

## 三角形の面積の公式について

名古屋女子大学 文学部 宇野民幸

### 1. はじめに

小学校の教員採用試験対策の問題集のなかには、三角形の面積を求める公式である、いわゆる「ヘロンの公式」が載っていることがある。それで学生は、その公式を覚えて演習問題に臨んだり、あるいは覚えきれずに、そのパターンが出たら諦める、としている様である。そのパターンとは、三角形の内接円や角度については分からないが、辺の長さがすべて分かっている、という問題のことである。「成り立つ理由を知らずして、公式をそのまま覚えたくはない。」といったこだわりも、少なくとも私の周りでは、あまり聞かれなくなった。

学生は、このヘロンの公式について、これまで全く知らなかったかということ、そうでもなく、「どっかで出てきた気がする。」という場合が多い。しかし、この公式を明確に覚えている人は、ほとんどいない。そしてこの公式は、考えてすぐに導き思い出せるタイプのものでもない。

高校の教科書においては、昨年度より、この公式を「発展」の位置づけで新たに盛り込んでいる状況があるが、今後も教材の内容とは成りにくいと考えられる。また一方で、「三角形の内接円の半径と面積の関係」として、三辺の長さに加えて内接円の半径が分かっている場合については、その面積の求め方は、公式として扱わないとしても、考え方・内容として、すべての生徒が学習してよいとも考えられる。この後者の場合の公式は、忘れたとしても、作図をするなどして、円の性質をもちいて自ら導き出すことも期待できる。

ここでは、覚えても面積の公式を忘れてしまう、あるいはそれを見込んで覚える気がしない、というヘロンの公式について、同じものではあるが別の表現のし方を示して、学生にも伝えることができる方法として、その公式の成り立つ理由を追っていきたい。

### 2. ヘロンの公式

三角形  $ABC$  の 3 辺の長さをそれぞれ  $a$ 、 $b$ 、 $c$  とすると、その面積  $S$  は

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

となる。ただし、ここで  $s = \frac{a+b+c}{2}$  である。

この公式の特徴は三角形の 3 辺の長さが分かれば、面積がすぐに求まることである。証明はここでは省いておく。

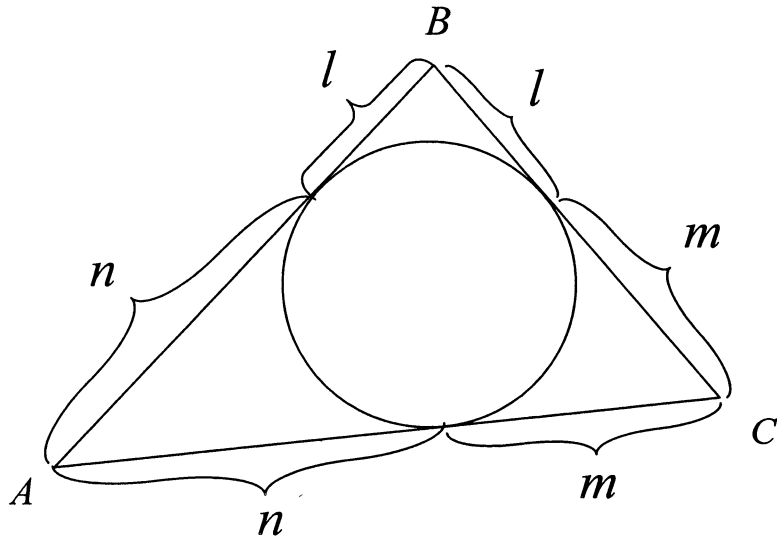
さて、この公式に代わる同様の特徴をもつ公式とは次のものである。下図のように、三角形に内接する円の接点から頂点までの長さをそれぞれ  $l$ 、 $m$ 、 $n$  とすると、その面積  $S$  は

$$S = \sqrt{lmn(l+m+n)}$$

となる。すなわち、 $l$ 、 $m$ 、 $n$  を接線の長さと呼ぶと、三角形の面積は接線の長さの

$$\sqrt{\text{積} \times \text{和}}$$

と表されるのである。



これは、ヘロンの公式から導き出すこともすぐにできるが、時間がもてるならば、学生にはむしろこの式が成り立つことを納得させる説明をしたい。次にそれを紹介する。

### 3. 証明への導入

上で書いたように、「公式が成り立つ理由知らずして、覚えたくはない。」というゆとりのあるスタンスもなかなか取りにくい状況においては、「証明をしっかりとる。」といっても学生のモチベーションはあまり上がらないどころか、下がるのが予想される。ゆえに次のような証明への導入を考える。

