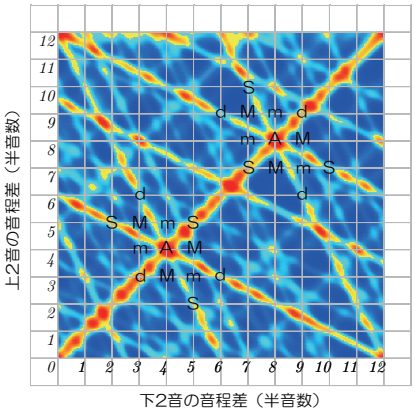


図 2: 5 倍音まで考慮した緊張度．

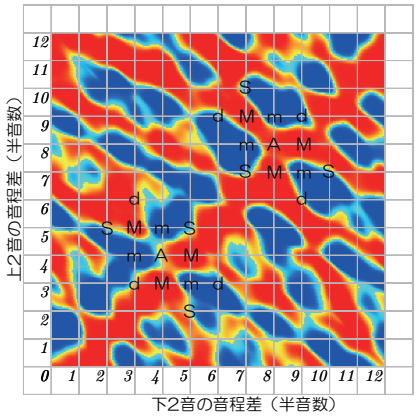


図 3: 5 倍音まで考慮した modality．

2　voice leading の大きさと順序

二組の音程の組 $P = (p_1,p_2,...,p_n)$ と $Q = (q_1,q_2,\ldots,q_n)$ を考える（$n \geq 1$ は任意）．ただし P,Q 各々その成分に同一の音程が含まれていても良い．このとき，組 (P,Q) を **voice leading** と呼び $P \to Q$ と表す．

定義 2 *voice leading* $P = (p_1,\ldots,p_n) \to Q = (q_1,\ldots,q_n)$ の**大きさ** $[P \to Q]$ を自然数の組

$$[P \to Q] = [|p_1 - q_1|, |p_2 - q_2|, \ldots, |p_n - q_n|]$$

と定義する．ただし $[a_1,\ldots,a_n]$ は組 $(a_1,\ldots,a_n) \in \mathbf{R}^n$ の多重集合（添字の順序の違いを同一視した同値類）を表す．

定義 3 (Submajorization partial order) *voice leading* の大きさ $X = [x_1,\ldots,x_n], Y = [y_1,\ldots,y_n] \in \mathcal{V}_n$ に対し二項関係 $\prec$ が

$$\text{すべての } i = 1,\ldots,n \text{ で } x_i \leq y_i \text{ ならば } [x_1,\ldots,x_n] \prec [y_1,\ldots,y_n], \tag{5}$$

かつ，もし $x_i > x_j$ ならば任意の $0 < 2\epsilon \leq x_i - x_j$ について

$$[x_1,\ldots,x_i-\epsilon,\ldots,x_j+\epsilon,\ldots,x_n] \prec [x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots,x_n] \tag{6}$$

が成り立つとき ***Submajorization*** と呼ぶ．

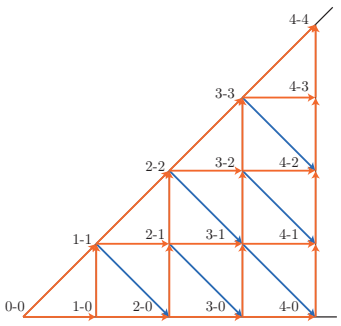


図 4: $n = 2$ での Submajorization による大小比較．オレンジの矢印はルール (5) による比較，青の矢印はルール (6) による比較である．

Submajorization は「公平に分配されるほど大きさが小さくなる」という性質をもつ．すなわち，

命題 2.1 $\sum_{i=1}^n x_i = x$ である任意の大きさ $X = [x_1,\ldots,x_n] \in \mathcal{V}_n$ について $[x,0,\ldots,0] \succ X \succ \left[\frac{x}{n},\ldots,\frac{x}{n}\right]$ が成り立つ．

3　三和音の空間配置

この節では三和音を 3 つの**音程類**からなる多重集合として扱う．音程類の 3 つ組は $T^3 = (\mathbf{R}/12\mathbf{Z})^3$ の点として与えられ，ここから座標の順序の違いを無視することになるので，対象とする三和音は座標変換 $(x, y, z) \mapsto (\sigma(x), \sigma(y), \sigma(z))$, $\sigma \in S_3$ を通しての三次対称群 S_3 の T^3 への作用による同値類，すなわち T^3/S_3 の点として捉えられる．各点 $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) \in T^3/S_3$ は $(x, y, z) \in [0, 12)^3$, $x \le y \le z$ と一対一対応するので，以下の節ではこの対応を通じて T^3/S_3 の点を常に $S = \{(x, y, z) \in [0, 12)^3 \mid x \le y \le z\}$ の元として表示する．

