愛知教育大学研究報告，51（教育科学編），pp. 53～60, March, 2002

算数問題解決に影響を与える知識の吟味

多鹿秀継
Hidetsugu TAJIKA
学校教育講座（心理学）

「人間は，いろいろなニューロンのネットワークシステムと，それを働かせるプログラムをもっているのです。記憶・思考・学習などの知性，喜・怒・哀・楽などの情緒，そして，何かをなしとげる意欲までのプログラム（報酬システムプログラムに関係している）があります。さて，こういった心のプログラムが，胎児や赤ちゃんにも存在するのでしょうか。……答えは，もちろん，イエスです。もちろん，なにもおとなのわれわれとまったく同じであるといっているのではありません。私は，心をつくる基本的なものを，赤ちゃんが持っていると思うのです。おとなの複雑な心は，その組み合わせにすぎないかもしれません。……」（小林，1993，259頁）

1　本論文の目的

本研究の目的は，子どもが算数の問題解決場面に直面したとき，当該の問題を適切に解決するために必要とする知識を明確にすることである。この目的のために，本論文では知識をインフォーマルな知識（informal knowledge）とフォーマルな知識（formal knowledge）に区分する。インフォーマルな知識に関しては，インフォーマルな知識の起源と考えられる乳児期の算数概念の理解に焦点を当て，乳児においても基本的な計数（counting）や簡単な加減の計算ができることを示す。本論文の導入部において記述したように，小林（1993）も乳児が様々な心のプログラムを有することを指摘する。また，フォーマルに獲得される知識に関しては，算数文章題の解決を支えるとされる知識に焦点を当てる。算数問題解決においては，フォーマルな知識と共に学校教育を受ける以前から有するインフォーマルな知識も影響を与えることは自明である。本論文では，算数問題解決の過程で，どのような知識がどのように作用するかを明確にするものである。なお，本論文で言及する算数概念とは，インフォーマルな知識に関しては計数や比較的簡単な四則計算を取り上げ，フォーマルな知識に関しては割合文章題における割合概念等の論理数学的な知識を取り上げる。

2　算数問題解決における知識の区分

一般に，算数・数学の問題解決に影響を与える知識は，知識を宣言的知識（declarative knowledge）と手続き的知識（procedural knowledge）に区分して論じることが多い（Hiebert, 1986; Hiebert & Carpenter, 1992）。宣言的知識とは，事実や出来事に関する知識であり，「1＋2＝3」のような算数の事実や数量に関する様々な概念的な知識を意味する。また，手続き的知識とは，技能や解き方に関する知識であり，四則計算や様々な公式を適用して問題を解決することなどに関する知識である。算数・数学における技能とは，四則計算に見られるような一連の行為である。

算数・数学の領域では，特に宣言的知識に関して上述の定義・概念を拡張し，算数・数学の教育に利用可能な捉え方をする（Hiebert & Carpenter, 1992）。即ち，宣言的知識は，個々の算数の事実や出来事を記憶していることよりも，個々の算数の事実が相互に関連しつながりをもって構成された意味ネットワークとして捉える。算数の個々の知識は，それ故，意味ネットワークを構成する1つの単位である。その結果，算数の問題を適切に解決できるということは，宣言的知識に関して，個々に形成された算数の知識を統合し，問題の意味内容に適合したネットワークを構成することであるといえる。

しかしながら，算数・数学に関わる知識を論じる場合，知識をインフォーマルに獲得された算数の知識とフォーマルに獲得された算数の知識に二分することもしばしば認められる（Ginsburg, Klein & Starkey, 1998）。

この場合，インフォーマルな知識とフォーマルな知識の区分は，宣言的知識と手続き的知識の区分に見られるような，知識の内容・種類に言及して区別したものではない。インフォーマルとフォーマルな知識の区分は，子どもが就学前に獲得している知識と就学後に授業を通して獲得した知識の区分に基づくものである。インフォーマルな知識には，子どもが生得的に獲得している知識を含めることができる。

Ginsburg et al. (1998) に従えば，インフォーマルな知識とは，具体的な対象で構成される問題解決状況を基礎にして獲得した知識であり，就学前の子どもが自分を取り巻く社会や生活に根ざした活動を通して獲得する知識といえる。Ginsburg et al. (1998) では生得的な知識はインフォーマルな知識に含まれていないが，本論文では生得的な知識もインフォーマルな知識と位置づけよう。他方，フォーマルな知識とは，学校教育を通して獲得する知識であり，通常は授業過程において算数・数学の記号システムを操作する活動を通して獲得される知識である。

