

既習事項とのつながりをもとにして考え、数学的 思考力・表現力を伸ばそうとする生徒の育成 - 3年「関数 $y=ax^2$ 」の学習を通して -

豊田市立竜神中学校 澤田 有希

1 はじめに

今回私の担当した学年では、数学の授業を1年生は一斉指導、2・3年生は少人数指導（1クラス2展開・均質に分ける）で行った。2年生の当初は人数が少ないことで、緊張して授業を受ける雰囲気もあったが、慣れてくると「少人数だから分からないことも気軽に質問できる。」「たくさん当ててもらえて（発言できるので）うれしい。」と好意的に受け止める声が聞かれるようになった。

数学の授業に対して、真面目に取り組むことのできる生徒が多い。計算領域は、生徒に好意的に受け止められている。それは、パターン化がしやすく、「問題をたくさん解けば早く正確に計算できる」という経験を生徒自身も実感しやすいからではないかと考えられる。しかし、計算領域の学習が終わるとともに、「数学は分からない。」「やっぱり数学は難しい。」という相談を受けることが多くなる。特に、関数の単元に苦手意識を持っている生徒は少なくない。また、その苦手意識は、訳の分からないものに出会う恐怖感にも似たものを感じる。そこで、2年生の「一次関数」を学習する際に、1年生で学習した「比例・反比例」の単元を復習し、比例との共通点や相違点に注目させて学習することにした。すると、授業後の自己評価用紙に「比例のとき（の傾き）と考え方が同じ。」「切片を見つけてグラフをかけばいい。」と比例の考え方が使えることで、ほっとした様子がうかがえた。授業でも、表やグラフを学習する度に、「比例との共通点は何?」と聞くと、多くの生徒が挙手し、つたないながらも自分の考えを発表することができた。学習が進み、傾きや切片が分数や大きな数になると、混乱してしまう生徒も出てきた。その都度、考え方を復習したり、互いに教え合ったりしながら学習を進めたが、生徒同士の教え合いは行き詰ることも多かった。

そこで、3年生の「関数 $y=ax^2$ 」では、2年間の学習を踏まえ、既習の関数をもう一度復習し、共通点や相違点に注目し考えることで、関数の見方や考え方を育てたいと考えた。また、新学習指導要領で期待される「言語活動」を充実させることで、数学の面白さを実感し、数学的思考力・表現力を伸ばすことができるのではないかと考え、研究テーマを「既習事項とのつながりをもとにして考え、数学的思考力・表現力を伸ばそうとする生徒の育成」とした。

2 研究の目標

(1) めざす生徒像

- ・既習事項とのつながりを考え、新しい学習内容に生かすことを大切にしようとする生徒
- ・数学的事象の理解を深め、数学的思考力や表現力を伸ばそうとする生徒

(2) 仮説

仮説1：一次関数や反比例を復習する機会を設けることで、関数 $y=ax^2$ の学習においても、表やグラフ、式に注目し共通点や相違点を考えながら学習し、関数の見方や考え方を育てることができるだろう。

仮説2：既習事項と比較して見つけた関数の特徴や新しく学習する関数 $y=ax^2$ について、まとめ、その発表をもとに意見交換をすることで、言葉だけでなく式や表、グラフを用いた言語活動を取り入れることで数学的思考力や表現力を伸ばすことができるだろう。

(3) 手だて

仮説1を検証するための手だて

- ・単元の導入において一次関数や反比例を復習し、スパイラル的に学習する場を設定し、「 $y=ax^2$ 」で表される関数を式や表、グラフで考えることができる授業を実践する。

仮説2を検証するための手だて

- ・数学レポート作りや発表、意見交換を通して、関数 $y=ax^2$ の特徴を一次関数と比較したり、二次関数へとつながる考えを持たせたりする。

(4) 単元構想

※次ページ参照

(5) 抽出生徒

生徒A・・・学習に対する意欲が高い。計算問題では、積極的に発言できるが、説明を求められると、ノートにはよい視点で書かれているが、全体の前で発表することはできない。事前アンケートでは、関数はばっちり分かっていると。比例や反比例について式を用いて説明することはできた。今回の数学レポートでは、独自の視点でまとめ、グループに発表し認められることを通して、今後も自分の考えに自信を持って発表できるようになってほしい。