次に，基準となる適切な座標をとる．1 オクターブ $\mathbf{R}/12\mathbf{Z}$ を三等分する和音である augmented，例えば $CEG^\sharp$ を原点 $(0, 0, 0)$ に対応させる．また，点 $\boldsymbol{p} \in T^3/S_3$ に対応する和音から各音程を半音ずつ上げる操作は，$\boldsymbol{a}_0 = (1, 0, 0), \boldsymbol{a}_1 = (0, 1, 0), \boldsymbol{a}_2 = (0, 0, 1)$ として $\boldsymbol{p} + \boldsymbol{a}_i$, $i = 0, 1, 2$ と表され，これを繰り返せば T^3/S_3 内の三和音全ては $CEG^\sharp + \sum_{i=1}^{3} c_i \boldsymbol{a}_i$, $c_i \in \mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$ と表現される．一方，音程全体を同一半音数だけ平行移動させる転調と呼ばれる操作は三和音間の相対的な調和関係を変化させない．音楽的操作として重要な転調は $T^3/S_3 \ni \boldsymbol{p} \mapsto \boldsymbol{p} + c(1, 1, 1) \in T^3/S_3$, $c \in \mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$ と表されるので，$\boldsymbol{t} = (1, 1, 1)$ 方向を座標軸の 1 本として採用する．そこでこの軸に垂直な平面 $\pi : x + y + z = 0$ 上に独立な 2 本のベクトルを以下の命題を満たすようにとる．

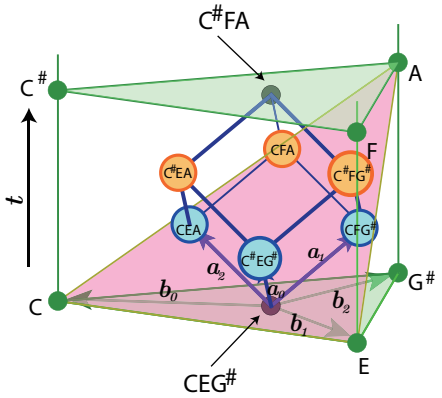


図 5: 右図：T^3/S_3 内での三和音の配置．

命題 3.1 任意の三和音 $l_0\boldsymbol{a}_0 + l_1\boldsymbol{a}_1 + l_2\boldsymbol{a}_2 \in \mathbf{R}^3$ が $\boldsymbol{b}_i + l_i\boldsymbol{t}$, $i = 0, 1, 2$ が定める平面上にあるような $\pi = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\} \subset \mathbf{R}^3$ 上の独立なベクトル $\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1$ が存在する．ただし $\boldsymbol{b}_2 = -\boldsymbol{b}_0 - \boldsymbol{b}_1$ である．

定理 3.2 $n \ge 3$ とし，$\mathbf{R}^n$ の正規直交基底 $\boldsymbol{a}_0, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}$ を選ぶ．また $\boldsymbol{t} = \sum_{i=0}^{n-1} \boldsymbol{a}_i$ と置き，原点を通り $\boldsymbol{t}$ に垂直な超平面を π とする．このとき任意の点 $\sum_{i=0}^{n-1} l_i\boldsymbol{a}_i$ が，n 個の点 $\boldsymbol{b}_i + l_i\boldsymbol{t}$, $i = 0, \ldots, n-1$ が張る超平面上にあるように，π 上の独立な $n-1$ 本のベクトル $\boldsymbol{b}_0, \ldots, \boldsymbol{b}_{n-2}$ を定められる．ただし，$\boldsymbol{b}_{n-1} = -\sum_{i=0}^{n-2} \boldsymbol{b}_i$ とする．

4　和音の空間配置からみた voice leading − 実際の楽曲の分析

バロック期のドイツの作曲家であるヨハン・パッヘルベルの作品で最も有名な「パッヘルベルのカノン」に用いられたコード進行（カノン進行と呼ぶ.）$C \to G \to Am \to Em \to F \to C \to F \to G$ の進行順による voice leading の大きさは

$$[2, 1, 0] \to [3, 2, 2] \to [2, 1, 0] \to [4, 2, 2] \to [2, 1, 0] \to [2, 1, 0] \to [2, 2, 2]$$

となる．カノン進行の特徴である各和音の最もピッチの高い音 $E \to D \to C \to B \to A \to G \to A \to B$ から聞こえるメロディを残してよりスムーズな進行を提示する．ただし不安定度 I を考慮した結果，長調と短調の和音のみを扱うことにし，スタートは GCE を固定する．順に voice leading の大きさが小さいほうを選んだ進行 $C \to G \to F \to Em \to Dm \to C \to Am \to G$ ではその大きさが

$$[2, 1, 0] \to [2, 2, 2] \to [2, 1, 1] \to [2, 2, 2] \to [2, 2, 1] \to [2, 0, 0] \to [3, 2, 2]$$

となり，またそれぞれの voice leading の大きさがかたよることなく小さくなるよう選んだ進行 $C \to G \to F \to Em \to Dm \to C \to Dm \to G$ ではその大きさが

$$[2, 1, 0] \to [2, 2, 2] \to [2, 1, 1] \to [2, 2, 2] \to [2, 2, 1] \to [2, 2, 1] \to [2, 2, 0]$$

となる．なぜカノン進行より voice leading の大きさが小さい進行が存在するのにカノン進行が人々に好まれたのだろうか．それは和音の不安定度，スムーズな voice leading を考慮しすぎたことにより，音楽が単調になりすぎてしまったのではないか．この点でカノン進行は人に心地よく聞こえたのかもしれない．

参考文献

[1] N. Cook, Harmony perception: Harmoniousness is more than the sum of interval consonance. Music Perception, **27**(1), pp. 25-41, 2009.

[2] T. Nakamura ドレミファそーする？－音律の数理と音階の構成－, 2012 年度卒業論文, 愛知教育大学教育学部, 2013.

[3] D. Tymoczko, The Geometry of Musical Chords - Science, Science 7 July, Vol. 313 no. 5783 pp. 72-74, 2006.