学校教育においてフォーマルに獲得された算数と子どもの生活体験に基づいて獲得されたインフォーマルな算数とは，直接には関係しないことが知られている (Nunes, Schliemann & Carraher, 1993)。例えば，四則計算に関して，ブラジルの9～15歳の路上で物売りをしている子どもは，学校での授業を通して学習した四則計算のテスト（例えば，35×4＝？）ではそれほど正答しない（約37%の正解率）のに，路上で物売りをするときに使用するお金の四則計算の場合なら，学校の四則計算と同じ問題（1個が35クルゼールのココナッツを4個買うといくらか？）を適切に処理する（約98%の正解率）ことが知られている。子どもは物売りという毎日の生活を通して，生活に必要な四則計算の知識を獲得していたのである（但し，子どもが路上で売っていない品物からなる文章題の計算の場合には，日頃子どもが扱っている品物の計算結果よりも成績が落ちる（約74%の正解率）ことに注意)。算数のインフォーマルな知識は，それ故，生活者の生きる基盤を構成したといえる。他方，学校生活における算数問題解決の知識は，記号システムを操作することによって獲得される。記号システムの操作としてのフォーマルな知識は，通常子どもの生活感覚から遊離したものであり，スムーズに獲得されるものではない。適切な教授介入と多大の訓練とによって，当該のフォーマルな知識の獲得が促進されることが多い。

フォーマルに獲得された知識に関して，本論文では算数文章題解決に影響する知識に限定する。その理由は，算数文章題解決が子どもにとって難しい課題であることによる（岡本，1995;多鹿，1995)。子どもには，幼児期から営々と築いてきた知識の構成によるその子どもなりの算数・数学のインフォーマルな理論・知識がある。小学校に入学後，子どもは学校教育を受けることでフォーマルな算数の知識を獲得する。その結果，子どもはインフォーマルな知識とフォーマルな知識を融合･統合したり，学習過程において身につけたフォーマルな知識がインフォーマルな知識に取って代わる状況（逆の場合もあり，いつまでもインフォーマルな知識の方が優勢な場合もある）において，算数文章題は子どもの日常生活を反映した課題として位置づけられながら，子どもにとっては解決困難な課題である。それ故，算数文章題解決に影響を与える知識を取り上げた。

なお，インフォーマルな知識とフォーマルな知識の統合過程や就学後におけるインフォーマルな知識の優位状況に言及する研究は，本論文では取り扱わない。また，宣言的知識と手続き的知識の発生の問題や相互作用の問題もここでは取り扱わない。それらは共に興味あるテーマであり，今後の課題としておく（例えば，Hiebert & Carpenter (1992), Rittle-Johnson, Siegler & Alibali (2001), Silver (1986) などを参照のこと)。

ところで，算数問題解決過程の解明に焦点を当てた研究は，これまで主に算数教育と心理学の学問領域において，様々な資料を蓄積してきた。算数教育の領域では，子どもが算数問題を解決するときに，どのような指導を実施することが当該の問題解決において効果的であるのかについての知見を明確にしようとしている。換言すれば，算数教育の研究領域では，算数の問題（算数教材の内容）と指導法の相互作用の分析を通して，算数問題解決の研究に関わるといえる。それ故，算数教育では，算数問題の解決過程の解明に力点が置かれるよりも，むしろ算数問題解決の教育的介入のあり方に力点が置かれているといえよう。

他方，心理学研究では，主に算数の問題を解く子どもの問題解決過程の解明に焦点を当て，正しく問題解決に至るための様々な要因を分析してきた。知識獲得の問題も心理学的な研究成果に依存するところが大きい。本論文では，算数問題解決に影響を与える知識を吟味することに視点がおかれており，算数問題解決過程の心理学的研究を発展させたものである。今後は，算数問題解決に影響を与える知識を吟味することに続いて，算数・数学教育の得意とする当該の知識を子どもに獲得・構成させる教授介入の方策を吟味することが必要である。

3　子どものインフォーマルな知識

最近の数の理解の発達に関する研究では，乳児ですら算数に関するインフォーマルな知識を所有していることが報告されている (Ginsburg et al., 1998)。乳児は数量の基本的な概念をもって生まれてくるようである。即ち，乳児はある対象物Aと別の対象物Bが同じ量であること，あるいはAの方がBよりも多いことを理解しているだけでなく，AとBを加えたりAからBを引いたりすることによって，もとのAやBの量よりも多くなったり少なくなったりすることを理解している。乳児は加えることが数量を増やし，引くことが量を減らすことであることを理解している。人は数量の基本概念をもって生まれ，幼児期の数量概念の理解に引き継がれるといえる。

