Bulletin of Aichi Univ. of Education, 61（Educational Sciences）, pp. 83 − 88, March, 2012

割合の学習以前に子どもがもつインフォーマルな知識

栗山 和広

学校教育講座（教育心理学）

Informal Knowledge Acquired by Children before Learning Ratios

Kazuhiro KURIYAMA

Department of School Education (Educational Psychology), Aichi University of Education, Kariya 448-8542, Japan

最近の数理解に関する認知心理学の研究から，子どもは数概念を公的に学ぶ際に何も知らない状態にあるのではなく，日常生活の多様な経験をとおして豊かな知識を獲得していることが指摘されている（Mack, 1990）。こうした知識は，学校以外の環境で獲得されるインフォーマルな知識と呼ばれている。インフォーマルな知識は、公的に理解する以前の知識から構成されており，子どもの数理解に強い影響を及ぼすことが明らかにされている（Mack，1990；Mack，1993）。

子どものもつ数概念に関するインフォーマルな知識については，数の表象構造や計数や加算と減算の領域では実証されている（栗山，2002；Fuson，1988；Gelman & Gallistel，1978）。例えば，数の表象構造において，栗山（2002）は十進法構造を獲得する以前に5を特異数とする構造を獲得していることを見出している。また，Gelman & Gallistell（1978）は，計数といった一見すると単純な技能にも，1対1対応，安定した順序，基数性，順序無関連性，抽象性という5つの原理が機能していることを示した。Fuson（1988）は，公的な指導を受ける前に，幼児は数唱や計数を用いて加算や減算を行うようになることを明らかにした。

さらに，こうしたどちらかというと単純な領域のインフォーマルな数の知識だけでなく，有理数というかなり複雑な知識においても検討されつつある（藤村，1990；Kiren，1988；Lamon，1993；Noelting，1980；澤野・吉田，1997；吉田・栗山，1991）。例えば，Noelting（1980）は，割合概念のなかの比の発達について検討している。オレンジジュース問題と呼ばれている，オレンジと水を異なる割合で混合する状況を2種類用意し，2種類で味は異なるかを質問した。その結果，倍数関係に基づく等価の判断は10歳頃から可能になるが，任意の比に関する適切な判断は15歳以降であることが明らかにされた。また，吉田・栗山（1991）は，分数概念について検討している。彼らは，分数を学習する以前の3年生に，分数の大小比較について以下のような文章題の問題を与えた。「1つのチョコレートを，2人で同じ大きさに分けるときと，3人で同じ大きさに分けるときでは，どちらの方が大きくなるでしょう」。その結果，86％というかなり高い正答率が得られた。さらに，澤野・吉田（1997）は，分数を学習する前の3年生に等分割に関する知識について分析した。等分割についてのピザ問題では，3枚のピザを4人で食べた場合に同じ大きさに分けるように求めた。また、色紙問題では，5枚の色紙を3人で分けたとき，同じ大きさにわけるように求めた。その結果，正答率はピザ問題では65％で，色紙問題では40％であった。分数を学習する前に，全体を部分に等しく分けることができるという分数概念の豊かな知識をもっていることが実証されている。また，子どもの主な問題解決方略について分析したところ，（1）全体を人数分で割る（ピザ問題では全てのピザを4等分する）単位方略，（2）それぞれの全体を各人に割り振り，残りを単位方略で分割する（色紙問題では，色紙の3つを1人ずつに配り，残りの2つを3分の2に分割する）大単位方略が見られた。こうした方略は，分数の種類でいうと，単位方略は真分数であり，大単位方略は帯分数である。このことは，真分数でなく，帯分数に対応した知識も，インフォーマルに獲得していることを示すものである。類似した結果が，Kiren (1988) やLeinhardt（1988）やLamon (1993)によっても明らかにされている。こうして有理数というかなり難しい領域においても，インフォーマルな知識を獲得していることが実証されている。

本研究では，子どもにとってかなり難しい有理数のなかでも，ほとんど研究されていない割合についての暗黙的でインフォーマルな知識について検討することが目的である。割合概念の理解に関しては，Noelting（1980）の研究で見られるように比例的な課題を基にした研究がほとんどである。そこでは，倍数を使った整数の知識が利用できる段階での割合概念については10歳頃には理解されていることが明らかにされているが，2量を総合的に理解することについて，その年齢段階では理解が困難であることが指摘されているにすぎ