「かけても、たしても、同じ答えとなる3つの数は何か？」

すると、学生はしばらくは手当たり次第に考えているが、そのうち適当に2つの数を挙げて、

3つめは方程式をもちいて求めることができることに気づく。それで、「代数的にみつけた」ことを評価して、次に「幾何的（図形的に）にみつける方法もある」というと、まだ聞いてくれる。幾何的なのは方法だけだが、そこですかさず次のことをしてもらう。

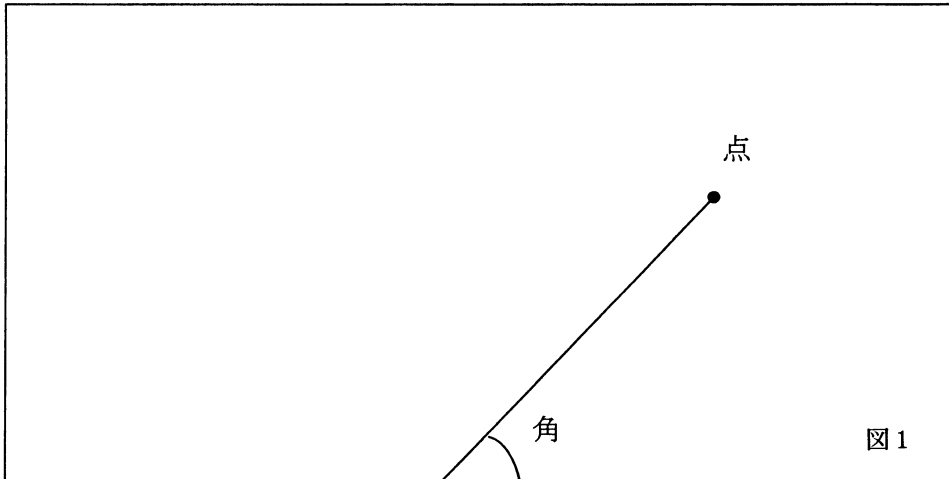
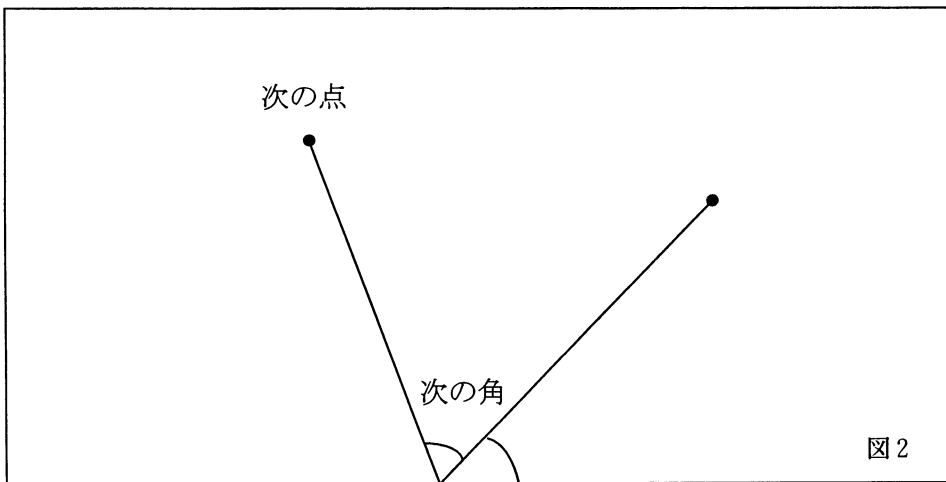
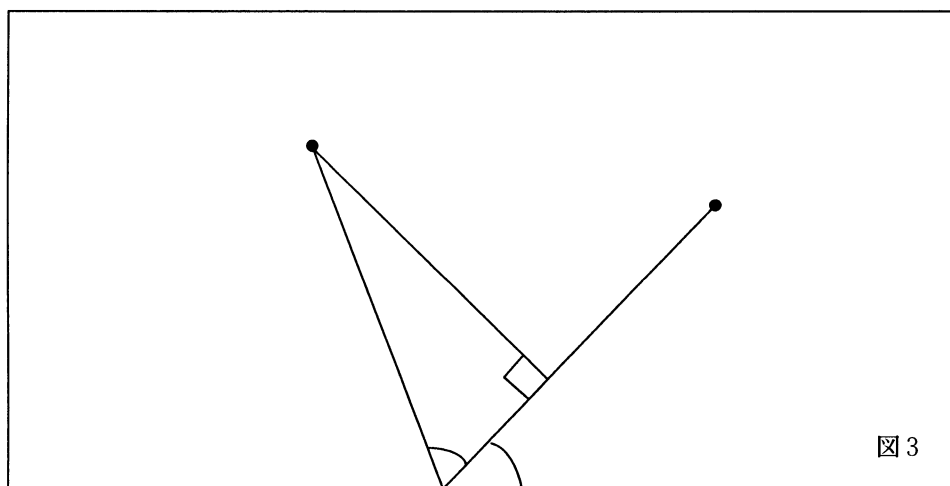


