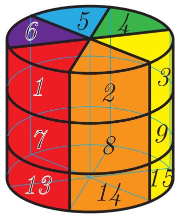
学籍番号		論文題目	チカンは地味だが役に立つ —立体パズルの群構造—
氏名	伊藤 亜珠		

1 Cake puzzle



円柱を縦に 6 分割，横に 3 分割した計 18 のパーツによって構成されている 3-layer cheese cake（右図） のように，縦に m 分割，横に n 分割した円柱型のパズル（$(2m,n)$-cake puzzle と呼ぶ）を考える．このパズルは，縦の切り口の一つを断面として円柱の半分を $180°$ 反転させる方法と，横に分割したパーツを各層ごとに $360°/n$ ずつ回す 2 種類の動かし方ができる．mn 個のパーツすべてに番号をふれば，$(2m,n)$-cake puzzle の状態は mn 個のパーツの配置によって記述される．さらにパズルの構造上上下層の $4m$ 個と中央層 $2m(n-2)$ 個のパーツが入れ替わることは起こりえない．したがってこのパズルの状態は集合 $C(2m,n)=S_{4m}\times S_{2m(n-2)}$ の元によって表現される．同時にこのパズルの操作も $C(2m,n)$ の元で表され，状態 $S=(a,b)\in C(2m,n)$ への操作 $g=(\sigma,\tau)$ の作用は $g\cdot s=(\sigma a,\tau b)$ で与えられ，パズルの操作全体が成す集合 $G(2m,n)$ はこの積で群をなし，群 $S_{4m}\times S_{2m(n-2)}$ の部分群となる．以下ではこの群 $G(2m,n)$ を $n=1$ の場合から順に考察する．しかしピースの一つを移動しない操作のみを考えるとパズルの持ち方の違いを同一視して群を考えることとなり，また基本操作，すなわち生成元が一つ少なくなる利点もあって，群を求める際，しばしばピースを固定して考える．そこでピース a を一つ固定して得られた群を $G_a(2m,n)$ と表すこととする．

命題 1.1 (1) n 次対称群 S_n の部分群 G が $(1\ 2),(1\ 3),\dots,(1\ n)$ を含むならば $G=S_n$ である．

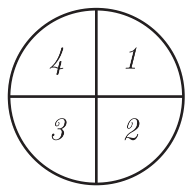
(2) n 次交代群 A_n の部分群 G が $(1\ 2\ 3),(1\ 2\ 4),\dots,(1\ 2\ n)$ を含むならば $G=A_n$ である．

2 $(4,n)$-cake puzzle

卒業論文では複数の m に対する $(2m,n)$-cake puzzle を考察したがここでは代表して $n=4$ の場合を紹介する．

$\boxed{\textbf{(4,1)-cake puzzle}}$ この場合パズルが 1 層のみからなるため，求める群は S_{2m} の，あるいはピース $2m$ を固定したならば S_{2m-1} の部分群と考えられる．以下では先にピース $2m$ を固定した群 $G_{2m}(2m,1)$ を求め，そこから全てのピースを可動にした $G(2m,1)$ を求める．その際，具体的手順を求めるときの発見方法に以下のテクニックを多用した．

補題 2.1 $G_{2m}(2m,1)$ は番号の平行移動 $\phi_s:\{1,2,\dots,2m-1\}\ni k\mapsto k+s\in\{1,2,\dots,2m-1\}$, ただし $s=0,\dots,m-1$, および番号の書き換え $\psi:\{1,2,\dots,2m-1\}\ni k\mapsto 2m-k\in\{1,2,\dots,2m-1\}$ で不変である．すなわち任意の元 $\sigma\in G_{2m}(2m,1)$ に対し，$\phi_s^*\sigma(k)=\sigma(\phi(k))=\sigma(k+s)$, $\psi^*\sigma(k)=\sigma(\psi(k))=\sigma(2m-k)$ によって定義される置換 $\phi_s^*\sigma,\psi^*\sigma$ も $G_{2m}(2m,1)$ の元である．



