イプシロン　2011.Vol.53, 1－8

二項係数を割り切る素数の最高指数と
繰り下がりの回数

愛知教育大学数学教育講座　石戸谷　公　直

0. はじめに

p を素数とする。正の整数 a に対して，a の素因数分解にあらわれる p の指数，すなわち，p^m が a を割り切るような整数 m の最大値，は通常 $\nu_p(a)$ で表される。これをここでは，a における p の最高指数と呼ぶことにする。本稿の目的は，二項係数における最高指数の求め方についての一つの初等的な解釈を与えることと，二項係数の最高指数の表を，観察から法則を推測し証明を試みるという教材として活用することの提案である。

1. 二項係数における最高指数の求め方の一解釈

整数 $n\,(\geqq 0)$ を p 進表示したときに各桁に表れる数の和を $s_p(n)$ で表すことにする。

階乗 $n!$ の最高指数については次が成り立つ（ [1] 第 1 章 $4〔問題 13〕)：

$$\nu_p(n!)=\frac{n-s_p(n)}{p-1}$$

一方，関数 ν_p は加法的：　$\mu_p(ab)=\nu_p(a)+\nu_p(b)$

であるから，　$\nu_p\left(\dfrac{c}{b}\right)=\nu_p(c)-\nu_p(b)$　（ただし，c は b の倍数）

も成り立つ。したがって，二項係数 $\dbinom{n}{r}=\dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$ については

$$\nu_p\left(\binom{n}{r}\right)=\nu_p\,(n!)-\nu_p\,(r!)-\nu_p\big((n-r)!\big)=\frac{s_p(r)+s_p(n-r)-s_p(n)}{p-1}$$

が得られる。上の等式の右辺の値は次のようにも解釈できる。

補題 1. 二項係数 $\dbinom{n}{r}$ における素数 p の最高指数は，引き算 $n-r$ を p 進表記の筆算で行ったときの繰り下がりの回数に等しい。

［証明］
$$\begin{aligned} n &= a_mp^m+a_{m-1}p^{m-1}+\cdots+a_1p+a_0 & (0\leqq a_i\leqq p-1,\ \ a_m\neq 0)\\ r &= b_mp^m+b_{m-1}p^{m-1}+\cdots+b_1p+b_0 & (0\leqq b_i\leqq p-1)\\ n-r &= c_mp^m+c_{m-1}p^{m-1}+\cdots+c_1p+c_0 & (0\leqq c_i\leqq p-1)\end{aligned}$$

とする（ $b_m=0$ や $c_m=0$ もあり得る ）と，次が成り立つ：

$$\left\{\begin{array}{lllll} c_0 = & & a_0 & -\ b_0 & +\ pK_1\\ c_1 = & -K_1 & +\ a_1 & -\ b_1 & +\ pK_2\\ \ \vdots & & \ \vdots & & \\ c_{m-1} = & -K_{m-1} & +\ a_{m-1} & -\ b_{m-1} & +\ pK_m\\ c_m = & -K_m & +\ a_m & -\ b_m & \end{array}\right.$$

（ K_i は，引き算
$$\begin{array}{rccccc} & a_m & a_{m-1} & \cdots & a_1 & a_0\\ -\,) & b_m & b_{m-1} & \cdots & b_1 & b_0\\ \hline & c_m & c_{m-1} & \cdots & c_1 & c_0\end{array}$$
での，第 i 桁からの繰り下がりの有無：有 $\Rightarrow K_i=1$，無 $\Rightarrow K_i=0$ ）

$$\therefore\ \ s_p(r)+s_p(n-r)-s_p(n)=-\sum_{i=0}^{m}K_i+p\sum_{i=0}^{m}K_{i+1}=(p-1)\sum_{i=1}^{m}K_i$$

$$\therefore\ \nu_p\left(\binom{n}{r}\right)=\frac{s_p(r)+s_p(n-r)-s_p(n)}{p-1}=\sum_{i=1}^{m}K_i=(\text{繰り下がりの回数})\ \blacksquare$$

2．観察と予想

パスカルの三角形において素数 p の最高指数に注目すると $\nu_p\left(\binom{n}{r}\right)$ の表が得られる(末尾参照)。表の観察からいろいろな規則性が推測される。$p=2$ の場合に見てみよう。