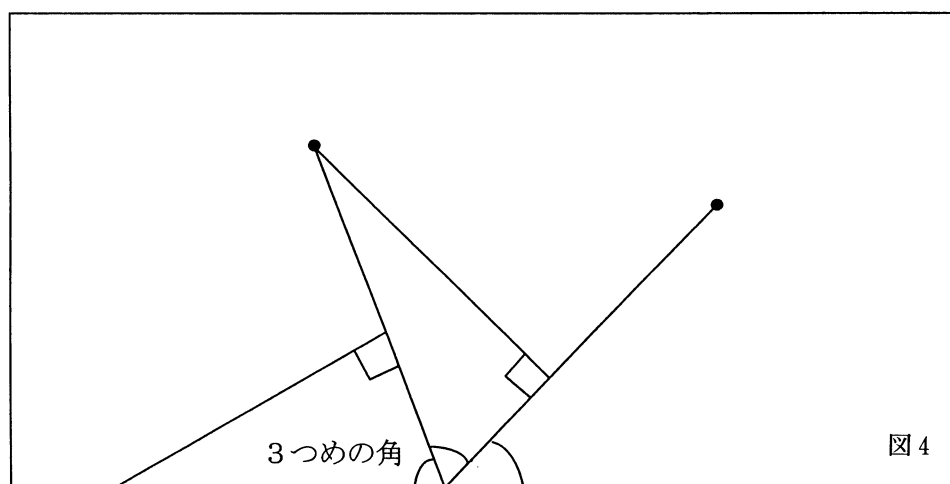
図1のように適当に点を取り、折り目をつけある角度をつくり、「この角のタンジェントは？」と問う。すると、「なんだっけ」となりがちだが、暫くして比を使って求まることを（公式からか）思い出して定規を用いて数値を出すことが期待できる。次にもう一点をとる（図2）。



そして図2のようにまた角を作り、そのタンジェントを求めてもらう。タンジェントの出し方を思い出したので、今度は次の図3のように線が入ることを期待する。これは、直角定規がなくとも先ほどの線分をもちいて、紙を折り合わせることによって折り目をつくることことができる（しかも「次の点」からの垂線でなくともよい）ことに気づいてくれるとよい。これは、小学生に「直角」を伝える作業に通じているといえる。



最後に、残りの3つめの角に対するタンジェントを求めてもらうが、次の図のような補助線ができるとうい (図4)。



そしてこのように、それぞれ求められた3つのタンジェントの数値は、かけてもたしても同じ数になる。実は実際に行うと、なかなか誤差も出るが、「精密に行えば、和と積は同じ結果になる。」と学生に伝えと、それなりにこの事実に興味を持つことがわかる。この結果は次の補題による。

補題  $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \pi$  のとき、

$$\tan \theta_1 \tan \theta_2 \tan \theta_3 = \tan \theta_1 + \tan \theta_2 + \tan \theta_3 \quad \text{となる。}$$

すなわち、 $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 、 $\theta_3$  の和が 180 度するとき、そのタンジェントの「積=和」となる。

この証明のためには、正接の加法定理（覚えてない場合は、正弦・余弦の加法定理から導いて）

$$\tan(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\tan \theta_1 + \tan \theta_2}{1 - \tan \theta_1 \tan \theta_2} \quad \text{をもちいて、一般に以下の式が成り立つことをまず示す。}$$

$$\tan(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = \frac{\tan \theta_1 \tan \theta_2 \tan \theta_3 - (\tan \theta_1 + \tan \theta_2 + \tan \theta_3)}{\tan \theta_1 \tan \theta_2 + \tan \theta_2 \tan \theta_3 + \tan \theta_3 \tan \theta_1 - 1}$$

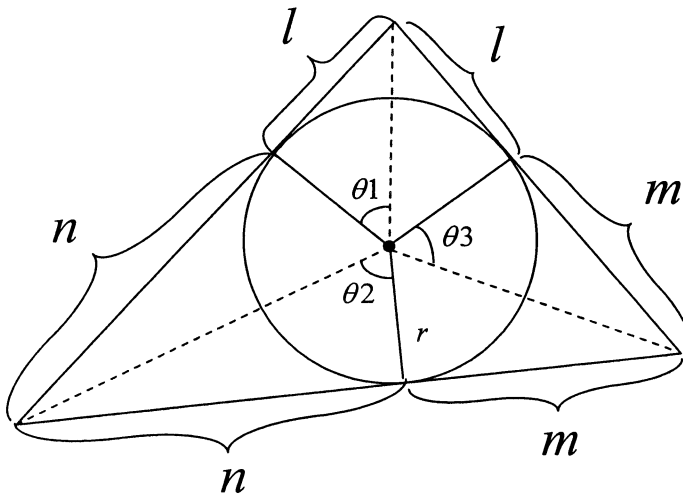
すると、上の補題が成り立つことがわかる。この式を導くヒントを学生に与える際には、小学1年生が「3口の計算式」をいきなり見たときには、いかに難解かを想起させる。