勿論，乳児から就学前の子どもの数理解は断片的であり，様々な制約を受けるものである（Nunes & Bryant, 1996）。いくつかの数認知の状況ではエラーに導かれる理解の場合もある。例えば，2列に並べられたおはじきの数を比較するような数量の比較において，よく知られているように，子どもはしばしば計数によらずにおはじきの列の長短によって数を比較しようとする。

このような状況にも関わらず，就学前までの子どもは，インフォーマルな数量概念の理解に基づいて数量概念に含まれる関係を理解し，この理解を様々な状況に論理的に適用しようと試みる。このような意味では，たとえ数量に関するインフォーマルな知識といえども，本物の数量概念であるといえる。就学前までに獲得された数量の概念，たとえば後の節で述べる手続き的知識と考えられる計数の知識や数量の比較に関する宣言的知識は，小学校入学後に子どもがフォーマルに算数を学習するための基礎を構成すると考えることができるだろう。

但し，インフォーマルな知識（例えば，整数の知識や整数の単純な加減算の知識）があるからといって，小学校入学後のフォーマルな知識（例えば分数の加減算）の獲得を容易にするとは限らない。例えば，分数のような有理数は整数のように足し算を行うことができない（$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$とはならない）。子どもは，分数に関する様々な概念を適切に学習することが必要となる。

ところで，就学前に子どもが獲得する算数に関わるインフォーマルな知識は，生物学や物理的環境・文化に導かれて構成されたものといえる（Ginsburg et al., 1998）。生物学は算数概念の理解に遺伝子のレベルで関わり，乳児ですら数量の差異や計算能力を身につけて生まれてくるように，算数概念の理解に関わる基礎的な枠組みを提供する。物理的環境や文化とは，子どもを取り巻く生活の場において，様々な生活体験を通して算数概念を実践的に体得させる資源となるものである。

この節では，主にインフォーマルな知識の起源に関わる乳児の計数の理解と計算能力（加減算）に焦点を当てよう。

3－1　子どもの計数の理解

乳幼児を使った最近の数理解の研究では，乳幼児は数について様々な能力を発揮することが報告されている（例えば，Antell & Keating, 1983; Starkey, Spelke & Gelman, 1983, 1990; Starkey & Cooper, 1980）。乳児や言語反応の十分に確立していない幼児を使った数理解に関する研究では，通常乳児が対象物（刺激）を注視する時間を従属変数にした注視の馴化―脱馴化（habituation-dishabituation）の実験手続きが利用されている。

注視の馴化―脱馴化の実験手続きとは，乳児は見慣れた対象物よりも新規な対象物を好んで見るという特性を利用したものである。同じ対象物（ドットを利用することが多い）の数を繰り返し提示すると，その対象物への注視時間が減少する（馴化）。その後新たな数に変えた同一対象物を提示すると，乳児は再び注意を喚起して，新たな対象物を以前よりも長く見るようになる（脱馴化）。

Starkey & Cooper（1980）は，注視の馴化―脱馴化の実験手続きを使って，生後5ヶ月程度（平均22週）の乳児に2個ないしは3個からなるドット（黒丸）をスクリーンに映して見せた。例えば，2個のドットの描かれているスライドを繰り返し提示し，次に2個の対象物を描いたスライドを提示した。その結果，乳児は対象物が2個から3個に変わったり，3個のドットを提示した場合には3個から2個に変わったとき，注視時間が増加したことがわかった。但し，4個から6個や6個から4個への変化には，注視時間に変化はなかった。

Starkey & Cooper（1980）の研究結果は，一度に認知できることという意味のsubitizingという言葉を用いれば，乳児でも3個までの数であれば，その個数の違いを弁別できることを示すものである（Chi & Klahr, 1975）。但し，Starkey & Cooper（1980）の研究結果は，乳児でもsubitizingが存在していることを示すものであるとしても，subitizingを構成している中身，即ち，乳児が計数を行って実際に数の違いを区別したのか，それとも単にドットを見たときの量感の違いを反映しているのかに関しては，必ずしも明確ではない。

Starkey, Spelke & Gelman（1983）は生後6～8ヶ月（平均7ヶ月）の乳児を使って，乳児が数についての情報を得るための知識をもっていることを示した。実験では，乳児に2枚のスライドを並べて提示した。スライドの一方には2つのもの（例えば，リボンとパイプ）がランダムな配置で提示されており，他方のスライドには3つのもの（コイン入れの財布，指輪の箱，羽根）がやはりランダムに提示されていた。2枚のスライドの提示後すぐに2枚のスライドの中央のあたりからドラムの音を2ないし3回鳴らした。乳児にドラムの音を聞かせてから，提示している2枚のスライドを10秒間提示した。実験は，ドラムの音を聞いた乳児が，提示された2枚のスライドのどちらの方を長く見ているかを吟味するものであった。実験の結果，乳児はドラムの鳴った回数と一致する数が提示されているスライドの方を見る時間が長かった。即ち，2回ドラムが鳴れば2個の対象物が描かれているスライドを，3回鳴れば3つの対象物が描かれているスライドを長く見た。

