イプシロン　2016. Vol.58,　71 － 75

遠投における投射角についての考察
－45 度神話の崩壊！？とラグランジュの未定乗数法－

愛知教育大学　数学教育講座　**市　延　邦　夫**

1　はじめに

ここでは空気抵抗や球の回転を考慮しない場合の遠投における投射角についての考察を行う。空気抵抗を考慮する場合も同様の議論ができるが、筆者は抵抗係数の具体的な値を手に入れることができなかったので、詳細は記載しない。

今回の話の動機は筆者のゼミ生がスポーツバイオメカニクスを勉強するときに用いたテキスト [2] にある。そのテキストではここで議論する第 3 章までのことが書いてある。

また、ここでは関数の最大値を求めるためにラグランジュの未定乗数法を用いた。第 5 章でみるように、実際に微分計算を実行しても同じ結果が得られるのだが、非常に複雑で少し計算してみると簡単にあきらめてしまう気持ちもわかる。それに比べて第 4 章でみるようにラグランジュの未定乗数法を用いると比較的簡単に結果が得られる。筆者は学生に数学を教えるときに、定理などが身近な現象に応用できないかということを考えるときがある。ここで展開する話はラグランジュの未定乗数法の身近な現象への応用としてよい例になるのではと思った。

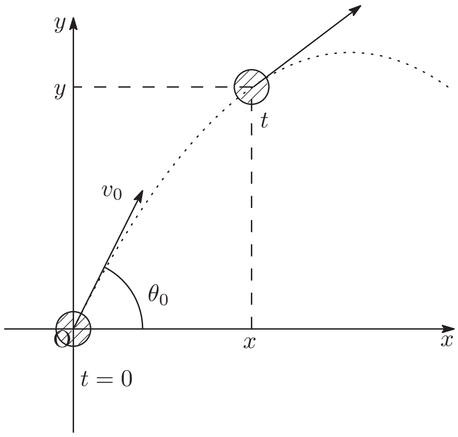
2　問題

小学生におけるソフトボール投げのような遠投において、投射角を何度にしたら物体を遠くまで投げることができるのだろうか？

高校で物理を勉強したとき、次のような問題を考えたことがあるはずだ。

問題

下図のように時刻 $t=0[s]$ において原点 O から初速度 $v_0[m/s]$、投射角 $\theta_0[rad]$ で重さ $m[kg]$ の物体を投げ上げる。時刻 $t[s]$ における物体の位置の x 成分、y 成分をそれぞれ $x[m], y[m]$ とすると x, y を時刻 t で表せ。また、飛距離が最大となる投射角 θ_0 を求めよ。



解　時刻 t における物体の速さの x 成分、y 成分をそれぞれ $v_x[m/s], v_y[m/s]$ とすると、次の運動方程式を得る。

$$\begin{cases} m\dot{v_x}=0 \\ m\dot{v_y}=-mg \end{cases} \tag{1}$$

ただし、$\dot{}=\frac{d}{dt}$, g は重力加速度 $9.8[m/s]$ を表す。また、鉛直方向上向きを正の向きとする。

微分方程式 (1) を初期値

$$\begin{cases} v_x(0)=v_0\cos\theta_0 \\ v_y(0)=v_0\sin\theta_0 \end{cases} \tag{2}$$

の下（投射角は x 軸と速度ベクトルとのなす角度で定義）で解くと

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos\theta_0 \\ v_y(t) = v_0 \sin\theta_0 - gt \end{cases} \tag{3}$$

を得る。したがって、さらに積分することにより、

$$\begin{cases} x = x(t) = v_0 \cos\theta_0 \times t \\ y = y(t) = v_0 \sin\theta_0 \times t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \tag{4}$$

を得る。ただし、初期値 $x(0) = 0,\ y(0) = 0$ を用いた。

また、$y = 0$ となる $t(> 0)$ の値は

$$t = \frac{2v_0 \sin\theta_0}{g} \tag{5}$$

なので、飛距離 x は

$$x = v_0 \cos\theta_0 \times \frac{2v_0 \sin\theta_0}{g} \ = \ \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta_0 \tag{6}$$

