愛知教育大学研究報告，57（自然科学編），pp. 21～24, MArch, 2008

ファジィ集合の同値類について

佐々木守寿
情報教育講座

Equivalence class of fuzzy sets

Moritoshi SASAKI
Department of Information Sciences, Aichi University of Education, Kariya 448-8542, Japan

１．ファジィ集合の定義

ファジィ集合とは，ある集合上の概念に，各要素がどのくらいあてはまるかを，０以上１以下の実数で表現したものである。値が大きいほど，あてはまる度合いが大きいと約束する。１は完全にあてはまることを表し，０は全くあてはまらないことを表す。0.5は，どちらとも言えない場合を表す。したがって，0.5より大きい値はどちらかと言えばあてはまる，0.5より小さい値はどちらかと言えばあてはまらない場合に対応する。

思考の対象となる集合を universe とよび，以下では X で表す。本論文では，X は有限集合とする。X 上の概念は，A, B, C 等で表すことにする。X の各要素に対し，概念 A にあてはまる度合いを対応させる写像を$mA: X \to [0,1]$で表す。mA は概念 A のメンバシップ関数とよばれ，概念 A は mA によって特徴づけられる X 上のファジィ集合とよばれる。X の要素 s が，概念 A にあてはまる度合いが0.7である場合，$mA(s) = 0.7$と表現される。このとき，要素 s がファジィ集合 A に属する度合いが0.7である，という言い方もする。概念 A を否定した「A ではない」と言う概念を，A^c で表し，これを特徴づけるメンバシップ関数 $mA^c ; X \to [0,1]$を，任意の$s \in X$に対して，$mA^c(s) = 1 - mA(s)$と定義する。A^c を A の補ファジィ集合とよぶ。X 上のファジィ集合全体を F(X)と書く。

２．似ているファジィ集合

X＝{ s, t, u }とする。X 上の３つのファジィ集合 A, B, C を，それぞれ次のメンバシップ関数で特徴づけられるものとする。

mA(s)＝0.4　mA(t)＝0.5　mA(u)＝0.7
mB(s)＝0.6　mB(t)＝0.6　mB(u)＝0.7
mC(s)＝0.1　mC(t)＝0.5　mC(u)＝0.9

B と C のどちらが，より A に似ていると言えるだろうか。二つのファジィ集合が似ている度合いを表す尺度は，複数定義されている。[1]F(X)×F(X)から[0, １]への写像として定義された，代表的な尺度を二つ挙げる。どちらも，値が大きいほど，より似ていることを意味する。

〔尺度その１　$M: F(X) \times F(X) \to [0,1]$〕
∀D, ∀E∈F(X)に対して，
$$M(D,E) = 1 - \max\{|mD(s) - mE(s)| : s \in X\}$$
〔尺度その２　$N: F(X) \times F(X) \to [0,1]$〕
∀D, ∀E∈F(X)に対して，
$$N(D,E) = \Sigma_{s \in X} \min(mD(s), mE(s)) / \Sigma_{s \in X} \max(mD(s), mE(s))$$

M と N を用いて，A と B，A と C の似ている度合いを計算すると，次のようになる。

$$\begin{aligned}M(A,B) &= 1 - \max\{|mA(s) - mB(s)|, |mA(t) - mB(t)|, |mA(u) - mB(u)|\}\\ &= 1 - \max\{|0.4 - 0.6|, |0.5 - 0.6|, |0.7 - 0.7|\}\\ &= 1 - \max\{0.2, 0.1, 0\}\\ &= 1 - 0.1\\ &= 0.8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M(A,C) &= 1 - \max\{|mA(s) - mC(s)|, |mA(t) - mC(t)|, |mA(u) - mC(u)|\}\\ &= 1 - \max\{|0.4 - 0.1|, |0.5 - 0.5|, |0.7 - 0.9|\}\\ &= 1 - \max\{0.3, 0, 0.2\}\\ &= 1 - 0.3\\ &= 0.7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}N(A,B) &= 〔\min(mA(s), mB(s)) + \min(mA(t), mB(t)) + \min(mA(u), mB(u))〕/〔\max(mA(s), mB(s)) + \max(mA(t), mB(t)) + \max(mA(u), mB(u))〕\\ &= 〔\min(0.4, 0.6) + \min(0.5, 0.6) + \min(0.7, 0.7)〕/〔\max(0.4, 0.5) + \max(0.5, 0.6) + \max(0.7, 0.7)〕\\ &= 〔0.4 + 0.5 + 0.7〕/〔0.5 + 0.6 + 0.7〕\\ &= 1.6 / 1.8\end{aligned}$$