このように，乳児の間でも，数の理解の様々なメカニズムが働いていることがわかる。乳児期からこのような計数能力があるということは，人は生まれながらに単純な加減の計算を遂行する能力をもち，人の発達の過程で，その能力が算数の更なる知識の獲得の基礎を構成することを意味するように思われる。

ところで，よく知られているように，Gelman & Gallistel (1978) は，幼児が数を数えるという計数能力とはどのようなものであるのかに関して，計数能力を支配する以下の５つの原理を説明している。

(1)　１対１対応の原理：１つの対象物に数の名前を１つだけ割り当てることである。子どもは，１対１対応の原理を構成している２つの要素を区別しなければならない。１つは対象物を１つ１つ区別することであり，他は区別したものに標識（例えば，イチ，ニイ，サン，……の命数のように）をつけることである。対象物を区別することと区別した対象物の１つ１つに標識をつけることをうまく協応させることによって計数が可能となる。

(2)　安定順序の原理：並んでいる項目に対応させて使う標識が安定した順序に配列される原理である。標識の安定した順序とは，繰り返し同じ順序で使われるという意味であり，１対１対応させた数詞を同じ順序で繰り返すことができる（例えば，いつもイチ，ニ，サン，……と数える）ことによって計数が可能となる。

(3)　基数の原理：ある対象物の集合を数える場合，その系列の最後の数がその集合の数を示すという原理である。(1)と(2)の原理は，標識を選びまとまりのある対象物にその標識を割り当てる原理である。これに対して，この原理は(1)と(2)を基礎にして，その後に発達する原理といえる。

(4)　抽象の原理：対象物のどのような配列や集合にも標識を提供できるという原理である。上記の(1)～(3)は如何に数えるかという計数の操作に関する原理である。これに対して，抽象の原理は数えるものが何であろうと，すべての配列や集合に適用できる原理である。

(5)　順序無関係の原理：数を特定するのに，計数の順序は関係がないことを示す原理である。どのように数えるかは，同じ項目を二度にわたって使わない限り問題ないのである。

Gelman & Gallistel (1978) はこのような計数の原理を提示し，子どもはすべて同じ計数の原理をもっているとは限らないこと，個々の原理にはその成分となる技能があると考えられるが，これらの技能はそれぞれ一定の年齢では必ずしも完全ではないこと，などを明確にしている。これに対して，Fuson (1988) は，子どもは４歳頃までに上記のような計数の基本的な原理を獲得し，数を数えながら１つ１つの対象物を指で指し示すようになるという。

３－２　子どもの加減算の理解

上述のように，注視の馴化―脱馴化の実験手続きに従って，乳児が数量の違いを理解していることが明らかとなった。それでは，数の合成や分解の理解に関わる計算能力は，乳児においても認められるのであろうか。

乳児の研究を説明するに先立ち，動物の計算能力に関しては，多くの哺乳類や鳥類は異なる数からなる対象物を区別したり，数えたり，数計算の結果を決定することができるという報告がなされている（例えば，Davis & Perusse, 1988）。心理学では，古典的な逸話として有名である「賢い馬ハンス」が足し算などの計算を正確にやってのけたという。例えば，「５たす３はいくらですか」という問題では，ハンスに５個のものと３個のものが提示された。この問題を提示された後，ハンスは足し算の合計と同じ回数を自らのひずめで大地をたたいたそうである。更に，具体物を提示されなくとも，黒板に書かれた数字を計算もした。このような「賢い馬」ハンスは，実際には馬の調教師である von Osten の頭や眉の筋肉の動きを馬のハンスが敏感に感じ取った結果としてひづめをうちならしていたことが明確にされた。

最近の研究では，動物でも４以下の小さな数字の足し算や引き算はできるという報告がなされている（例えば，Hauser, 2000; Sulkowski & Hauser, 2001）。例えば，Sulkowski & Hauser (2001) は，アカゲザルを使って，アカゲザルが３以下の数字の引き算を自然に行っているかどうかを吟味した。実験方法は単純である。食べ物（プラムの実）の入っている２つの入れ物をアカゲザルに見せて，一方を選択させるものである。入れ物には，実験課題によっては，食べ物が入っていなかったり，食べ物でないプラムの実の大きさをした金属片が入っていたりする場合がある。実験者は，例えば一方の入れ物に２個のプラムを見せてから入れ，他方の入れ物には１個のプラムを見せてから入れる。それぞれの入れ物にプラムを入れた後に，それらを隠す。次いで，一方の入れ物に入れている２個のプラムから１個を取り出し，他方の入れ物から１個のプラムを取り出す。つまり，一方の入れ物に残っているプラムの数は「２－１＝１」で１個のプラムが残っており，他方の場合は「１－１＝０」で，プラムは１個も残っていない。実験の結果，アカゲザルが接近して選択した入れ物は，圧倒的にプラムの残っている１個の方であった。