ない。割合概念のインフォーマルな知識について，一般的な視点から検討している研究は極めて少ないのが現状である。そのなかで，河野･吉田（1999）は，％の読み方，％の割引，100％の知識，2つの量を含んだ比較などといった，日常生活での割合概念のインフォーマルな知識について検討している。しかし，そこでは，多様な問題が用いられており、精選した問題とはなっていない。そこで，本研究では，以下に述べる点から割合概念のインフォーマルな知識について分析する。第1に，日常生活で獲得している割合の意味と割合の基本的な側面である量について分析する。第2に，割合の3用法の中でも，日常生活で獲得しやすいと考えられる第2用法の知識について検討する。第1用法や第3用法と比較して，第2用法は基にする量における割合を求める問題であり，日常生活の知識から解決する可能性があると考えられるからである。第3に，子どもがもつインフォーマルな知識の分析から，割合の学習指導の具体的な方法について検討する。というのは，インフォーマルな知識を基にした教授介入の重要性についての指摘がなされているからである（Moss & Case, 1999；Streefland，1993；Crpenter，et al.，1993；De Corte et al., 1996）。本研究における対象となる子どもは、割合概念を学習していない4年生，5年生，割合を学習している6年生である。

方　法

対象者

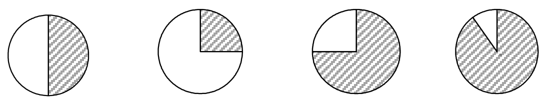
愛知県内の公立小学校の4年生100名，5年生135名，6年生145名が参加した。

材料

用いられた問題は，最初に「％」についてどの程度知っているかについて尋ねる問題が1題，割合の意味に関する意味問題では，品物の値引き問題，「％」で全体を分解する問題，全体としての1の概念についての問題が3題，量としての大きさについての量的表象問題が4題，第2用法に関するインフォーマルな知識についての問題が3題であった。

1. 「％」についてどの程度知っているかについて，読み方，使われている場面について尋ねた。
2. 意味表象問題 (1) 値引きによる値段の比較：「つばさ君はシャツを買おうと思っています。Ａデパートではほしいシャツが30％引きで売られています。Ｂデパートでは，同じシャツが20％引きで売られています。下の（　）に高い・安いのどちらかを入れましょう。ＡデパートよりもＢデパートでシャツを買った方が，（　　　　　）。」
   (2) 全体としての1の概念：「ＡとＢの2つのコップがあります。Ａのコップに水を100％いれました。コップのどこまで水がくるでしょうか。Ａのコップに線を引いて表しましょう。Ｂのコップに水を100％入れました。コップのどこまで水がくるでしょうか。Ｂのコップに線を引いてあらわしましょう。」

   (3) 部分と全体の関係：「みかさんは，今70％の力を出して運動場を走っています。全部の力を出して走るには，あと何％の力を出せばいいでしょうか。」
3. 量的表象問題：「下の円の図で線が引かれているところはだいたい何％でしょう。」：50％の図，25％の図，75％の図，90％の図。



4. 第2用法に関するインフォーマルな知識についての問題：(1) 30人のりのバスで50％の人数は（　　）人です。(2) 20人のりのバスで25％の人数は（　　）人です。(3) 40人のりのバスで75％の人数は（　　）人です。

手続き

問題は一斉テストの形式で，2010年の11月に実施された。各学級担任が，用紙を配布して学校のテストではなく単なる調査問題なので，緊張しないで答えるようにと話した後に解答を求めた。解答時間は30分であった。

結　果

1. 「％」についてどの程度知っているかについての反応

「％」を正しく読むことができた子どもは，4年生で91％，5年生で93％であった。当然のことであろうが割合を学習している6年生は100％であった。「％」が使われている場面については，スーパーやデパートでの割引率，ジュースの成分表示，天気予報の降水確率、テレビ番組の視聴率などであった。子どもは，公的に「％」を学習する前に，日常生活において見たり聞いたりしており，既に生活に密着したものであることが示唆される。

2. 割合の意味表象に関する反応

(1) 値引きによる値段の比較問題の反応

学年間の正答率をFigure 1に示した。6年生は割合を学習しており正答率が9割である。4年生と5年生で

は差は見られず，8割の正答率を示している。学習前の4年生と5年生がそれぞれ8割の高い正答率を示していることから考えると，「％」で示された割合を比較して値段が安いか・高いかを判断することは十分可能であると言えよう。

