イプシロン　2000. Vol. 42, 63-70

等積移動の具体的表示

宮城教育大学教育学部　萬　伸介

1．図形の求積と等積移動

平面内の図形をその面積の値を変えることなく他の図形へと変えることは、小学校の図形学習においてよく行われる作業であり、このような作業の多くは等積移動・等積変形と呼ばれるものである。そして、これら等積移動・等積変形はある図形の求積の手段として用いられることが多い（[3, 6, 10]）。最近は、等積移動を等積変形と一括しているようである。算数教育・数学教育関係の書籍・論文等で調べると、「一つの図形 **A** を他の図形 **B** に変えたとき、図形 **A** の面積と図形 **B** の面積の値が同じならば、図形 **A** は等積変形（等積移動）によって図形 **B** となる」というような記述のみであった。等積移動の明確な定義を見つけることができなかった。著者は、等積移動・等積変形の明確な定義を与えることを [8] で試み、更に [9] において、ある等積変形を用いての円の求積を具体的に示した。本論では、等積移動が平面からそれ自身への等積写像の一つであることを述べ、写像として、具体的にどう表示されるかを示す。これにより、初等教育の図形指導の理論的な面において、大学初年で講義される「微分積分学」と「線形代数学」が具体的にその役割を果たしていることが明確に示される。

2．等積写像の定義

平面 R^2 の空でない部分集合が連結な開集合であるとき、その部分集合を領域という。領域とその境界点全体からなる R^2 の部分集合を閉領域という。平面 R^2 の領域 U から平面 R^2 への C^1-級写像 $f : U \to R^2$ を考える。定義域（領域 U）を含む R^2 には $u_1 - u_2$ 直交座標系が、値域を含む R^2 には $x_1 - x_2$ 直交座標系が設定されているとする。写像 f は U の任意の点 P を R^2 の点 $f(P) = (f^1(P), f^2(P))$ に写像する。ここに、f^1 と f^2 は共に U 上の C^1-級実数値関数である。関数 f^j の u_i に関する偏導関数を $\partial f^j/\partial u_i$（$i, j = 1, 2$）と表すことにすると、写像 f のヤコビ関数行列 J_f はこれら四つの偏導関数から作られる 2 行 2 列の行列である。U の任意の点 P に対して、ヤコビ行列 $J_f(P)$ によって線形写像 $F_{J_f(P)} : R^2 \to R^2$ が $F_{J_f(P)}\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right) = J_f(P)\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad \forall \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \in R^2$ と一意に定まる。ここに、右辺の $J_f(P)\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ は、2 行 2 列の行列と 2 行 1 列の行列との積として得られる 2 行 1 列の行列を、R^2 の要素であるベクトルと同一視することを意味している。この $F_{J_f(P)}$ は、写像 f の点 P における微分写像とよばれるもので、df_P または $(f_*)_P$ と表現される場合もある。線形写像 $F_{J_f(P)}$ は写像 f の点 P における一次近似写像ともみなせる写像である。次の等積写像の定義は [8, 9] でも紹介されている。

定義：平面 R^2 の領域 U から平面 R^2 への C^1-級写像 f が等積写像であるとは、U の任意の点 P に対して、f の点 P におけるヤコビ行列 $J_f(P)$ の行列式の値の絶対値が 1 であるとき、すなわち

$$|\det J_f(P)| = 1 \qquad \forall P \in U$$

が成り立つときをいう。特に、$U = R^2$ のとき、f を平面 R^2 からそれ自身への等積写像という。さらに、平面 R^2 から平面 R^2 への全単射写像 f が等積写像であるとき、f を平面 R^2 の等積変換という。

等積写像の定義には領域の面積の値が既知であることは要求されていないことを注意する。U の任意の点 P に対して、$|\det J_f(P)| = 1$ ならば、重積分の変数変換の公式より、U に含まれる任意の領域（閉領域）$\mathbf{A}$ に対して、$f(\mathbf{A})$ の面積の値 $Area(f(\mathbf{A}))$ は $\mathbf{A}$ の面積の値 $Area(\mathbf{A})$ に等しいことが示される（[9]）。