$= 16/18$

$N(A,C) = [\min(mA(s), mC(s)) + \min(mA(t), mC(t)) + \min(mA(u), mC(u))] / [\max(mA(s), mB(s)) + \max(mA(t), mC(t)) + \max(mA(u), mC(u))]$

$= [\min(0.4, 0.1) + \min(0.5, 0.5) + \min(0.7, 0.9)] / [\max(0.4, 0.1) + \max(0.5, 0.5) + \max(0.9, 0.9)]$

$= 0.1 + 0.5 + 0.7 / 0.4 + 0.5 + 0.9$

$= 1.3 / 1.8$

$= 13 / 18$

M, N いずれの場合も，C よりも B の方が A に似ている度合いが大きくなる。

ここで，次のような具体例を考えてみたい。X の要素 s, t, u を，それぞれ，魚，肉，野菜とする。ファジィ集合 A, B, C を，それぞれ，太郎君，二郎君，三郎君の好きな食べ物とする。二郎君と三郎君のどちらが，太郎君と食べ物に対する好みが似ているかを考えていることになる。mA の値から，太郎君の好みは，「魚はどちらかと言えば嫌い，肉は嫌いでも好きでもない，野菜はどちらかと言えば好き」となる。mB と mC の値から，二郎君と三郎君の好みは，それぞれ，「魚も肉も野菜も，どちらかと言えば好き」，「魚は大嫌い，肉は嫌いでも好きでもない，野菜は大好き」となる。この例では，二郎君より三郎君の方が太郎君と好みが似ているように感じられる。程度の差はあるが，嫌いなもの，どちらかわからないもの，好きなものという分類については一致しているからである。ここで，キーポイントとなるのは，メンバシップ関数の0.5という値である。先程の分類は，メンバシップ関数の値が0.5未満か，0.5か，0.5より大きいかに対応している。0.5は，$mA(s) = mA^c(s)$を満たす mA(s) の値である。$mA(s) < 0.5$の場合は$mA(s) < mA^c(s)$であり，$mA(s) > 0.5$の場合は$mA(s) > mA^c(s)$である。先程，3人の好きな食べ物を考える例を挙げた。その場合，暗黙のうちに，反対概念の嫌いな食べ物を持ち出し，好きな食べ物にあてはまる度合いの小さいものは嫌いな食べ物にあてはまる度合いが大きい，という解釈をしていたと思われる。

3．反対概念について

概念 A に対して，A^c を反対概念とか A を否定した概念とよんだ。しかし，A^c とはなにか，という問題は，あまり単純ではないようである。

ここでは，自然言語の単語で表現される概念を考えることにする。「優」と「劣」，「高い」と「低い」，「行く」と「帰る」などような対義語同士は，お互いの反対概念を表している。先程考えた，食べ物についての「好き」と「嫌い」は，このタイプである。しかし，食べ物の味において，「甘い」の対義語はない。「辛い」，「しょっぱい」，「渋い」，「すっぱい」などを思いつくが，結局，反対概念は「甘くない」と表現するしかないようである。

食べ物の好き嫌いの例は，反対概念を表す対義語が一意に定まる場合である。

ここで，先ほどの具体例と同じ数値を使って，反対概念が一意に定まらない，次のような例を考えてみよう。X の要素 s, t, u を，それぞれ，柿，梨，プラムとする。ファジィ集合 A, B, C を，それぞれ，太郎君，二郎君，三郎君が食べて，甘いと感じた果物とする。二郎君と三郎君のどちらが，太郎君と果物に対する味覚が似ているかを考えてみたい。

mA(柿)＝0.4　mA(梨)＝0.5　mA(プラム)＝0.7

mB(柿)＝0.6　mB(梨)＝0.6　mB(プラム)＝0.7

mC(柿)＝0.1　mC(梨)＝0.5　mC(プラム)＝0.9

という値をながめてみると，三郎くんより二郎君の方が太郎君と味覚が似ているように感じられる。この例では，0.5より小さいメンバシップ関数の値に対応する味が特定できないため，0.5という値が食べ物の好き嫌いのときのような意味をもたない。したがって，メンバシップ関数の数値の差が少ないもの同士を似ていると感じるのである。このような場合は，ファジィ集合同士の類似度をはかる尺度として，M や N は適切であろう。