このような実験結果に基づいて，Sulkowski & Hauser (2001) は，アカゲザルは３つまでの数字を含む引き算の結果を正しく計算していると結論づけた。即ち，引き算をして大きい方の数字（つまりは残っているプラムの多い方）に接近して選択したのであった。

勿論，引き算だけでなく，足し算の研究でも同様の結果が得られている（Hauser, 2000）。

生後4～5ヶ月の乳児においても，足し算や引き算が適切にできることが確かめられている。Wynn（1992）は工夫を凝らした研究方法を用いて，乳児の加減の計算能力を吟味した。彼女は，乳児が自然の物理法則に従わないような不思議な出来事に出会うと強い驚きを示すこと（例えば，乳児はある対象物が何の支えもないのに空中に浮いたままであるのを見ると不審な目つきでそのシーンを注意したり，スクリーンでものを隠した後にスクリーンを取り上げたときに，乳児にスクリーンで隠す前に見せたものが消えていると驚く）を利用して，乳児の加減の計算能力を吟味した。

Wynn(1992)は，上述したように，乳児が驚きをもって対象物を注視する時間を従属変数とした実験を実施した。Wynn (1992) は生後4～5ヶ月程度の乳児を被験児として3つの実験を実施したが，ここでは研究の基本となる実験1を説明しよう。

Wynn (1992) は乳児を2グループに振り分けた。まず，「1＋1」グループでは，乳児の前に提示した空のディスプレーに1つの項目が示された。次に，スクリーンでその項目を乳児の視界から隠した。実験者は乳児の見ているところで，第2の同じ項目を1つディスプレーに示し，スクリーンで隠した。乳児は実験者が項目の数の操作をしているところを見ることができるが，スクリーンで項目を隠され，項目の数の操作の結果を見ることはできないようにされた。また，「2－1」グループでは，「1＋1」グループと同じような操作によって，2項目から1項目を引く課題が示された。

両グループの乳児には，上記の操作が行われた後，スクリーンを取り去ってディスプレーに1項目ないし2項目が示された。ディスプレーを見る乳児の時間が測定された。「1＋1」グループでは，スクリーンを取り去った後，1項目か2項目が提示された。1項目の提示は，スクリーンで2項目を隠しているときに，乳児に気づかれないように1項目を取り去ることによる。「2－1」グループにおける2項目の提示の場合も同様であり，スクリーンで項目を隠しているときに，乳児に気づかれないように1項目を加えるのである。なお，実験では，乳児が項目を見る時間の基準値を得るために，テスト試行の前に1項目をディスプレーに提示した場合や2項目を提示した場合の時間を予め測定していた。

このような実験の設定から，乳児が加減の計算結果に基づいて，予想できる結果よりも予想できない結果の方を長く見るなら，「1＋1＝2」や「2－1＝1」のような予想できる正しい加減算の結果よりも，「1＋1＝1」や「2－1＝2」のような間違った結果の方を長く見ることが予想できる。実験の結果は予想通りであった。まず，乳児は基準値として測定された1項目と2項目を見る時間に関しては，1項目と2項目を見る時間に違いがなかった。しかしながら，「1＋1」グループの乳児は，答えの「1項目」をより長く見，「2－1」グループの乳児は「2項目」をより長く見た。両グループは正しい結果よりも誤った結果をより長く見たのである。Wynn(1992)の他の実験において，「1＋1」の足し算で3項目を提示した場合，「2項目」よりも「3項目」を長く見たことが確かめられた。このように，生後5ヶ月程度の乳児でも，算数の簡単な足し算や引き算のような計算により，正確な結果を導き出せることが示された。

4　子どものフォーマルな知識：算数文章題解決に影響を与える知識

算数文章題の解決過程は，一般に文章題を理解する過程と，理解した内容に基づいて文章題を解く過程に区分できる（例えば，Hinsley, Hayes & Simon, 1977; Mayer, 1992, 1999; 多鹿，1995，1996）。この節で取り上げるフォーマルな知識は算数文章題解決に影響を与える知識であり，文章題の理解過程と解決過程において働く知識である。