$r=2$ の欄を見ていくと，$r=1$ の欄の数値が二重に繰り返し並んでいることに気付く：

$$\nu_2\left(\binom{2}{2}\right)=\nu_2\left(\binom{3}{2}\right)=\nu_2\left(\binom{1}{1}\right),\quad \nu_2\left(\binom{4}{2}\right)=\nu_2\left(\binom{5}{2}\right)=\nu_2\left(\binom{2}{1}\right),\quad \cdots$$

一般に次の等式が成り立つと予想される。

予想 1. $\nu_2\left(\binom{n}{2}\right)=\nu_2\left(\binom{[n/2]}{1}\right)=\nu_2([n/2])$　　($[x]$ は x の整数部分を表す)

$r=3$ の欄と見ていくと，2つずつ，$r=1$ の欄の値と一致，不一致を繰り返している。不一致の部分について，それらの差を見てみると，$r=2$ の欄の1段上の部分と一致している。このことは，不一致の部分に限らず，全体で成り立っている。すなわち，

予想 2. $\nu_2\left(\binom{n}{3}\right)=\nu_2\left(\binom{n}{1}\right)+\nu_2\left(\binom{n-1}{2}\right)$

同様の観点で見てみると，次の各等式も成り立つと予想される：

予想 2-5. $\nu_2\left(\binom{n}{5}\right)=\nu_2\left(\binom{n}{1}\right)+\nu_2\left(\binom{n-1}{4}\right)$

予想 2-6. $\nu_2\left(\binom{n}{6}\right)=\nu_2\left(\binom{n}{2}\right)+\nu_2\left(\binom{n-2}{4}\right)$

予想 2-7. $\nu_2\left(\binom{n}{7}\right)=\nu_2\left(\binom{n}{1}\right)+\nu_2\left(\binom{n-1}{6}\right)=\nu_2\left(\binom{n}{3}\right)+\nu_2\left(\binom{n-3}{4}\right)$

3．予想の証明と一般化

引き算 $\boxed{\begin{array}{r} a_m\cdots a_0\\ -)\ b_m\cdots b_0\\ \hline c_m\cdots c_0\end{array}}$ における繰り下がりの回数を $t\left[\begin{array}{r} a_m\cdots a_0\\ -)\ b_m\cdots b_0\\ \hline c_m\cdots c_0\end{array}\right]$ と略記しよう。

3-1．予想 1 の証明

n の2進展開を $n=a_m\cdot 2^m+a_{m-1}\cdot 2^{m-1}+\cdots+a_1\cdot 2+a_0$ とし，補題1を適用する：

$$\nu_2\left(\binom{n}{2}\right)=t\left[\begin{array}{lcccc} & a_m & a_{m-1} & \cdots & a_1\ \ a_0\\ -) & & & & 1\ \ \ 0\\ \hline & c_m & c_{m-1} & \cdots & c_1\ \ a_0\end{array}\right]=t\left[\begin{array}{lcccc} & a_m & a_{m-1} & \cdots & a_1\\ -) & & & & 1\\ \hline & c_m & c_{m-1} & \cdots & c_1\end{array}\right]$$

ここで $(a_m\,a_{m-1}\ \cdots\ a_1)$ は $\dfrac{n}{2}=a_m\cdot 2^{m-1}+a_{m-1}\cdot 2^{m-2}+\cdots+a_1+\dfrac{a_0}{2}$ の整数部分

の２進表記であるから，再び補題１により，上式の右辺は $\nu_2\left(\binom{[n/2]}{1}\right)$ に等しい。■

上の証明を振り返ると，全く同様の考察で，一般に次が成り立つことがわかる：

漸化式 1. $\nu_p\left(\binom{n}{p^k}\right) = \nu_p\left(\binom{[n/p^k]}{1}\right) = \nu_p\left([n/p^k]\right)$

3-1. 予想 2 の証明

補題 2.