で与えられる。したがって、この x を最大にする θ_0 の値は

$$\sin 2\theta_0 = 1 \Longleftrightarrow \ \theta_0 = \pi/4 (= 45^\circ)$$

であり、このとき最大飛距離 $x_{max} = \frac{v_0^2}{g}$ である。

さて、本題に戻ろう。我々はソフトボール投げのような遠投において、最も遠くまで投げることができる投射角を知りたい。先ほどの問題との違いは y の初期値

$$y(0) = y_0 (\neq 0)$$

である。ここで、y_0 はだいたい (身長)+(手の長さ) とする。

3 y の初期値が 0 でない場合

上記初期値の下、微分方程式 (3)($v_y = \dot{y}$) を積分して

$$y = y(t) = y_0 + v_0 \sin\theta_0 \times t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{7}$$

を得る。

以下、y の初期値が 0 の場合と同様にして、式 (7) に対して $y = 0$ となる $t(> 0)$ の値を求めると

$$t = \frac{v_0 \sin\theta_0 + \sqrt{(v_0 \sin\theta_0)^2 + 2gy_0}}{g} \tag{8}$$

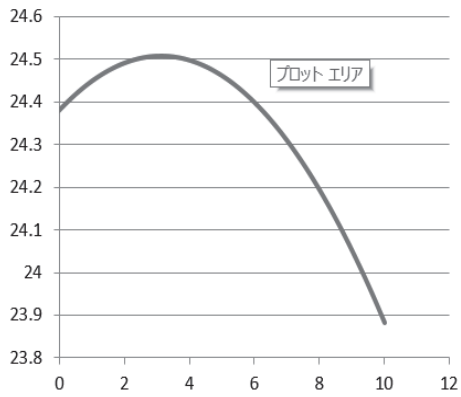
より、飛距離 x は

$$x = \frac{v_0 \cos\theta_0 \left(v_0 \sin\theta_0 + \sqrt{(v_0 \sin\theta_0)^2 + 2gy_0} \right)}{g} \tag{9}$$

で与えられる。したがって、この x を最大にする θ_0 の値は、$dx/d\theta_0 = 0$ を解き、増減表などから θ_0 の値が求まる予定である。

しかし、$dx/d\theta_0 = 0$ を解くことは難しいと思われる (第 5 章参照)。よって、与えられた v_0 や y_0 に対するグラフを眺めることによって x を最大にする θ_0 を見つけることにする。

右のグラフは
初速度 $v_0 = 15[m/s]$、
時速に直すと $54[km/h]$ と
y の初期位置 $y_0 = 1.6[m]$
としたときの x-θ グラフである。正確には、横軸が (投射角)$-40[°]$ であり、縦軸が飛距離 $x[m]$ である。これらの初期値は小学生をイメージした値である。
このとき、投射角が $3.1 + 40 = 43.1°$ のとき、おおよそ最大飛距離 $x_{max} = 24.507m$ を得ることが分かる。



4　ラグランジュの未定乗数法

さて、数学的に最適な投射角を与えてみたい。そこで登場するのがラグランジュの未定乗数法である。ラグランジュの未定乗数法についての詳細は微分積分と名のついたテキストであれば載っていると思われる。ここでは [1] を参考文献として挙げておく。

我々の問題の場合、

$$\begin{cases} F(\theta, t; v_0) & := v_0 \cos\theta t \\ G(\theta, t; v_0, y_0) & := gt^2 - 2v_0 \sin\theta t - 2y_0 \end{cases} \tag{10}$$

と置き、条件 $G = 0$ の下、関数 F を最大にする θ を求める問題を考えればよい。よって、

$$H(\theta, t, \lambda; v_0, y_0) := F(\theta, t; v_0) - \lambda G(\theta, t; v_0 y_0)$$

とおき、連立方程式

$$H_\theta = 0 \tag{11}$$

$$H_t = 0 \tag{12}$$

$$H_\lambda = 0 \iff G = 0 \tag{13}$$

を解く。

$$(11) \iff -v_0 \sin\theta t - \lambda(-2v_0 \cos\theta t) = 0$$

より、$v_0 t \neq 0$ なので、

$$-\sin\theta + 2\cos\theta\lambda = 0 \iff \therefore \lambda = \frac{1}{2}\tan\theta \tag{14}$$