4－1　算数文章題の理解過程に影響を与える知識

算数文章題の理解過程において利用される知識は，文章題の意味を理解するための知識と算数の概念に関する知識である。文章題を理解するとは，与えられた文章題を読んで問題文に記述されている内容に即したメンタルモデル（mental model）を構成することである。ここで述べるメンタルモデルとは，子どもが文章題を読んで一文毎の意味を理解し（通常，これを算数文章題の変換過程と呼ぶ），文章題に記述されている内容に関連する知識を利用して文間の関係をまとめ上げた（通常，これを算数文章題の統合過程と呼ぶ）知識構造を意味する。このことから，文章題の理解過程において影響を与える知識は，算数文章題に表現される文内容の意味を理解するための知識と，文内容に対応する算数概念に関する知識を必要とすることが理解できる。

文章題の意味を理解するための知識とは，具体的には言語的な知識であり，宣言的な知識といえる。学校教育において営々と築いてきた言語に関わる世界に関する知識である。Kintsch (1994, 1998) は個々の文の内容の理解に基づいて構成された知識表象をテキストベース(textbase)と呼んでいる。算数文章題を解決するためには，子どもはまずテキストベースを構成することが必要となる。

それでは，テキストベースを構成すれば算数文章題が解決できるかというと，そうではない。文章題の意味を理解するための知識だけでなく，算数の概念に関

する知識も必要とされる。算数の概念に関する知識とは，足し算や引き算のような数に関わる手続き的知識を意味するのではない。上述したGelman & Gallistel（1978）で説明した数理解の原理，あるいは割合の概念理解を始めとして数の集合の理解に関わる部分―全体スキーマや集合の大きさを比較したり量の増減理解に関わる量の比較に関するスキーマ，更には算数・数学に固有の数量概念の理解，などの数量概念に関する知識を意味する。算数文章題の統合過程とは，まさにこのような算数・数学に関して構成している算数概念の知識をテキストベースに統合する過程であるといえる。算数の問題が正しく解けるとは，学習者が算数問題文の文意を理解し，かつ問題解決を支えるメンタルモデルの構成に最適の算数概念の知識を文意の理解に適用した結果であると考えられる。Kintsch（1994, 1998）は既有知識に統合されて構成された知識表象を状況モデル（situation model）と呼ぶが，算数問題解決において構成されるメンタルモデルとは，状況モデルと考えてよい。

Tajika, Nakatsu & Nozaki（2001）は，上記のメンタルモデルを構成することが算数文章題解決にとって必要不可欠であることを，１年間にわたる縦断的方法に基づいて明らかにした。

Tajika et al.（2001）は小学５年生を３群に分けて算数割合文章題を解かせた。算数の学力に関する３群の等質性を確認した後，訓練群ではコンピュータ操作による２時間のメンタルモデル形成訓練を行い，その後割合文章題を解いた。授業群では２時間の割合文章題に関する授業を通常の授業後に余分に受け，その後割合文章題を解いた。統制群は，通常の授業後に割合文章題を解いた。３群は，最初の文章題解決の５ヶ月後と１年後に，再び同一の割合文章題を解き，併せて転移課題として割合文章題とは異なるタイプの文章題を解いた。

訓練群の子どもが受けるメンタルモデル形成訓練とは，コンピュータ利用による線分図作成の訓練であった。様々な先行研究結果（例えば，Mayer, 1999；多鹿, 1996）から，割合文章題の解決を促進する手段として，線分図を作成することが明らかにされている。当該の割合文章題の解決につながる線分図を作成できることは，子どもが文章題の文意を適切に理解できる言語の知識と割合に関する算数・数学の概念的知識とを適切に統合したことを意味する。勿論，算数問題解決において，知識の統合を見る課題は何も線分図の作成だけに制限されない。算数の問題タイプ（例えば，この問題は割合の問題であるとか濃度を求める問題であるという算数問題解決における問題のタイプ）を適切に認知したり，問題文の読解後に解決に必要な情報と不必要な情報を区分したりすることは，メンタルモデルの形成と深く結びついている。

Tajika et al.（2001）の実験の結果，(1)割合文章題の解決結果に関して，訓練群は授業群や統制群に比べて１年にわたって高いものであった。(2)転移課題の解決結果に関して，３群間に成績の差はなかった。