3．等積移動と狭義等積移動の定義

平面 R^2 の等積アフィン変換（例えば、[7], p.5, p.408 を参照）とは、$|ad - bc| = 1$ をみたす定数 a, b, c, d に対して

$$\begin{cases} x_1 = au_1 + bu_2 + m \\ x_2 = cu_1 + du_2 + n \end{cases}$$

で与えられる変換である。

平面 R^2 の等積アフィン変換は直線を直線に写像し、線分を線分に写像し、三角形を三角形に写像し、n 角形を n 角形に写像する。そして、等積移動は、「数学小辞典」（[7], p.407）によると、三角形を三角形に移すから、n 角形を n 角形に移す。小学校・中学校における「図形」は、円を除くと、直線、半直線、線分、三角形・四角形・五角形等の多角形であることを考慮して、[8] に従って、等積移動を次のように定義する。

定義：平面 R^2 の等積移動 f とは

$$f(u_1, u_2) = (au_1 + bu_2 + m, cu_1 + du_2 + n)$$

と定義される写像 $f : R^2 \to R^2$ である。ここに、a, b, c, d, m, n は定数で、$|ad - bc| = 1$ をみたす。すなわち、等積移動 f は等積アフィン変換のことである。

注意：等積移動 f のヤコビ行列 $J_f = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ は、その行列式の値の絶対値が 1 であるから、

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h} \end{bmatrix}$$

のいずれか一つの行列に相似である（[2]）。ただし、$k \neq 0, 1; h \neq 0, 1$ である。

平面 R^2 上の 3 点 $A = (a_1, a_2)$、$B = (b_1, b_2)$、$C = (c_1, c_2)$ が作る三角形を $\triangle ABC$ と書き表す。このとき、$\triangle ABC$ は正の向きをもつと仮定できる（[5], p.28）。三角形とその内部が表す図形を "$\triangle ABC$" と表すことにする。三角形とは三つの線分からなる図形である（[4], p. 17）から、面積を議論するときには "$\triangle ABC$" を考えなければならないのである。ただし、小・中学校での授業の場で、教師が児童・生徒に向けて、"$\triangle ABC$" を $\triangle ABC$ と表現することを否定するものではない。次の狭義等積移動の定義は [8]（[7] p.407 等積移動の項参照）による。

定義：$\triangle ABC$ に対して、辺 AB に平行で頂点 C を通る直線 ℓ を引き、ℓ 上に、C とは異なる点 C^* を適当に定める。このとき、平面 R^2 から平面 R^2 への全単射写像 f が

$$f(\text{"}\triangle ABC\text{"}) = \text{"}\triangle ABC^*\text{"}$$

をみたすならば、f は狭義等積移動（または、ずらし変形）であるという。

等積アフィン変換の立場から上の定義を述べると、次のようになる。

定義 （[8]）：平面 R^2 の写像 $f : R^2 \to R^2$ ：

$$f(u_1, u_2) = (au_1 + bu_2 + m, cu_1 + du_2 + n) \qquad a, b, c, d, m, n \text{ は定数}$$

が

$$(\star) \qquad ad - bc = 1, \quad a + d = 2, \quad b^2 + c^2 \neq 0$$

を満たすとき、f を平面 R^2 の狭義等積移動という。

注意 ：上記の条件 $(\star)$ は f のヤコビ行列 $J_f = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ は重複度 2 の固有値 1 をもち、固有値 1 に対する固有空間の次元は 1 であることに対応し、また、行列 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ に相似であるということにも対応している（[2]）。

4. 等積移動と狭義等積移動の具体的表示

狭義等積移動 f の具体的表示とそれが平面 R^2 の等積変換であることを、以下の「手順」に従って示す。

手順 0 （準備）：今、平面 R^2 上の 3 点 $O = (0, 0)$、$D = (d_1, 0)$、$E = (e_1, e_2)$ （$d_1, e_2 > 0$）が作る三角形 $\triangle ODE$ を考える。辺 OD に平行で点 E を通る直線上に点 $E^* = (e_1 + k, e_2)$ をとる。ここに、k は零でない定数である。このとき、 $\triangle ODE$ を $\triangle ODE^*$ に写像する狭義等積移動 $S_{OD}^{E,k}$ は

$$S_{OD}^{E,k}\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{k}{e_2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \qquad \forall \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \in R^2$$