を得る。

$$(12) \iff v_0 \cos\theta - \lambda(2gt - 2v_0 \sin\theta) = 0$$

に対して、式 (14) を代入すると

$$v_0 \cos\theta - \tan\theta(gt - v_0 \sin\theta) = 0 \iff v_0(\cos\theta + \tan\theta \sin\theta) = g \tan\theta t$$

$$\therefore t = \frac{v_0}{g}\frac{\cos\theta + \tan\theta \sin\theta}{\tan\theta} = \frac{v_0}{g}\frac{1}{\sin\theta} \tag{15}$$

を得る。また、式 (13) に (15) を代入して

$$g\left(\frac{v_0}{g}\frac{1}{\sin\theta}\right)^2 - 2v_0\sin\theta\left(\frac{v_0}{g}\frac{1}{\sin\theta}\right) - 2y_0 = 0 \iff \frac{v_0^2}{g}\frac{1}{\sin^2\theta} - 2\frac{v_0^2}{g} - 2y_0 = 0$$
$$\therefore \frac{1}{\sin^2\theta} = \frac{2(v_0^2+gy_0)}{v_0^2}$$

を得る。ここで、$0<\theta<\pi/2$ より

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2+gy_0}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1+gy_0/v_0^2}}\left(<\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

なので、

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1+gy_0/v_0^2}}\right) \tag{16}$$

を得る。また、このとき

$$t = \frac{\sqrt{2}}{g}\sqrt{v_0^2+gy_0}, \quad \lambda = \frac{1}{2}\frac{v_0}{\sqrt{v_0+2gy_0}}$$

で与えられ、このときの F の最大値は

$$F_{max} = \frac{v_0\sqrt{v_0^2+2gy_0}}{g} \tag{17}$$

で与えられる。

さて、前の章の最後に $v_0=15, y_0=1.6$ の場合を考察した。これらの初期値を (16), (17) に代入してエクセルに計算してもらうと

$$\theta = 43.1323^\circ, \quad F_{max} = 24.50701[m]$$

という値を得る。前の章の値とほぼ同じ値が得られている。

最後に、ラグランジュの未定乗数法はあくまで関数の極値の候補を見つける方法であるが、ここでは実際の現象として最大値を持つことが分かっているということや、2 階偏導関数を用いてその極値が極大値であることを確認することができることをコメントしておく。詳しくは微分積分のテキストを見て欲しい。

5 難しい計算を実際にやってみる

ここでは、第 3 章で諦めた計算を実際にやってみる。式 (9) において θ_0 を θ と書くことにする。このとき、

$$x = \frac{v_0\cos\theta\left(v_0\sin\theta + \sqrt{(v_0\sin\theta)^2+2gy_0}\right)}{g} \tag{9'}$$

を θ の関数とみたときの x を最大にする θ の値と、その時の最大値を求める。

$\dfrac{dx}{d\theta}$ を具体的に計算すると

$$g\frac{dx}{d\theta} = \frac{v_0\sin\theta + \sqrt{(v_0\sin\theta)^2+2gy_0}}{\sqrt{(v_0\sin\theta)^2+2gy_0}}(v_0^2\cos^2\theta - v_0\sin\theta\sqrt{(v_0\sin\theta)^2+2gy_0})$$

を得る。よって、$dx/d\theta = 0$ となる θ を求めると $v_0^2\cos^2\theta - v_0\sin\theta\sqrt{(v_0\sin\theta)^2 + 2gy_0} = 0$ より

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{v_0}{\sqrt{gy_0 + v_0^2}}$$

を得る。ただし、$0 < \theta < \pi/2$ を考慮した。また、$dx/d\theta$ は上式を満たす θ の値の前後で符号が正から負に変わるので、そこで x は最大値をとることが分かる。もちろん、その時の x の最大値は

$$x_{max} = \frac{v_0\sqrt{2gy_0 + v_0^2}}{g}$$

で与えられる。

参考文献

[1] 金谷健一, これなら分かる最適化数学 基礎原理から計算手法まで, 共立出版、2005.

[2] 阿江通良、藤井範久, スポーツバイオメカニクス 20 講, 朝倉書店、2002.