第１の結果に関して，訓練群ではコンピュータに写し出された中央線を自在に操作することによって，当該の割合文章題解決につながる線分図を作成した。コンピュータ上では，問題文の提示に併せて中央線が写し出され，次に行う作業が子どもに提示され，子どもはその作業を実行した。例えば，「あきら君は妹におはじきを15個あげました。妹にあげたおはじきの数は，はじめにもっていたおはじきの0.6倍です。あきら君がはじめにもっていたおはじきの数はいくつですか。」という問題文に対し，中央線が提示された。コンピュータのディスプレーの下には，「妹にあげたおはじきの数を線分図（中央線）に書き込む」と作業が提示され，子どもは中央線を操作することでその作業を実行した。その後，「はじめにもっていたおはじきを線分図に書き込む」，「１を線分図に書き込む」，「0.6を線分図に書き込む」と，作業の提示，その作業の実行，を繰り返した。勿論，作業の実行を間違えば訂正することが可能であった。子どもはこのような課題を日をおいて２度繰り返した。

子どもはコンピュータとの相互交渉を通して，割合の概念理解につながる「部分―全体関係」，「数量の比較」，「もとにする量と比較する量」などの様々な概念を把握し，問題文の理解の成果に統合したといえる。更に，このようにして獲得されたメンタルモデルは，少なくとも１年を通して訓練群の子どもに維持されていたことも確かめられた。

第２の結果は，例え割合文章題を適切に解いたとしても，他の問題タイプの解決には転移しないことを意味する。「部分―全体関係」や「数量の比較」に関する知識は，算数一般の理解に適用できる知識である。このような知識を有していると他の算数問題にも適切に適用されると考えられたが，結果はそうではなかった。適切に転移を促すためには，当該の算数文章題解決に関わる算数概念の知識を必要とするのかも知れない。あるいは，２時間程度のコンピュータ利用による知識獲得だけでは，上述した「部分―全体関係」や「数量の比較」の知識は訓練群でも十分には獲得されていなかったのかも知れない。算数問題解決の転移に関しては今後の課題である。

４―２　算数文章題の解決過程に影響を与える知識

算数文章題解決は，文章題の理解過程において，メンタルモデルを適切に構成できればよしとされるものではない。学習者が問題理解に適したメンタルモデルを構成した後，問題を解かなければならない。問題を

解くためには，問題の理解過程において構成したメンタルモデルに基づいて，正解を得るための方略を選択して立式し，四則計算を適切に実行することが必要となる。

立式するために最適の解決方略を選択することは，問題解決にとって重要な過程である。メンタルモデルから立式のための解決方略を選択するためには，方略的知識を必要とする。方略的知識はある種の手続き的知識といえるだろう。「ある種」の手続き的知識といったのは，四則計算のようなアルゴリズムに則った手続き的知識ではなく，理解過程で構成したメンタルモデルから立式するための技能に関する手続き的知識という意味からである。方略的知識は問題に依存的であり，例えば割合の文章題解決における方略的知識では，比較量を求める場合であれば「かけ算」を適用し，基準量を求める場合であれば「割り算」を適用する，といったようなものである。但し，問題文に記述された数字のみを用いて，このような方略的知識を機械的に適用すれば，しばしばエラーを生み出すこともある。それ故，方略的知識の運用には，「これでよいのか，得られた数値は基準量を超えていないか，……」などのメタ認知を必要とする。

方略的知識を適用した後は，四則の計算を実行しなければならない。四則計算は手続き的知識といえる。標準的なアルゴリズムに従って四則の計算を実行することにより，方略を適用して構成された式は適切に解決される。演算を適切に実行することによって，算数文章題は最終的に解決できたといえる。

しかしながら，四則計算は低学年ではしばしばエラーを生み出す。勿論，低学年だけでなく高学年でも，小数や分数の計算となると計算のできない場合が見られる。最近では分数の計算ができない大学生が評判になっているが。

小学校に入学する前の子どもは，「２＋３」のような数の事実を，計数による方法を使ったり，解答を記憶から導いたり，大きい方の数からスタートして小さい方の数を加えていく方法を使ったり，あるいは推測によったりなど，様々な方法を用いて解くことが知られている(Siegler, 1987)。このように，たとえインフォーマルな手続き的知識といえども，多様な方略を使って四則計算を実行する。しかし，学校教育を受ける過程で，子どもは四則計算の基本的なアルゴリズムの知識を獲得し，難しい問題を易しい問題へ分解したり，概算の知識を使ったりしながら計算を実行するといえる。

四則演算の知識を獲得しているからといって，必ずしも適切にその知識を適用しているとは限らない。繰り上がりや繰り下がりのある３桁同士の足し算や引き算などでしばしば見られるように，子どもはときとして「バグ」と呼ばれる一貫して間違った計算方略を適用することもある（Brown & Burton, 1978)。計算のような手続き的知識を正しく子どもに体得させるには，これまでのところ，繰り上がりや繰り下がりを含む基本的なアルゴリズムを反復練習させる方法以外は見出されていない。技能のような手続き的知識を獲得するには，練習方法には工夫の余地があるとしても，反復練習が獲得の基本とされている（例えば，Norman, 1982)。

5 引 用 文 献

Antell,S., & Keating, D. 1983 Perception of numerical invariance in neonates. *Child Development,* 54, 695-701.