#### 4. 接線の長さの $\sqrt{\text{積} \times \text{和}}$ となることの証明

最後に、三角形の頂点から内接円の接点までの長さ（接線の長さ）を  $l, m, n$  としたとき、

三角形の面積が  $\sqrt{lmn(l+m+n)}$  となることを証明する。

以下の図のように  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  を考え、内接円の半径を  $r$  とする。



まず、高校生までの知識内容「三角形の内接円の半径と面積の関係」として、三角形の面積  $S$  が、  
 $S = (l + m + n) \times r \quad \cdots (*)$

となることを確認する。そして、 $\tan \theta_1 = \frac{l}{r}$  ,  $\tan \theta_2 = \frac{n}{r}$  ,  $\tan \theta_3 = \frac{m}{r}$  である。

ゆえに補題をもちいると、 $\frac{l+m+n}{r} = \frac{lmn}{r^3}$  となり。  $r = \sqrt{\frac{lmn}{l+m+n}}$  であるので、

これを  $(*)$  に代入すると、 $S = \sqrt{lmn(l+m+n)}$  となる。

5. おわりに（補足）

公式『三角形の面積は、（内接円に対する）接線の長さの $\sqrt{\text{積} \times \text{和}}$ となる。』を導き出す過程

において、『三角形の内接円の半径は、接線の長さの $\sqrt{\text{積} \div \text{和}}$ となる。』という公式も出てきた。

ここで問題は、「接線の長さが与えられていない場合には、どうするのか。」ということであるが、3 辺の長さ  $a$ 、 $b$ 、 $c$  が与えられていれば、次のように接線の長さを求めることができることは、学生には何らかのきっかけで気づいて導き出して欲しいところである。

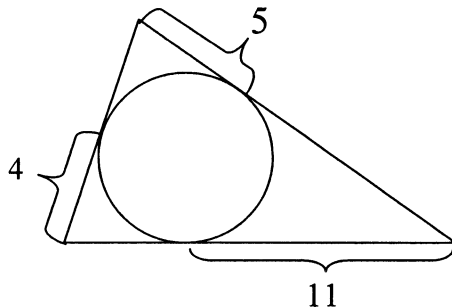
$$\begin{array}{rcl}
 l+m & = & a \\
 m+n & = & b \\
 + \quad n+l & = & c \\
 \hline
 2l+2m+2n & = & a+b+c
 \end{array}
 \quad \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longleftarrow \end{array}
 \quad l+m+n = \frac{a+b+c}{2}$$

ゆえに、 $s = \frac{a+b+c}{2}$  とおくと、 $n$  は  $s-a$ 、 $l$  は  $s-b$ 、そして  $m$  は  $s-c$  として求まる。

このことを学生には、「図を参考にして『接線の和』をまず求め、それからそれぞれの接線の長さを求められないか。」と促した。学生はひとつ求め方が分かると、あとは自然に求める。

ここで紹介した公式は、次のような問題に対しては比較的使いやすいのではないだろうか。

問：次の三角形の内接円の半径を求めよ。



先ほどの $\sqrt{\text{積} \times \text{和}}$ の公式より面積が $20\sqrt{11}$ と求まれば、辺の長さはすぐに分かることから、「内接円の半径と面積の関係」を用いて求めても良いし、また $\sqrt{\text{積} \div \text{和}}$ とすればすぐに答えは求まる。ここで紹介したように、これらの公式を導いていくなかで、「小学 1 年生が初めて 3 口の計算式を見た場合には、何をやればいいのか分からないであろうこと」、「直角という概念を表現する際、90 度といっても何ら意味を伝えていないこと。」、「角度（傾き）というのは、比（あるいは単位あたり量）で表現されている数量であること。」など、小学校の教員を目指す学生にとって、しっかり考えておいて欲しい話題がいろいろと関連して出てきた。ひとつの目標は持ちながらも、そこに至る道中において、ひとつずつを意識して自分なりに捉え、実際に試行と考察をしていくと、学生はそれぞれに気になるポイント・気にならないポイントがあるようで、それも面白いと感じている。