$(4,1)$-cake puzzle は 4 ピースからなるので状態は S_4 の元で表される．右図のように番号付けを行い，ピース 4 を固定すると基本操作は $A=(1\ 2),B=(2\ 3)$ の 2 つになる．$BAB=(1\ 3)$ だから 3 つのパーツはどの位置にも移動できるため，S_3 が生成される．したがって $G_4(4,1)=S_3$ であり，ピース 4 を固定しないならば新たに基本操作に $(1\ 4)$ が加わるので $G(4,1)=S_4$ である．

層	赤	黄	緑	青
上層	1	2	3	4
下層	5	6	7	8

$\boxed{\textbf{(4,2)-cake puzzle}}$ 右表のように各パーツに番号付ければ基本操作は $U=(1\,2\,3\,4),D=(5\,6\,7\,8),F=(1\,6)(2\,5),R=(2\,7)(3\,6),B=(3\,8)(4\,7),L=(1\,8)(4\,5)$ で与えられる．また

$$T_1=U^{-1}(FUF^{-1}U^{-1})^2=(1\ 5)(2\ 6)(3\ 4),T_2=U^{-1}(RUR^{-1}U^{-1})^2=(2\ 6)(3\ 7)(1\ 4),$$
$$T_3=U^{-1}(BUB^{-1}U^{-1})^2=(3\ 7)(4\ 8)(1\ 2),T_4=U^{-1}(LUL^{-1}U^{-1})^2=(4\ 8)(1\ 5)(2\ 3)$$
$$T_5=D^{-1}(FDF^{-1}D^{-1})^2=(1\ 5)(2\ 6)(7\ 8)$$

とおけば，$FT_1T_5BT_3F=(5\ 6)$ が得られ，番号を付け替えて考えれば $(6\ 7),(7\ 8),(8\ 5)$ および $(1\ 2),(2\ 3),(3\ 4),(4\ 1)$ が得られ，したがって $(1\ 2)(2\ 3)(1\ 2)=(1\ 3)$ および $(5\ 6)(6\ 7)(5\ 6)=(5\ 7)$ も得られる．命題 1.1 を各々適用すれば上層 $1,2,3,4$ 内の任意の置換，下層 $5,6,7,8$ 内の任意の置換が生成される．また $T_1T_2T_1=(3\ 5)(4\ 7)(2\ 6)$ を行ってから上層内，下層内それぞれで置換を行えば任意の上層と下層のパーツの互換 $(i\ j),i=1,2,3,4,j=5,6,7,8$ が生成できる．したがってピースを固定しない場合 $G(4,2)=S_8$ となり，特にひとつピース 1 を固定した群は $G_1(4,2)=S_7$ となる．

層	赤	黄	緑	青
上層	1	2	3	4
中層	5	6	7	8
下層	9	10	11	12

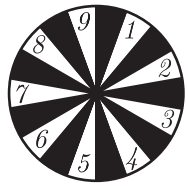
$\boxed{(4,3)\textbf{-cake puzzle}}$ 右表の番号付けを行えば基本操作は

$$U=(1\ 2\ 3\ 4),\qquad D=(9\ 10\ 11\ 12),$$
$$F=(1\ 10)(2\ 9)(5\ 6),\ R=(2\ 11)(3\ 10)(6\ 7),$$
$$B=(3\ 12)(4\ 11)(7\ 8), L=(1\ 12)(4\ 9)(5\ 8)$$

で与えられる．またパズルの性質上，上層，中層，下層の色が揃っていれば完成ではあるが，ここでは赤を基準に反時計回りに，黄，緑，青と並べたものを完成形とする．まず二面体の置換を考えると，これは (4,2)-cake puzzle であり，$G(4,2)=S_8$ である．また中間層のみの置換 $(UFU)^3=(5\ 6)$, $(URU)^3=(6\ 7)$, $(UBU)^3=(7\ 8)$, $(ULU)^3=(5\ 8)$ が得られるので，$G(4,3)=G(4,2)\times G(4,1)=S_8\times S_4$ となる．