で定まる線形写像 $S_{OD}^{E,k} : R^2 \to R^2$ である。

$$\begin{aligned}
S_{OD}^{E,k}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{k}{e_2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
S_{OD}^{E,k}\left(\begin{bmatrix} d_1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{k}{e_2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
S_{OD}^{E,k}\left(\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{k}{e_2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 + k \\ e_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

であるから、 $S_{OD}^{E,k}(\text{"}\triangle ODE\text{"}) = \text{"}\triangle ODE^*\text{"}$ であることが確認できる。そして、

$$\det J_{S_{OD}^{E,k}} = \det \begin{bmatrix} 1 & \frac{k}{e_2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1$$

であるから、$S_{OD}^{E,k}$ は平面 R^2 の等積変換である。

さて、平面 R^2 上の3点 $A=(a_1,a_2)$、$B=(b_1,b_2)$、$C=(c_1,c_2)$ が作る三角形 $\triangle ABC$ にもどって、辺 AB に平行で頂点 C を通る直線 ℓ 上に、C と異なる点 C^* を定める。すなわち、点 C^* を、定数 k を適当に定めて、

$$\overrightarrow{CC^*} = k \cdot \left(\frac{1}{\|\overrightarrow{AB}\|} \cdot \overrightarrow{AB} \right)$$

をみたすように定めるのである。このとき、$f(\triangle ABC) = \triangle ABC^*$ をみたす平面 R^2 の狭義等積移動 f の具体的表示を求める。

手順1： 点 A を原点 O に写像する平行移動 $T_{-a_1,-a_2} : R^2 \to R^2$ を考える。このとき

$$T_{-a_1,-a_2}(a_1,a_2) = (a_1 - a_1, a_2 - a_2) = (0,0)$$

である。そして

$$B' = T_{-a_1,-a_2}(B) \qquad C' = T_{-a_1,-a_2}(C)$$

とおくと、$B' = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$、$C' = (c_1 - a_1, c_2 - a_2)$ である。このとき

$$T_{-a_1,-a_2}(\text{"}\triangle ABC\text{"}) = \text{"}\triangle OB'C'\text{"}$$

$$Area(\text{"}\triangle ABC\text{"}) = Area(\text{"}\triangle OB'C'\text{"})$$

が成り立つ。

手順2： $\triangle OB'C'$ の辺 OB' を x_1 軸の正の部分（の一部分）に写像する、原点 O を中心とする、回転 $R_{-\theta} : R^2 \to R^2$ を考える。ここに、$\theta(-\pi < \theta \leq \pi)$ は

$$\cos\theta = \frac{b_1 - a_1}{\sqrt{(b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2}}, \quad \sin\theta = \frac{b_2 - a_2}{\sqrt{(b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2}}$$

をみたすとする。すなわち

$$\begin{aligned} & R_{-\theta}(u_1,u_2) \\ = \quad & ((\cos(-\theta))u_1 + (-\sin(-\theta))u_2, (\sin(-\theta))u_1 + (\cos(--\theta))u_2) \\ = \quad & ((\cos\theta)u_1 + (\sin\theta)u_2, -(\sin\theta)u_1 + (\cos\theta)u_2) \end{aligned}$$

よって

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1 - a_1}{\sqrt{(b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2}} \cdot u_1 + \dfrac{b_2 - a_2}{\sqrt{(b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2}} \cdot u_2 \\ x_2 = \dfrac{-(b_2 - a_2)}{\sqrt{(b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2}} \cdot u_1 + \dfrac{b_1 - a_1}{\sqrt{(b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2}} \cdot u_2 \end{cases}$$

である。これより、$R_{-\theta}(O) = O$ となる。

$$B'' = R_{-\theta}(B') \qquad C'' = R_{-\theta}(C')$$

とおくと

$$
\begin{aligned}
B'' &= \left(\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}, 0\right)\\
C'' &= \left(\frac{(b_1-a_1)(c_1-a_1)+(b_2-a_2)(c_2-a_2)}{\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}},\right.\\
&\qquad \left.\frac{-(b_2-a_2)(c_1-a_1)+(b_1-a_1)(c_2-a_2)}{\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}}\right)
\end{aligned}
$$