生徒B・・・他の教科に比べて数学は好きと感じている。解けると楽しいからと、その理由を挙げていた。しかし、じっくりと物事を考えることが苦手で、できないと思いついて投げ出してしまうことも多い。関数についての理解度も高くなく、「一次関数ってなんだったっけ？」と事前アンケートの前に話していた。数学が苦手だと感じている生徒ともに、基本に立ち戻り、時にはアドバイスを与える立場として粘り強く取り組むことができるようになってほしい。

4 単元構想 [14時間完了]

		学習内容	○既習事項との関連 ☆言語活動																																				
関数とグラフ	1	<p>一次関数や反比例ではない関数を知ろう①</p> <ul style="list-style-type: none"> ・水そうに1分間に3Lずつ水をいれていく。このとき、x分後の水の量yL ・12kmの道のりを、毎時xkmの速さで進むとき、かかった時間y時間 ・傾きが-2で点$(3, -1)$を通る直線 ・底辺xcm、高さ$2x$cmの三角形の面積ycm² <p>表から$y = ax^2$の特徴を調べてみよう②</p> <p>$y = x^2$</p> <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <tr><td>x</td><td>-3</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>y</td><td>9</td><td>4</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>4</td><td>9</td><td>16</td></tr> </table> <p>$y = 3x^2$</p> <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <tr><td>x</td><td>-3</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>y</td><td>27</td><td>12</td><td>3</td><td>0</td><td>3</td><td>12</td><td>27</td><td>48</td></tr> </table> <ul style="list-style-type: none"> ・表を見るとxが2倍、3倍となると、yは4倍、9倍となる ・$x=0$のとき$y=0$ ・$y=3x^2$のyはx^2の3倍 ・xの値の絶対値が同じとき、yの値が同じになる ・$y=x^2$、$y=3x^2$では、xの値にかかわらず、$y \geq 0$ <p>グラフから$y = x^2$の特徴を調べよう③</p> <ul style="list-style-type: none"> ・$x=0$、$y=0$だから原点を通る ・細かく座標をとると、曲線になる ・y軸対称のグラフになる <p>グラフから$y = ax^2$の特徴を調べよう④</p> <ul style="list-style-type: none"> ・原点を通る放物線のグラフ ・y軸対称 ・$a > 0$のグラフは上に開いたグラフ x軸の上にかくことができる ・$a < 0$のグラフは下に開いたグラフ x軸の下にかくことができる ・aの値によってグラフの開き具合が決まる ・$y = ax^2$と$y = -ax^2$のグラフはx軸対称 <div style="text-align: center;"> </div> <p>比例定数を見つけよう⑤</p> <ul style="list-style-type: none"> ・グラフの開いた向き、開き具合から比例定数を見つける ・グラフから、通る点の座標を読み取って比例定数を見つける ・yはx^2に比例し、$x=a$、$y=b$となるx、yの関係を式に表す ・表から、x、yの関係を式に表す 	x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	y	9	4	1	0	1	4	9	16	x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	y	27	12	3	0	3	12	27	48	<p>○一次関数や反比例になる関数を考え、関数は式や表、グラフで考えることができることをおさえる。</p> <p>☆「表では～」 「グラフは～」と何をもとに考えたかが分かるように説明させる。</p> <p>○前時の学習をもとに、表を縦に見たり、横に見たりして考えることをおさえる。</p> <p>☆「比例と同じように$x=0$のとき、$y=0$となる。」「これまでの関数と違って～」のように、これまで学習した関数と比較させる。</p> <p>○$y = x^2$のグラフのかき方を復習し、比例定数の違う関数のグラフをかく。</p> <p>☆$y = x^2$のグラフをもとに、共通点と$a > 0$、$a < 0$の場合に分けられることを確認する。</p> <p>☆これまで学習したことをもとに、正しい答えが分かるだけでなく、どうしてそうなるのか(理由)を考えながら問題に取り組むようにする。</p>
		x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4																													
		y	9	4	1	0	1	4	9	16																													
		x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4																													
		y	27	12	3	0	3	12	27	48																													