3　Zebra 型 cake puzzle

$m\geq 7$ に対する $G(2m,1)$ の決定は困難であった．そこで $(2m,1)$-cake puzzle の奇数番ピースを同一色（黒）で塗り，これらについては区別のないピースと考えた新たなパズル（これを $(m,1)$-zebra cake puzzle と呼ぶことにする）を考察する．パズルの状態は S_m の元として記述され，1 ピース a を固定した群を $Z_a(m)$，固定しない群を $Z(m)$ と表す．なお，以下では m が奇数の場合のみ考察した．m が奇数ならば黒ピースと番号ピースの入れ替わりは起こらないが, m が偶数の場合, 黒ピースと番号ピースの位置の入れ替わりも起こり, 考察の障害となったからである．



ここでは，$m=9$ の時を考察する．右図のように番号付けを行いピース 9 を固定すると，パズルは番号がついた 9 ピースと色を塗った 9 ピースからなるので状態は S_8 の元で表され，基本操作は

$$A=(1\ 4)(2\ 3)),\quad B=(1\ 5)(2\ 4)),\quad C=(2\ 5)(3\ 4)), D=(2\ 6)(3\ 5)),$$
$$E=(3\ 6)(4\ 5)),\quad F=(3\ 7)(4\ 6)),\quad G=(4\ 7)(5\ 6)), H=(4\ 8)(5\ 7)),$$
$$I=(5\ 8)(6\ 7))$$

の 9 つになる．また，

$$EACADE=(1\ 2\ 3),\quad BEBCDC(BEBG)^2=(1\ 2\ 4),$$
$$ABAEACADADA=(1\ 2\ 5),\quad ACAD=(1\ 2\ 6),$$
$$(AGHAH(AHBAEACAD)^2)^2=(1\ 2\ 7),\quad (AHBAEACAD)^2=(1\ 2\ 8)$$

が得られるので $\{(1\ 2\ k), k=3,4,5,6,7,8\}$ に命題 1.1 を用いれば $Z_9(9)=A_8$ が分かる．また $(1\ 2\ 3)\in Z_9(9)$ は番号を付け替えて考えれば $(9\ 1\ 2)\in Z_8(9)\subset Z(9)$ を意味するので，再び命題 1.1 を用いると $Z(9)=A_9$ が示される．

4　Cake puzzle 群　一覧

本研究で決定できた $(2m,n)$-cake puzzle および zebra 型 puzzle の一覧を挙げる．

n \ m	1	2	3	4	5	6
1	S_2	S_4	$S_3\times S_3$	A_8	$A_5\times A_5$	S_{12}
2	S_4	S_8	S_{12}	?	?	?
3	$S_4\times S_2$	$S_8\times S_4$	$S_{12}\times S_3\times S_3$	$G(8,2)\times G(8,1)$	$G(10,2)\times G(10,1)$	?

m	3	5	7	9
$Z(m)$	S_3	S_5	S_7	A_9

表 1　今回決定できた $(2m,n)$-cake puzzle 群 $G(2m,n)$ と zebra 型 $(m,1)$-cake puzzle 群 $Z(m)$ の一覧.

参考文献

[1] D. Joyner, 群論の味わい 置換群で解き明かすルービックキューブと 15 パズル, 共立出版, 2010.

[2] 猿子幸弘， Rubik Cube 群の構造，2015, `http://www.geocities.jp/mashiko_y/portfolio/dwnfiles/rubik_cube.pdf`

[3] 山下樹悦朗　スキューブ三兄弟－立体パズルの群構造－，　2015 年度卒業論文，愛知教育大学教育学部，2016.