$$t\left[\begin{array}{l} \quad a_m \cdots a_l \ a_{l-1} \cdots a_0 \\ -)\ b_m \cdots b_l \ b_{l-1} \cdots b_0 \\ \hline \quad c_m \cdots c_l \ c_{l-1} \cdots c_0 \end{array}\right] = t\left[\begin{array}{l} \quad a_m \cdots a_l \ a_{l-1} \cdots a_0 \\ -) \qquad\qquad b_{l-1} \cdots b_0 \\ \hline \quad d_m \cdots d_l \ d_{l-1} \cdots d_0 \end{array}\right] + t\left[\begin{array}{l} \quad d_m \cdots d_l \ d_{l-1} \cdots d_0 \\ -)\ b_m \cdots b_l \ \ 0 \ \ \cdots 0 \\ \hline \quad c_m \cdots c_l \ c_{l-1} \cdots c_0 \end{array}\right]$$

［証明］左辺の引き算において第 i 桁からの繰り下がりの有無を，補題 1 の証明のときと同様に K_i で表す (ただし，$K_0 = K_{m+1} = 0$)。同様に，右辺の２つの引き算での第 i 桁からの繰り下がりの有無をそれぞれ G_i, H_i で表す。すると

① $c_i = -K_i + a_i - b_i + pK_{i+1} \quad (0 \leqq i \leqq m)$

② $d_i = -G_i + a_i - b_i'' + pG_{i+1} \quad (0 \leqq i \leqq m)$

③ $c_i = -H_i + d_i - b_i' + pH_{i+1} \quad (0 \leqq i \leqq m)$

ここに $(b_m'', \cdots, b_0'') = (0, \cdots, 0, b_{l-1}, \cdots, b_0)$, $(b_m', \cdots, b_0') = (b_m, \cdots, b_l, 0, \cdots, 0)$

したがって $b_i' + b_i'' = b_i \ (0 \leqq i \leqq m)$ が成り立つから

①－②－③： $-d_i = -K_i + G_i + H_i - d_i + p\,(K_{i+1} - G_{i+1} - H_{i+1})$

$$\therefore \quad K_i - G_i - H_i = p\,(K_{i+1} - G_{i+1} - H_{i+1}) \qquad (i = 0, 1, \cdots, m)$$

$K_0 - G_0 - H_0 = 0$ であるから，順に $K_i - G_i - H_i = 0$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ とわかる。したがって，示すべき等式において，

$$\text{左辺} = \sum_{i=1}^{m} K_i = \sum_{i=1}^{m} (G_i + H_i) = \sum_{i=1}^{m} G_i + \sum_{i=1}^{m} H_i = \text{右辺} \quad ■$$

系 1. $r = p^l r' + r''$, $r'' < p^l$ ならば，$\nu_p\left(\binom{n}{r}\right) = \nu_p\left(\binom{n}{r''}\right) + \nu_p\left(\binom{n-r''}{p^l r'}\right)$

［証明］r の p 進展開を $r = b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \cdots + b_1 p + b_0$ とすると，

$$p^l r' = b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \cdots + b_l p^l, \qquad r'' = b_{l-1} p^{l-1} + \cdots + b_1 p + b_0$$

となる。すると，補題 1，補題 2 により，

$$\nu_p\left(\binom{n}{r}\right) = \nu_p\left(\binom{n}{b_{l-1}p^{l-1} + \cdots + b_0}\right) + \nu_p\left(\binom{n - (b_{l-1}p^{l-1} + \cdots + b_0)}{b_k p^k + \cdots + b_l p^l}\right) \quad ■$$

系 2. r の p 進展開を $r = b_k p^k + b_{k-1} p^{k-1} + \cdots + b_1 p + b_0$ とすると，

$$\nu_p\left(\binom{n}{r}\right) = \nu_p\left(\binom{n}{b_0}\right) + \nu_p\left(\binom{n - b_0}{b_1 p}\right) + \nu_p\left(\binom{n - (b_1 p + b_0)}{b_2 p^2}\right) + \cdots$$

$$+\nu_p\left(\binom{n-\left(b_{k-1}p^{k-1}+\cdots+b_1p+b_0\right)}{b_kp^k}\right)$$