<p>2</p> <p style="writing-mode: vertical-rl;">y a² x² の値の変化</p>	<p>y = ax²の値の増減と変域を調べよう⑥</p> <ul style="list-style-type: none"> ・ a > 0 のとき x ≤ 0 の範囲では y の値は減少、x ≥ 0 の範囲では y の値は増加 x がどんな値をとっても y ≥ 0、最小値は 0 (x = 0) ・ a < 0 のとき x ≤ 0 の範囲では y の値は増加、x ≥ 0 の範囲では y の値は減少 x がどんな値をとっても y ≤ 0、最大値は 0 (x = 0) <p>y = x² の x に範囲のあるとき、変域はどうなるのか</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <p>-3 ≤ x ≤ -1</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>-2 ≤ x ≤ 3</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>1 ≤ x ≤ 4</p> </div> </div> <ul style="list-style-type: none"> ・ x = 0 を範囲に含んでいるかどうかには注意して考える必要がある。 <p>変化の割合を調べよう⑦</p> <p>y = x² の変化の割合を求めよう</p> <p>y = x²</p> <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <tr> <td>x</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>4</td> <td>9</td> <td>16</td> </tr> </table> <ul style="list-style-type: none"> ・ x が 1 ずつ増加するとき、変化の割合は 1、3、5、7 となる ・ x の値が 1 から 3 まで増加するときの変化の割合は 4 ・ 一次関数と違って、変化の割合は一定ではない 	x	0	1	2	3	4	y	0	1	4	9	16	<p>○一次関数で考え方の復習をする。</p> <p>y = ax + b</p> <p>a > 0 右上がりのグラフ y の値は増加し続ける</p> <p>a < 0 右下がりのグラフ y の値は減少し続ける</p> <p>x に範囲のあるときは、両端を考える。</p> <p>○一次関数をもとに変化の割合の求め方を確認する。</p> <p style="text-align: center;">変化の割合 = $\frac{y \text{ の増加量}}{x \text{ の増加量}}$</p> <p>変化の割合 = 傾き 一次関数の変化の割合は一定</p>
x	0	1	2	3	4									
y	0	1	4	9	16									
	<p>関数 y = ax²についてまとめよう⑧⑨⑩</p> <ul style="list-style-type: none"> ・ 一次関数との特徴の違いをまとめてみよう。 ・ a の値によってグラフがどのように変わるかをまとめよう。 ・ どのようなときに関数 y = ax² の比例定数が決まるかを考えてみよう。 ・ 一次関数と関数 y = ax² のグラフが交わる問題を考えてみよう。 	<p>★自分のテーマに沿って、数学术語 (放物線、比例定数、y の値の増減) や式、表、グラフを用いて分かりやすくまとめる。</p>												
<p>3</p> <p style="writing-mode: vertical-rl;">関数 y a² x² の利用</p>	<p>身のまわりの関数を考えよう⑪⑫</p> <ul style="list-style-type: none"> ・ 車の制動距離は関数 y = ax² で表される ・ 振り子の長さや周期も関数 y = ax² で表される ・ 変化の割合と平均の速さ <p>いろいろな関数⑬</p> <ul style="list-style-type: none"> ・ 階段状になるグラフがある ・ y = x² - 3 はどんなグラフ? ・ y = x³ はどんなグラフ? <p>練習問題⑭⑮</p> <ul style="list-style-type: none"> ・ 練習問題を解く ・ 単元テスト 	<p>○身のまわりの現象について、y = ax² と深い関係のある事象について考える。</p> <p>○これまでの関数と比較しながら考えさせる。</p>												

3 研究の実際

(1) 既習事項を復習できる授業・・・手だて①

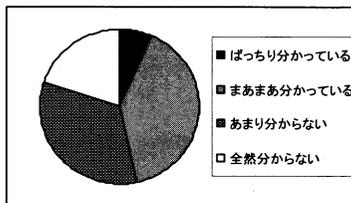
授業を始める前に、関数に対する意識調査と現段階での関数の理解度を把握するために、アンケートを行った。【資料1】その結果、関数に苦手意識を持っている生徒が予想したほど多くないことが分かった。これまで学習した関数について知っていることでは、式で表すことができるくらいで、表やグラフの特徴について触れていた生徒は少なかった。そのため、この単元に入る前に、関数について理解を深めておく必要を感じ、これまでの関数を復習することのできる授業を行うことにした。【資料2】このようにして、関数を考えるときに、式や表、グラフの3つを複合的に活用し考えていくことを確認し、反比例、一次関数、関数 $y = ax^2$ となる問題を考えた。関数 $y = ax^2$ となる関数は、これから学習することであるが、文字式の考え方を使って式に表すことができた。また、 x の値を1つずつ変えていくことで、表も考えることができた。グラフも表で分かったことをもとに、座標をとったが、「なんかおかしい。」と多くの生徒の手が止まった。そこで、まだよく分からないこの関数をこれから学習していくことを確認した。この日の、自己評価カードには、【資料3】のようにかかれていた。それぞれの