Brown, J.S., & Burton, R.R. 1978 Diagnostic models for procedural bugs in basic mathematical skills. *Cognitive Science,* 2, 155-192.

Chi, M.T.H., & Klahr, D. 1975 Span and rate of apprehension in children and adults. *Journal of Experimental Child Psychology,* 19, 434-439.

Davis, H., & Perusse, R. 1988 Numerical competence in animals: Definitional issues, current evidence and a new research agenda. *Behavioral and Brain Sciences,* 11, 561-615.

Fuson, K.C. 1988 *Children's counting and concepts of number.* New York: Springer.

ゲルマン, R.・ガリステル, C.R. 小林芳郎・中島実（訳）1989 数の発達心理学 田研出版 (Gelman, R., & Gallistel, C.R. 1978 *The child's understanding of number.* Cambridge, MA: Harvard University Press.)

Ginsburg, H.P., Klein, A., & Starkey, P. 1998 The development of children's mathematical thinking: Connecting research with practice. In I.E.Sigel & K.A.Renninger (Eds.), *Handbook of child psychology: Child psychology in practice* (5th ed., vol. 4, pp.401-476). New York: Wiley.

Hauser, M.D. 2000 *Wild minds: What animals really think.* New York: Henry Holt.

Hiebert, J. (Ed.). 1986 *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics.* Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Hiebert, J., & Carpenter, T.P. 1992 Learning and teaching with understanding. In D.A.Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-97). New York: Macmillan.

Hinsley, D.A., Hayes, J.R., & Simon, H.A. 1977 From words to equations: Meaning and representation in algebra word problems. In M.A.Just & P.A.Carpenter (Eds.), *Cognitive processes in comprehension* (pp. 89-106). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kintsch, W. 1994 Text comprehension, memory, and learning. *American Psychologist,* 49, 294-303.

Kintsch, W. 1998 *Comprehension.* Cambridge, UK: Cambridge University Press.

小林登 1993 こどもは未来である 岩波書店

Mayer, R.E. 1992 *Thinking, problem solving, cognition* (2nd ed.). New York: W.H.Freeman.

Mayer, R.E. 1999 *The promise of educational psychology: Learning in the content areas.* Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall/Merrill.

ノーマン, D.A. 富田達彦（訳）1984 認知心理学入門－学習と記憶－ 誠信書房
(Norman, D.A. 1982 *Learning and memory.* San Francisco: W.H.Freeman.)

Nunes, T., & Bryant, P. 1996 *Children doing mathematics.* Oxford, UK: Blackwell Publishers.

Nunes, T., Schliemann, A.-L., & Carraher, D. 1993 *Street mathematics and school mathematics.* New York: Cambridge University Press.

岡本ゆかり 1995 低学年の文章題 吉田甫・多鹿秀継（編）認知心理学からみた数の理解（pp.83-101）北大路書房

Rittle-Johnson, B., Siegler, R.S., Alibali, M.W.2001 Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of Educational Psychology,* 93, 346-362.

Siegler, R.S. 1987 The perils of averaging data over strategies: An example from children's addition. *Journal of Experimental Psychology: General,* 116, 250-264.

Silver, E,A. 1986 Using conceptual and procedural knowledge: A focus on relationships. In J.Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp.181-198). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Starkey, P. 1992 The early development of numerical reasoning. *Cognition,* 43, 93-126.

Starkey, P., & Cooper, R.G. 1980 Perception of numbers by human infants. *Science,* 210, 1033-1035.

Starkey, P., Spelke, E.S., & Gelman, R. 1983 Detection of intermodal numerical correspondences by human infants. *Science,* 222, 179-181.

Starkey, P., Spelke, E.S., & Gelman, R. 1990 Numerical abstraction by human infants. *Cognition,* 36, 97-127.

Sulkowski, G.M., & Hauser, M.D. 2001 Can rhesus monkeys spontaneously subtract? *Cognition,* 79, 239-262.

多鹿秀継 1995 高学年の文章題 吉田甫・多鹿秀継（編）認知心理学からみた数の理解（pp.103-119）北大路書房

多鹿秀継 1996 算数問題解決過程の認知心理学的研究 風間書房

Tajika, H., Nakatsu, N., & Nozaki, H. 2001 A longitudinal study of the effects of computer-based diagrams on solving word problems. *Educational Technology Research,* 24, 1-8.

Wynn, K. 1992 Addition and subtraction by human infants. *Nature,* 358, 749-750.

(平成13年8月21日受理)