特に $p=2$ のときは，$r=2^{i_h}+\cdots+2^{i_2}+2^{i_1}$ $(i_h>\cdots>i_2>i_1\geqq 0)$ と表すと，

$$\nu_2\left(\binom{n}{r}\right)=\nu_2\left(\binom{n}{2^{i_1}}\right)+\nu_2\left(\binom{n-2^{i_1}}{2^{i_2}}\right)+\cdots+\nu_2\left(\binom{n-(2^{i_{h-1}}+\cdots+2^{i_1})}{2^{i_h}}\right)$$
$$=\nu_2\left(\left[\frac{n}{2^{i_1}}\right]\right)+\nu_2\left(\left[\frac{n-2^{i_1}}{2^{i_2}}\right]\right)+\cdots+\nu_2\left(\left[\frac{n-(2^{i_{h-1}}+\cdots+2^{i_1})}{2^{i_h}}\right]\right)$$

3-3. 一般化

漸化式 2. $\quad \nu_p\left(\binom{pn}{pr}\right)=\nu_p\left(\binom{n}{r}\right)$

［証明］p 進表記での p 倍は左に一桁ずらすだけだから，繰り下がりの回数は不変。■

漸化式 3

$$\nu_p\left(\binom{pn+i}{pr+j}\right)=\begin{cases}\nu_p\left(\binom{n}{r}\right) & (\,0\leqq j\leqq i<p\text{ のとき})\ (\text{ア}).\\ \nu_p\left(\binom{n-1}{r}\right)+\nu_p(n)+1 & (\,0\leqq i<j<p\text{ のとき})\ (\text{イ})\end{cases}$$

［証明］(ア) $i\geqq j$ より，差 $(pn+i)-(pr+j)$ の第 0 桁は $i-j$ となり，第 1 桁からの繰り下がりは生じない。したがって，引き算 $(pn+i)-(pr+j)$ での繰り下がりの回数は引き算 $pn-pr$ での繰り下がりの回数に等しく，漸化式 2 により，引き算 $n-r$ での繰り下がりの回数に等しい。

(イ) 系 1 により，$\nu_p\left(\binom{pn+i}{pr+j}\right)=\nu_p\left(\binom{pn+i}{j}\right)+\nu_p\left(\binom{pn+i-j}{pr}\right)$

$p+i-j=k$ とおくと $0<k<p$，$pn+i-j=p(n-1)+k$ となるから，(ア) により

$$\text{第 2 項}=\nu_p\left(\binom{p(n-1)+k}{pr+0}\right)=\nu_p\left(\binom{n-1}{r}\right)$$

n の p 進展開を $n=a_mp^m+a_{m-1}p^{m-1}\cdots+a_0$ とする。$\nu_p(n)=l$ とおくと，$a_l>0$，$a_{l-1}=\cdots=a_0=0$ であるから，引き算 $(pn+i)-j$ の p 進表記は右のようになる（$'$ は -1 の意)。したがって，

$$\begin{array}{lcccccc} & a_m\cdots & a_{l+1} & a_l & \overbrace{0\cdots 0}^{l} & i\\ -) & & & & & j\\ \hline & a_m\cdots & a_{l+1} & a_l' & p'\cdots p' & k\end{array}$$

$$\text{第 1 項}=\text{繰り下がりの回数}=l+1=\nu_p(n)+1 \quad ■$$

3-3. 特殊な場合

(1) $\quad \nu_p\left(\binom{p^m-1}{r}\right)=0$

(2) $\quad \nu_p\left(\binom{p^m}{r}\right)=m-\nu_p(r)$

［証明］(1) p^m-1 の p 進表記ではどの桁も $p-1$ であるから，繰り下がりは生じない。

(2) $r=p^m$ のときは両辺とも 0 であり，成り立つ。

$r<p^m$ のとき：$\nu_p(r)=l$ とおくと $r=p^lq$，$q=ps+j$ $(1\leqq j<p)$ と表されるから，

$$\begin{aligned}\nu_p\left(\binom{p^m}{r}\right) &= \nu_p\left(\binom{p^m}{p^l q}\right) = \nu_p\left(\binom{p^{m-l}}{q}\right) = \nu_p\left(\binom{p\cdot p^{m-l-1}+0}{ps+j}\right)\\ &= \nu_p\left(\binom{p^{m-l-1}-1}{s}\right) + \nu_p\left(p^{m-l-1}\right) + 1\\ &= 0 + (m-l-1) + 1 = m-l = m-\nu_p(r) \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