関数について順を追って確認していったことで、抽出生徒Bも、あきらめずに新しく学習する関数を式に表そうと取り組むことができた。どちらかというに関数に苦手意識を持っていた生徒が、これまで学習したことと同じように考えて粘り強く取り組むことができた。

この後、関数 $y = ax^2$ の表やグラフの特徴を考えるときには、反比例や一次関数との共通点や相違点を常に意識させて取り組ませた。表の特徴では、「比例と同じように $x = 0$ 、 $y = 0$ となるが、あとはまったく違う。」「関数 $y = ax^2$ では、増えたり減ったりする。」「 y の値は、 $y = 0$ を境に同じ値になる。」ことを確認することができた。また、グラフの特徴では、「1つのグラフで、上がったり下がったりする。」「曲線だけど、反比例とは違う曲線になる。」ことを確認した。また、比例定数の違うグラフをかくときには、 $y = x^2$ のグラフをもとに、どのような変化があるかを考えることができた。

このように、既習事項との共通点や相違点を考えることで、習得すべき課題に自ら気づくことができる生徒が増えたように感じた。また、些細なことも見つけたことを認めていった

【資料1】関数の理解度



【資料2】これまでの関数を復習する授業

T : 1分間に3Lずつ水そうに水を入れていきます。このとき、 x 分後の水の量 y L とします。どのように表せますか？
 C1 : $y = 3x$ です。
 T : 他に表し方はありますか？近くの人と相談しましょう。
 (2分ほど待つ)
 T : 教えてください。
 C2 : 表があった。
 (表を黒板にかく)
 T : そうだね。まだある？
 C3 : グラフにもかける。
 (グラフを黒板にかく)
 T : まだある？
 C4 : もうないと思う。

【資料3】授業後の自己評価カードのコメント

<抽出生徒A>
 復習をした。新しい関数も楽しみです。
 <抽出生徒B>
 忘れていたことがたくさんあった。
 ④ $(y = ax^2)$ も、式に表すことができた。

ことで、より詳しく相違点や変化の様子を見つけたり考えたりする力を高めることができた。

(2) 数学レポートの実践・・・手立て②

数学的思考力や表現力を高めるために本単元の第8・9時にこれまでの学習をまとめる数学レポート作りを、第10時にまとめたレポートの発表を行うことにした。

前単元「二次方程式」の終了時に、次の単元では、数学レポートを作ることを生徒に伝えた。生徒にとっては初めての試みのため、どのようにレポートを作るかをつかませるため二次方程式における数学レポートを教師が作成し説明した。

【資料4】授業の中でわかったことやもっと知りたいことをまとめるよいことを伝えた。

あらかじめ、数学レポートについて説明したため、スムーズにテーマを決定し、レポート作りに入ることができた。これまでの授業の中で比例・反比例や一次関数と関数 $y=ax^2$ をさまざまな場面で比較しながら学習してきたので、レポートテーマに選んだ生徒が多かった。教科書や授業用ノート、参考資料（毎日の課題の付属の参考書や家庭学習で使っている参考書）をもとに、まとめることができた。

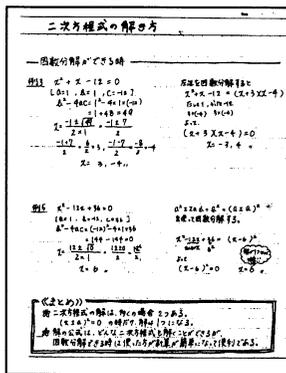
また、数学が得意な生徒は一次関数と関数 $y=ax^2$ との応用問題を解き解説を加えてまとめることができた。

生徒Aは、変化の割合を使った問題を簡単に解くための方法をレポートにまとめた。変化の割合 $=y$ の増加量 $/x$ の増加量で求められることを確認した上で、比例定数と x の増加量がわかれば、変化の割合が求められることを文字式を使って正しいことを証明した。【資料5】

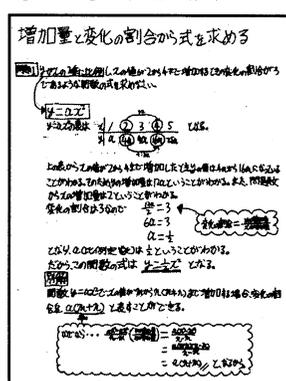
生徒Bは、比例定数の見つけ方を自分なりにまとめた。また、自分で問題を作り、比例定数を見つけるための解説を加えた。【資料6】