となり、そして

$$R_{-\theta}(\text{"}\triangle OB'C'\text{"}) = \text{"}\triangle OB''C''\text{"}$$

$$Area(\text{"}\triangle OB'C'\text{"}) = Area(\text{"}\triangle OB''C''\text{"})$$

が成り立つ。ところで、点 C'' の x_2 座標は正である。このことは、平行移動と回転は共に正の変換（三角形の向きを保つ変換、[5]）であり、$\triangle ABC$ は正の向きをもつから $\triangle OB''C''$ も正の向きをもち、B'' の x_1 座標が正であることから従う。

注意：点 C'' の x_2 座標が正であることは次のようはことからでも示される。$\triangle ABC$ は正の向きをもつ三角形であるから"$\triangle ABC$" の「向き付け面積」（[1], p.73）の値は正である。すなわち、$\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} > 0$ である。ところで

$$
\begin{aligned}
\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} &= \det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & b_1-a_1 & c_1-a_1 \\ a_2 & b_2-a_2 & c_2-a_2 \end{bmatrix}\\
&= -(b_2-a_2)(c_1-a_1)+(b_1-a_1)(c_2-a_2)
\end{aligned}
$$

であるから点 C'' の x_2 座標は正となるのである。

手順 3： $\triangle OB''C''$ の二つの頂点 O、B'' は共に x_1 座標軸上にあるから、狭義等積移動 $S_{OB''}^{C'',k} : R^2 \to R^2$ を考えると、$S_{OB''}^{C'',k}(O) = O$、$S_{OB''}^{C'',k}(B'') = B''$ である。いま $C''^{*} = S_{OB''}^{C'',k}(C'')$ とおくと

$$
\begin{aligned}
C''^{*} &= \left(\frac{(b_1-a_1)(c_1-a_1)+(b_2-a_2)(c_2-a_2)}{\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}}+k,\right.\\
&\qquad \left.\frac{-(b_2-a_2)(c_1-a_1)+(b_1-a_1)(c_2-a_2)}{\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}}\right)
\end{aligned}
$$

である。このとき

$$S_{OB''}^{C'',k}(\text{"}\triangle OB''C''\text{"}) = \text{"}\triangle OB''C''^{*}\text{"}$$

$$Area(\text{"}\triangle OB''C''\text{"}) = Area(\text{"}\triangle OB''C''^{*}\text{"})$$

が成り立つ。

手順 4：原点を中心とする回転 R_θ を考える。R_θ は手順 2 で述べられた回転 $R_{-\theta}$ の逆変換である。このとき $R_\theta(O) = O$、$R_\theta(B'') = B'$ である。いま $C'^{*} = R_\theta(C''^{*})$ とおくと

$$R_\theta(\text{"}\triangle OB''C''^{*}\text{"}) = \text{"}\triangle OB''C'^{*}\text{"}$$

$$Area(\text{"}\triangle OB''C''^{*}\text{"}) = Area(\text{"}\triangle OB''C'^{*}\text{"})$$

が成り立つ。

手順5：原点 O を点 A に写像する平行移動 T_{a_1,a_2} を考える。この平行移動は手順1で述べられた平行移動 $T_{-a_1,-a_2}$ の逆変換である。このとき $T_{a_1,a_2}(O)=A$、$T_{a_1,a_2}(B')=B$ である。いま $C^*=T_{a_1,a_2}(C'^*)$ とおくと

$$T_{a_1,a_2}(\text{"}\triangle OB'C'^*\text{"}) = \text{"}\triangle ABC^*\text{"}$$

$$Area(\text{"}\triangle OB'C'^*\text{"}) = Area(\text{"}\triangle ABC^*\text{"})$$

が成り立つ。

手順6：写像 $f:R^2\to R^2$ を上記五つの写像の合成とする。すなわち、f は

$$f = T_{a_1,a_2}\circ R_\theta \circ S_{OB''}^{C'',k}\circ R_{-\theta}\circ T_{-a_1,-a_2}$$