4．ファジィ集合族上の同値類

ここでは，universe X 上の，対義語が一意に定まる概念に対応するファジィ集合全体の族 G(X) を考える。G(X) は F(X) の部分集合である。ファジィ集合同士が似ているということを表現するために，G(X) 上に次の関係を導入する。

［定義1］

G(X) 上の二項関係〔G(X)×G(X) の部分集合〕R を次のように定める。

$(A, B) \in R$

≡次を満たす狭義単調増加な写像 $f : [0,1] \to [0,1]$ が存在する。

$f(0) = 0$

$f(0.5) = 0.5$

$f(1) = 1$

$\forall s \in X$ に対して，$mB(s) = f(mA(s))$

$(A, B) \in R$であるとき，A は B と同種であるという。

ここで，提案した関係は，次の性質をもつ。

［命題1］

R を，定義1で定めた G(X) 上の二項関係とする。$(A, B) \in R$であるとき，$\forall s$, $\forall t \in X$ に対して，次が成り立つ。

（1）$mA(s)=mA(t) \rightarrow mB(s)=mB(t)$
（2）$mA(s)<mA(t) \rightarrow mB(s)<mB(t)$
（3）$mA(s)=0 \rightarrow mB(s)=0$
（4）$mA(s)=0.5 \rightarrow mB(s)=0.5$
（5）$mA(s)=1 \rightarrow mB(s)=1$
（6）$mA(s)<0.5 \rightarrow mB(s)<0.5$
（7）$mA(s)>0.5 \rightarrow mB(s)>0.5$

〈証明〉
（1）は，fが写像であるから明らかである。（2）は，fが狭義単調増加なので成立する。（3）は，$f(0)=0$であるから，成立する。（4）は，$f(0.5)=0.5$であるから，成立する。（5）は，$f(1)=1$であるから，成立する。（6）と（7）は，fが狭義単調増加であり，かつ，$f(0.5)=0.5$であるから，成立する。［証明終］

命題1で挙げた性質は，次のような意味をもつ。（1）は，概念Aにあてはまる度合いが同じ要素は，概念Bにも同じ度合いであてはまることを表す。（2）は，各要素間の概念Bにあてはまる度合いの順序は，概念Aにあてはまる度合いの順序と同じであることを表す。（3）は，概念Aに完全にあてはまる要素は，概念Bについても完全にあてはまる，ということを表す。（4）は，概念Aにあてはまるともあてはまらないとも言えない要素は，概念Bについてもどちらとも言えない，ということを表す。（5）は，概念Aに全くあてはまらない要素は，概念Bについても全くあてはまらない，ということを表す。（6）は，どちらかと言えば概念Aにあてはまらない要素は，概念Bについてもどちらかと言えばあてはまらない，ということを表す。（7）は，どちらかと言えば概念Aにあてはまる要素は，概念Bについてもどちらかと言えばあてはまる，ということを表す。これら（1）～（7）が成立するときには，AはBと同種であると言ってよいであろう。