レポートの発表では、レポート作成者の工夫を意識して聞くことができるように、内容が似ている生徒を意図的に同じグループに配置した。また、指定された座席で決められた発表順にすることで、内容が深められるようにした。さらに、ホワイトボードにレポートを貼り、グループで発表を行った。一人一人に付箋を持たせ、発表を聞いて気づいたこと、分かったことをかき、最後に発表者に渡せるようにした。

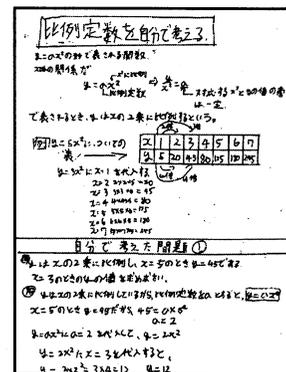
【資料4】教師作成の数学レポート



【資料5】生徒Aの数学レポート

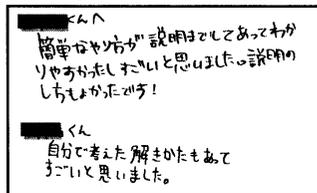


【資料6】生徒Bの数学レポート



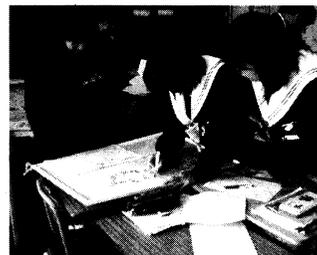
生徒Aは、一生懸命レポートの発表を行った。グループの仲間から「簡単な解き方が説明してあって、すごいと思った。説明のしかたもよかった。」「今まで知らなかった新しい解き方だった。使ってみたい。」と高評価を得ていた。【資料7】

【資料7】生徒Aへの付箋のコメント

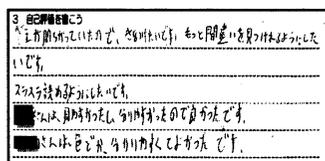


<自分の数学レポートへの質問に対し一緒に考える生徒B>

生徒Bは、発表の途中で、「それってどういうこと？」と質問を受けた。最初は戸惑っていたが、質問した生徒が、ホワイトボードに計算式を書き始めると、その様子を見ながら、「この値をxに代入して、この値をyに代入して…」とたどたどしいながらも、一緒に考えながら最後まで親身になって説明をしていた。同じグループの生徒も最後には全員納得して発表を終えた。この日の自己評価には、自分の反省だけでなく、班の仲間のまとめ方の工夫やよさを見つけていた。【資料8】他の生徒のまとめから、「グラフや図を使うと、聞いている人にも伝わりやすい。」と、次回参考になりそうなこともしっかりとつかんでいた。



【資料8】生徒Bの自己評価



4 研究の成果と課題

(1) 研究の成果

既習事項を復習することを通して、これまでの学習で分かっていなかったことを再確認させることができた。また、指導する側も生徒がどこまで理解しているかを把握することもできた。このようなスパイラル的な学習が積み上げ教科といわれる数学には必要である。新しい内容を学習するだけでなく、比較しながら考えていくことがより深い理解へとつながるとともに、数学的思考力を伸ばすことができるのだと感じた。

学習したことを数学レポートとしてまとめるのは初めての試みであった。そのため生徒には、単元の最初に、教師が作成した二次方程式における数学レポートの見本を提示した。単元全体を通して、これまで学習した関数と比較して学習を進めてきたことで、そのことを意識してまとめようとする生徒が多かった。

(2) 今後の課題

数学レポート作りでは、内容はこれまで学習した関数と関数 $y = ax^2$ との、グラフや式、表の特徴など、基本的な内容のまとめが多かった。今後は、発展的な内容に挑戦したり、独自の視点(解き方)でまとめたりすることのよさにも目を向けさせたい。また、発表では、一生懸命伝えようとする姿がみられた。しかし、発表をして終わりではなく、表現力を伸ばすために、聞き手が「これはどういうこと?」や「こうしたらどう?」と関わりあえるような場面を作り、伝えるだけでなく伝え合う力をつけさせていきたい。