4. 応用例

高校数学の知識（二項定理とド・モアブルの定理）と ν_p の値の考察で，次の問題が解決できる。

問題. 座標平面上で，3つの格子点を結んで得られる角のうち，角の大きさが有理数°（すなわち，有理数 $\times\pi$ ラジアン）と表されるものをすべて求めよ。言い換えると，$\tan\theta$ の値が有理数である θ のうち，π の有理数倍として表されるものをすべて求めよ。

［解］ 45° の整数倍のみ。

$\theta = \dfrac{m}{n}\pi,\ \tan\theta = \dfrac{b}{a}$ $(m, n, a, b \in \mathbb{Z}^+,\ a, b$ は互いに素) とすると，

$$a + bi = r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad \left(r = \sqrt{a^2+b^2}\right)$$

$$\therefore\quad (a+bi)^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r^n(\cos m\pi + i\sin m\pi) = \pm r^n \in \mathbb{R}$$

θ が $\pi/4$ の整数倍でないと仮定すると，次のようにして矛盾が生ずる：

a, b の少なくとも一方は 1 より大きい。θ が問題の条件を満たすなら θ の余角も条件を満たすから，必要なら a, b を入れ換えることにより，$b > 1$ と仮定してよい。

$(a+bi)^n \in \mathbb{R}$ より，
$$\sum_{0\le r\le s}\binom{n}{2r+1}(-1)^r a^{n-2r-1}b^{2r+1} = 0 \qquad \left(s = [(n-1)/2]\right)$$

移項して b で割ると
$$a^{n-1}\binom{n}{1} = -\sum_{1\le r\le s}\binom{n}{2r+1}(-1)^r a^{n-2r-1}b^{2r}$$

b を割り切る素数の一つを p とする。a, b は互いに素だから，　$\nu_p(\text{左辺}) = \nu_p(n)$

一方，
$$\begin{aligned}\nu_p(\text{右辺}) &\geqq \min\left\{\nu_p(\text{第 } r \text{ 項}) \mid 1 \leqq r \leqq s\right\}\\ &= \min\left\{\nu_p\left(\binom{n}{2r+1}\right) + 2r \mid 1 \leqq r \leqq s\right\} && [\nu_p \text{ の加法性}]\\ &\geqq \min\left\{\nu_p(n) - \nu_p(2r+1) + 2r \mid 1 \leqq r \leqq s\right\} && [\text{後続の補題 (1)}]\\ &= \nu_p(n) + 1 && [\text{後続の補題 (2)}]\end{aligned}$$

したがって $\nu_p(n) > \nu_p(n) + 1$ となり，矛盾。 ■

補題 (1) $\nu_p\left(\binom{n}{r}\right) \geqq \nu_p(n) - \nu_p(r)$

(2) $x \geqq 3$ なら，任意の素数 p について $\nu_p(x) \leqq x - 2$

［証明］(1) $n = p^m q,\ r = p^l s,\ (p, q) = (p, s) = 1$ とする。$m - l \leqq 0$ なら成立。

$m - l > 0$ なら $\nu_p\left(\binom{n}{r}\right) = \nu_p\left(\binom{p^m q}{p^l s}\right) = \nu_p\left(\binom{p^{m-l}q}{s}\right) \geqq m - l = \nu_p(n) - \nu_p(r)$

(2) $x = p^m q$ として $m + 2 \leqq x$ を示せばよい。

$m \leqq 1 \Longrightarrow m + 2 \leqq 3 \leqq x$； $m \geqq 2 \Longrightarrow m + 2 \leqq p^m \leqq p^m q = x$ ∎

5．数表の活用

5-1．数表の観察

観察から規則性を予想し，証明を試みる，という経験は数学の学習上不可欠であると考える。権威付けのため（？）オイラーを引用する（[3] I 章冒頭の引用；一部改)：

> **観察**の重要性を，純粋数学 $\cdots$ の方面にまで強調することは，少なからず矛盾したことに思われるだろう。$\cdots$ だが事実は，$\cdots$ 今日まで知られている数の諸性質の多くは**観察**によって発見され，しかもその正しさが厳格な証明によって確認されるはるか以前に発見されていたのである。$\cdots$ — オイラー

表を観察してみよう。例えば，0 だけから成る行が所々にあらわれることに気付くだろう。それらがどのような規則で出現するか予想してみよう。それを表現することは，約数・倍数を学習していれば小学生にもできる活動であると思う。

予想ができたら次はそれの証明ということになるが，Polya の指摘（[2] Chap.I §3)

> **3. Supporting contacts.** You should not put too much trust in any unproved conjecture, even if it has been propounded by a great authority, even if it has been propounded by yourself. You should try to prove it or to disprove it; you should *test* it.