［定理1］
定義1で定めた関係Rは，同値関係である。
〈証明〉
関係Rが，反射律，対称律，推移律を満たすことを示せばよい。
恒等写像 $i:[0,1] \rightarrow [0,1]$ は，狭義単調増加であり $i(0)=0$，$i(0.5)=0.5$，$i(1)=1$ を満たす。$\forall s \in X$ に対して，$mA(s)=i(mA(s))$ であるから，$(A,A) \in R$ である。よって，Rは反射率を満たす。
$(A,B) \in R$ と仮定する。定義1より，$f(0)=0$，$f(0.5)=0.5$，$f(1)=1$ を満たす狭義単調増加な写像 $f:[0,1] \rightarrow [0,1]$ が存在し，$\forall s \in X$ に対して，$mB(s)=f(mA(s))$ となる。$V=\{ mB(s) : s \in X \}$ とする。本論文では，Xは有限集合としているので，$V=\{ v_1, v_2, \cdots, v_n \}$，$i<j \rightarrow v_i<v_j$ とする。$W=f(V)$ とし，$W=\{ w_1, w_2, \cdots, w_n \}$，$w_i=f(v_i)$ とする。fは狭義単調増加であるから，$i<j \rightarrow w_i<w_j$ である。以下の定義を簡単にするために，$w_1 \neq 0$ のときは0を，$w_n \neq 1$ のときは1を，それぞれWに付け加える。さらに，任意のiに対して $w_i \neq 0.5$ となる場合は，Wに0.5を付け加え，Wの要素の添え字を小さい順につけかえる。$h:[0,1] \rightarrow [0,1]$ を $\forall t \in [0,1]$ に対して，
$w_i \leqq t \leqq w_{i+1} \rightarrow h(t)=v_i+(v_{i+1}-v_i)\times(t-w_i)/(w_{i+1}-w_i)$
として定める。 このhは狭義単調増加な写像であり，$v_i=g(w_i)$ となることから $\forall s \in X$ に対して $mA(s)=h(mB(s))$ を満たす。$h(0)=0$，$h(0.5)=0.5$，$h(1)=1$ となることは明らかである。したがって，定義1より，$(B,A) \in R$ となる。よって，Rは対称律を満たす。
$(A,B) \in R$，$(B,C) \in R$ と仮定する。$(A,B) \in R$ であるから，$f(0)=0$，$f(0.5)=0.5$，$f(1)=1$ を満たす狭義単調増加な写像 $f:[0,1] \rightarrow [0,1]$ が存在し，$\forall s \in X$ に対して，$mB(s)=f(mA(s))$ となる。また，$(B,C) \in R$ であるから，$g(0)=0$，$g(0.5)=0.5$，$g(1)=1$ を満たす狭義単調増加な写像 $g:[0,1] \rightarrow [0,1]$ が存在し，$\forall t \in X$ に対して，$mC(t)=g(mB(t))$ となる。したがって，$\forall u \in X$ に対して，$mC(u)=g(mB(u))=g(f(mA(u)))=g \bigcirc f(mA(u))$ となる。fとgの合成写像 $g \bigcirc f$ は，[0,1] から [0,1] への写像である。fが $f(0)=0$，$f(0.5)=0.5$，$f(1)=1$ を満たし，gが $g(0)=0$，$g(0.5)=0.5$，$g(1)=1$ を満たすから，$g \bigcirc f(0)=g(f(0))=g(0)=0$，$g \bigcirc f(0.5)=g(f(0.5))=g(0.5)=0.5$，$g \bigcirc f(1)=g(f(1))=g(1)=1$ となる。さらに，fもgも狭義単調増加な写像であるから，$g \bigcirc f$ も狭義単調増加な写像である。したがって，定義1より $(A,C) \in R$ となる。よって，Rは推移律を満たす。
以上より，Rは，反射率，対称律，推移律を満たすので，同値関係である。［証明終］

このように，定義1で定めた「同種である」という関係は同値関係なので，G(X)の要素である対義語が一意に定まる概念に対応するファジィ集合の同値類を考えることができる。

5．ま　と　め

universe X上の，対義語が一意に定まる概念に対応概念に対応するファジィ集合全体の族G(X)上に，「同種である」という同値関係を導入することを試みた。そのようなファジィ集合においては，メンバシップ関数の0.5という値が重要な意味を持つことも述べたとおりである。そのため，定義1の狭義単調増加な写像 $f:[0,1] \rightarrow [0,1]$ が満たすべき条件のひとつに $f(0.5)=0.5$ を採用した。これは，ある概念にあてはまるともあてはまらないとも言えない要素は，同種である概念についてもどちらとも言えない，ということを表す

ためのものである。しかし，このちょうど0.5のときという条件は，あまりファジィ的な感じがしない。fは，0.5に近い値を0.5に近い値に写像する，というゆるやかな条件を導入することが今後の課題である。

引用文献

[1] Didier Dubois, Henri PrAde, Fuzzy Sets And Systems : Theory And ApplicAtions, ACADEMIC PRESS, 1980

（平成19年9月18日受理）