と与えられる。ここで、線形写像 $R_\theta\circ S_{OB''}^{C'',k}\circ R_{-\theta}:R^2\to R^2$ の R^2 の標準基底に関する表現行列は

$$R_\theta : \begin{bmatrix} \dfrac{b_1-a_1}{\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}} & \dfrac{-b_2-a_2}{\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}} \\ \dfrac{b_2-a_2}{\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}} & \dfrac{b_1-a_1}{\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}} \end{bmatrix}$$

$$S_{OB''}^{C'',k} : \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{k\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}}{-(b_2-a_2)(c_1-a_1)+(b_1-a_1)(c_2-a_2)} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{-\theta} : \begin{bmatrix} \dfrac{b_1-a_1}{\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}} & \dfrac{b_2-a_2}{\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}} \\ \dfrac{-b_2-a_2}{\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}} & \dfrac{b_1-a_1}{\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}} \end{bmatrix}$$

より、$D=(b_2-a_2)(c_1-a_1)+(b_1-a_1)(c_2-a_2)$ とおいて

$$\begin{bmatrix} 1+\dfrac{-k(b_1-a_1)(b_2-a_2)}{D\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}} & \dfrac{k(b_1-a_1)^2}{D\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}} \\ \dfrac{-k(b_2-a_2)^2}{D\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}} & 1+\dfrac{k(b_1-a_1)(b_2-a_2)}{D\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}} \end{bmatrix}$$

である。よって、任意の $(u_1,u_2)\in R^2$ に対して

$$\begin{aligned} &f(u_1,u_2) \\ &=\Bigg(u_1+\frac{k(b_1-a_1)}{\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}}\left\{\frac{-(b_2-a_2)(u_1-a_1)+(b_1-a_1)(u_2-a_2)}{-(b_2-a_2)(c_1-a_1)+(b_1-a_1)(c_2-a_2)}\right\}, \\ &\qquad u_2+\frac{k(b_2-a_2)}{\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}}\left\{\frac{-(b_2-a_2)(u_1-a_1)+(b_1-a_1)(u_2-a_2)}{-(b_2-a_2)(c_1-a_1)+(b_1-a_1)(c_2-a_2)}\right\}\Bigg) \end{aligned}$$

である。写像 f のヤコビ関数行列 J_f は線形写像 $R_\theta\circ S_{OB''}^{C'',k}\circ R_{-\theta}$ の表現行列に等しいことがわかるから、$\det J_f(u_1,u_2)=1$ 。よって、f は等積写像である。そして、$f(\text{"}\triangle ABC\text{"})=\text{"}\triangle ABC^*\text{"}$ であるから $Area(\text{"}\triangle ABC\text{"})=Area(\text{"}\triangle ABC^*\text{"})$ が成り立つ。したがって、$\triangle ABC$ を $\triangle ABC^*$ に写像する狭義等積移動 f は等積写像であり、f のヤコビ関数行列 J_f は行列

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ に相似である（[2]）。この狭義等積移動 f の不動点（$f(P)=P$ となる点）は直線 AB 上にあり、直線 AB の任意の点は f の不動点である。この狭義等積移動 f は、より正確には、$f_{AB}^{C,k}$ と表現されるものである。

注意：平面 R^2 上の 4 点 $A=(1,1)$、$B=(3,2)$、$C=(3,3)$、$D=(1,3)$ を頂点とする四角形 $ABCD$ を狭義等積移動 $f_{AB}^{C,\sqrt{5}}$ と $f_{AB}^{D,\sqrt{5}}$ によって写像する。このとき、

$$
\begin{aligned}
f_{AB}^{C,\sqrt{5}}(A) = f_{AB}^{C,\sqrt{5}}(1,1) = (1,1) = A \quad &, \quad f_{AB}^{C,\sqrt{5}}(B) = f_{AB}^{C,\sqrt{5}}(3,2) = (3,2) = B \\
f_{AB}^{C,\sqrt{5}}(C) = f_{AB}^{C,\sqrt{5}}(3,3) = (5,4) = C^* \quad &, \quad f_{AB}^{C,\sqrt{5}}(D) = f_{AB}^{C,\sqrt{5}}(1,3) = (5,3) = D' \\
f_{AB}^{D,\sqrt{5}}(A) = f_{AB}^{D,\sqrt{5}}(1,1) = (1,1) = A \quad &, \quad f_{AB}^{D,\sqrt{5}}(B) = f_{AB}^{D,\sqrt{5}}(3,2) = (3,2) = B \\
f_{AB}^{D,\sqrt{5}}(C) = f_{AB}^{D,\sqrt{5}}(3,3) = (4,3.5) = C' \quad &, \quad f_{AB}^{D,\sqrt{5}}(D) = f_{AB}^{D,\sqrt{5}}(1,3) = (3,4) = D^*
\end{aligned}
$$