にもあるように，証明を試みる前に，「予想が正しければ $\boxed{\text{こう}}$ なるはずだ」ということを “test” すべきである。もし $\boxed{\text{そう}}$ なっていたなら，より強い確信を持って証明に臨めるし，もし $\boxed{\text{そう}}$ なっていなかったら，徒労に終わるはずの試みに時間を費やさずに済む。

5-2．数表の作成

“test” するために，より大きな表が必要となるかもしれない。上の表の作成には BASIC を用いたが，手作業で，パスカルの三角形を経由せずに直接作成することも容易である。

表の作成法：漸化式 $\binom{n}{r} = \binom{n}{r-1} \times \dfrac{n+1-r}{r}$ $(r = 1, 2, \cdots, n)$ より漸化式

$$\nu_p\left(\binom{n}{r}\right) = \nu_p\left(\binom{n}{r-1}\right) + \nu_p(n+1-r) - \nu_p(r) \quad (r = 1, 2, \cdots, n)$$

が得られる。これと，初項 $\nu_p\left(\binom{n}{0}\right) = \nu_p(1) = 0$ より数列全体の値が得られる。

例. $\nu_3\left(\binom{30}{r}\right)$

	r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
	$31-r$		30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	$\cdots$
Ⓐ	$\nu_3(r)$		0	0	1	0	0	1	0	0	2	0	$\cdots$
Ⓑ	$\nu_3(31-r)$		1	0	0	3	0	0	1	0	0	1	$\cdots$
Ⓒ	$\nu_p\left(\binom{30}{r}\right)$	0	1	1	0	3	3	2	3	3	1	2	$\cdots$

Ⓒ $=$ (左のⒸ) $+$ (上のⒷ) $-$ (上のⒶ)

5-3. 作業から気付くこと

表を作りながら気付くこともある。比較するのもおこがましいが，ガウスのエピソード（[4] 第 8 節『予が従来行った無数の計算に於いて，単なる機械的の計算能力を有するものから有効なる助力を得たろうと思われる場合はない』）に一脈通ずるものがあろう。

例えば，上の例では「同じ値が連続する」という現象が周期 3 で起こっている。

一般に，数列 $\nu_p\left(\binom{n}{r}\right)$ $(r=0,1,2,\cdots,n)$ に同じ値が連続する程度が，p と n の関係で定まる。例えば，$n+1$ が 3 の倍数なら 3 個ずつ同じ値が続く。このことは Ⓐ, Ⓑ の欄を作る過程を振り返ってみれば原因がわかり，観察に依らない予想をも可能にする。

このように，二項係数における素数の最高指数に注目することは，

作業 →観察 → 予想 → 検証／反証→ 証明　(反証→観察)

という活動の教材として有効であろうと考える。

参考文献

[1] 高木貞治著「初等整数論講義　第 2 版」，共立出版，1971

[2] G. Polya, *Introduction and Analogy in Mathematics*, Princeton Univ. Press, 1954