であるから、

$$f_{AB}^{C,\sqrt{5}}(\text{"四角形 }ABCD\text{"}) = \text{"四角形 }ABC^*D'\text{ "}$$

$$f_{AB}^{D,\sqrt{5}}(\text{"四角形 }ABCD\text{"}) = \text{"四角形 }ABC'D^*\text{ "}$$

を得る。

注意：写像 $f: R^2 \longrightarrow R^2$ が $f(u_1,u_2) = (\frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2, 2u_2)$ と与えられていると、f は平面 R^2 上の等積写像である。このとき $f(0,0)=(0,0)$, $f(2,0)=(1,0)$, $f(2,2)=(2,4)$ である。そして、$O=(0,0)$、$A=(2,0)$、$B=(2,2)$、$A^*=(1,0)$、$B^*=(2,4)$ とおくと

$$f(\text{"}\triangle\, OAB\text{"}) = \text{"}\triangle\, OA^*B^*\text{"}$$

である。この等積写像 f のヤコビ行列 $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ は行列 $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ に相似である（なぜならば、$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ が成り立つから）。よって、等積写像 f は等積移動であるが狭義等積移動ではない。

注意：平面 R^2 上の 3 点 $O=(0,0)$、$A=(6,0)$、$B=(3,3)$ に対して、狭義等積移動 $S_{OA}^{B,3}$ を考える。2 点 O、A を直径とする円 $\mathcal{C} = \{(u_1,u_2) \in R^2 \mid (u_1-3)^2 + (u_2)^2 = 9\}$ を $S_{OA}^{B,3}$ によって写像すると、その像は

$$
\begin{aligned}
& S_{OA}^{B,3}(\mathcal{C}) \\
&= \{(x_1,x_2) \in R^2 \mid x_1 = u_1 + u_2, x_2 = u_2, (u_1,u_2) \in \mathcal{C}\} \\
&= \{(x_1,x_2) \in R^2 \mid (x_1)^2 - 2x_1x_2 + 2(x_2)^2 - 6x_1 + 6x_2 = 0\}
\end{aligned}
$$

である。従って、2 点 O、A を直径とする円 $\mathcal{C}$ は、狭義等積移動 $S_{OA}^{B,3}$ によって、2 点 O、A を通る楕円に写像される。

引用・参考文献

[1] 浅野哲夫：「計算幾何学」, 朝倉書店（1990 年）.

[2] 内田伏一　他：「線形代数入門」, 裳華房（1988 年, 1997 年）.

[3] 大澤隆之：創造力は、目から鱗が落ちる経験で伸びる（第 5 分科会　提案）, 新しい算数研究 325（東洋館出版社）, 183 – 186, 1998 年.

[4] 小平邦彦：「幾何のおもしろさ」, 岩波書店（1985 年, 1993 年）.

[5] 那須俊夫：「変換幾何入門」, 共立出版（1990 年）.

[6] 藤田栄治：学習の個性化における表現力とコミュニケーション能力の育成（第 3 分科会　提案）, 新しい算数研究 325（東洋館出版社）, 154 – 157, 1998 年.

[7] 矢野健太郎　編：「数学小辞典」, 共立出版（1968 年, 1990 年）.

[8] 萬　伸介：等積移動・等積変形　— 等積写像の視点から —, 投稿予定（1999 年）.

[9] 萬　伸介：円の求積と等積変形, イプシロン（愛知教育大学）41, 117 – 126, 1999 年.

[10] 「教育課程の基準の改善の基本方向について（中間まとめ）」を読んで（座談会）, 新しい算数研究 325（東洋館出版社）, 209 – 224, 1998 年.