[3] G. Polya 著，柴垣和三雄訳「帰納と類比」（上掲書邦訳）丸善株式会社，1959

[4] 高木貞治著「近世数学史談」，岩波文庫，1995

$\boxed{p=2}$

n＼r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
1	0	0																											
2	0	1	0																										
3	0	0	0	0																									
4	0	2	1	2	0																								
5	0	0	1	1	0	0																							
6	0	1	0	2	0	1	0																						
7	0	0	0	0	0	0	0	0																					
8	0	3	2	3	1	3	2	3	0																				
9	0	0	2	2	1	1	2	2	0	0																			
10	0	1	0	3	1	2	1	3	0	1	0																		
11	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0																	
12	0	2	1	2	0	3	2	3	0	2	1	2	0																
13	0	0	1	1	0	0	2	2	0	0	1	1	0	0															
14	0	1	0	2	0	1	0	3	0	1	0	2	0	1	0														
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0													
16	0	4	3	4	2	4	3	4	1	4	3	4	2	4	3	4	0												
17	0	0	3	3	2	2	3	3	1	1	3	3	2	2	3	3	0	0											
18	0	1	0	4	2	3	2	4	1	2	1	4	2	3	2	4	0	1	0										
19	0	0	0	0	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	0	0	0	0									
20	0	2	1	2	0	4	3	4	1	3	2	3	1	4	3	4	0	2	1	2	0								
21	0	0	1	1	0	0	3	3	1	1	2	2	1	1	3	3	0	0	1	1	0	0							
22	0	1	0	2	0	1	0	4	1	2	1	3	1	2	1	4	0	1	0	2	0	1	0						
23	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0					
24	0	3	2	3	1	3	2	3	0	4	3	4	2	4	3	4	0	3	2	3	1	3	2	3	0				
25	0	0	2	2	1	1	2	2	0	0	3	3	2	2	3	3	0	0	2	2	1	1	2	2	0	0			
26	0	1	0	3	1	2	1	3	0	1	0	4	2	3	2	4	0	1	0	3	1	2	1	3	0	1	0		
27	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	2	2	2	2	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	
28	0	2	1	2	0	3	2	3	0	2	1	2	0	4	3	4	0	2	1	2	0	3	2	3	0	2	1	2	0

$p = 3$

$n \backslash r$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
1	0	0																											
2	0	0	0																										
3	0	1	1	0																									
4	0	0	1	0	0																								
5	0	0	0	0	0	0																							
6	0	1	1	0	1	1	0																						
7	0	0	1	0	0	1	0	0																					
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0																				
9	0	2	2	1	2	2	1	2	2	0																			
10	0	0	2	1	1	2	1	1	2	0	0																		
11	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0																	
12	0	1	1	0	2	2	1	2	2	0	1	1	0																
13	0	0	1	0	0	2	1	1	2	0	0	1	0	0															
14	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0														
15	0	1	1	0	1	1	0	2	2	0	1	1	0	1	1	0													
16	0	0	1	0	0	1	0	0	2	0	0	1	0	0	1	0	0												
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0											
18	0	2	2	1	2	2	1	2	2	0	2	2	1	2	2	1	2	2	0										
19	0	0	2	1	1	2	1	1	2	0	0	2	1	1	2	1	1	2	0	0									
20	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0								
21	0	1	1	0	2	2	1	2	2	0	1	1	0	2	2	1	2	2	0	1	1	0							
22	0	0	1	0	0	2	1	1	2	0	0	1	0	0	2	1	1	2	0	0	1	0	0						
23	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0					
24	0	1	1	0	1	1	0	2	2	0	1	1	0	1	1	0	2	2	0	1	1	0	1	1	0				
25	0	0	1	0	0	1	0	0	2	0	0	1	0	0	1	0	0	2	0	0	1	0	0	1	0	0			
26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
27	0	3	3	2	3	3	2	3	3	1	3	3	2	3	3	2	3	3	1	3	3	2	3	3	2	3	3	0	
28	0	0	3	2	2	3	2	2	3	1	1	3	2	2	3	2	2	3	1	1	3	2	2	3	2	2	3	0	0

$p = 5$

$n \backslash r$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
1	0	0																											
2	0	0	0																										
3	0	0	0	0																									
4	0	0	0	0	0																								
5	0	1	1	1	1	0																							
6	0	0	1	1	1	0	0																						
7	0	0	0	1	1	0	0	0																					
8	0	0	0	0	1	0	0	0	0																				
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																			
10	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0																		
11	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0																	
12	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0																
13	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0															
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0														
15	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0													
16	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0												
17	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0											
18	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0										
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0									
20	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0								
21	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0							
22	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0						
23	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0					
24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0				
25	0	2	2	2	2	1	2	2	2	2	1	2	2	2	2	1	2	2	2	2	1	2	2	2	2	0			
26	0	0	2	2	2	1	1	2	2	2	1	1	2	2	2	1	1	2	2	2	1	1	2	2	2	0	0		
27	0	0	0	2	2	1	1	1	2	2	1	1	1	2	2	1	1	1	2	2	1	1	1	2	2	0	0	0	
28	0	0	0	0	2	1	1	1	1	2	1	1	1	1	2	1	1	1	1	2	1	1	1	1	2	0	0	0	0