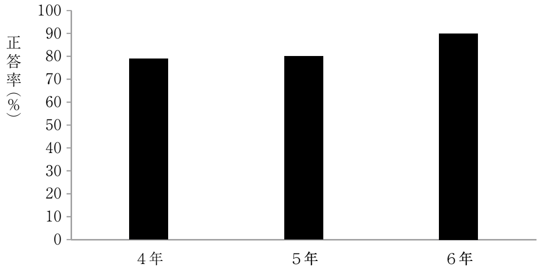


Figure 1　値引きによる値段比較問題

(2) 全体としての1の概念問題の反応

学年間の正答率をFigure 2に示した。正答率は4年生が91％，5年生が94％，6年生が97％と9割以上でありどの学年においても高い正答率を示している。基にする量が変化すれば，100％が示す量も変化することについてかなりの子どもが理解している。基にする量を考えて100％の量を示すことができるといえよう。全体としての1の概念についてある程度理解していると考えられる。

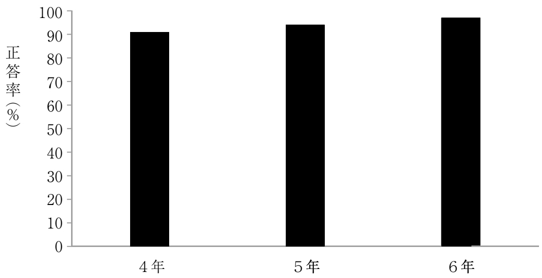


Figure 2　全体として1の概念問題

(3) 部分と全体の関係の反応

学年間の正答率をFigure 3に示した。正答率は4年生が93％，5年生が94％，6年生が97％とどの学年でも高い正答率である。学年間に差は見られない。この問題を解くためには，70％が部分であり100％が全体であることを理解していることが必要である。4年生の段階で％として示された量としての割合に関して，部分と全体の関係をある程度理解していることが示唆される。割合における量としての全体が100％であるという知識を，学習前から日常生活の中で獲得していると言えよう。

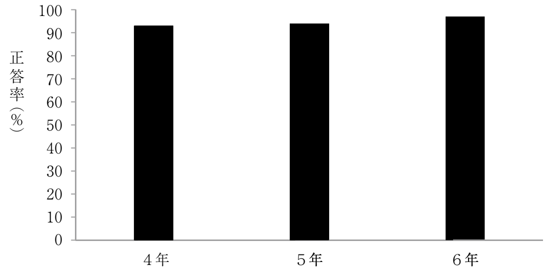


Figure 3　部分と全体の関係問題

3. 量的表象に対する反応

学年間の正答率をFigure 4に示した。50％問題の正答率は，4年生が82％，5年生が89％，6年生が96％と高い正答率である。100％の半分ということから50％の量的表象については日常生活の中で十分に理解されているといえよう。25％問題の正答率は，4年生が68％，5年生が68％，6年生が85％と，4年生と5年生では差が見られない。同様な傾向が75％問題でも見られている。25％問題は，50％の半分であり，75％問題は50％に25％を加算して解決できることから，4年生と5年生は半分を基にして考えていると考えられる。90％問題では，25％問題や75％問題に比べて正確な数値を判定することが難しく，90％前後の答えが多く見られたので，85％から90％までの範囲の答えは正解とみなした。それでも，4年生にとっては正答率が59％と量的問題の中で最も難しいといえる。その理由としては，半分を基にして考えることが難しいことにあると考えられる。

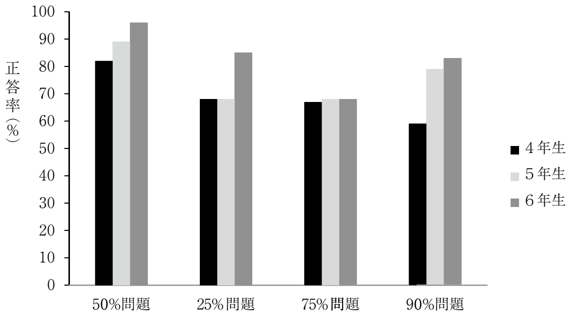


Figure 4　量的表象問題

4. 第2用法に関するインフォーマルな知識の反応

第2用法の各問題に対する学年毎の正答率をFigure 5に示した。第2用法は，基にする量と割合を知って，比べる量を求める問題である。学校では公式として基にする量×割合を利用して解くように指導している。割合を学習していない子どもが，問題を解決できるかを分析した。最初に50％問題についてみると，4年生が70％，5年生が74％，6年生が91％と，割合の公式を知らない4年生と5年生でも7割の子どもが正しく問題を解決している。25％問題では，4年生が45％，5

年生が57％，6年生が76％と4年生と5年生でも約5割の子どもが正しく問題を解決している。割合を学習する以前の半数ほどの子どもが，第2用法の問題を解決できることは驚くべきことである。

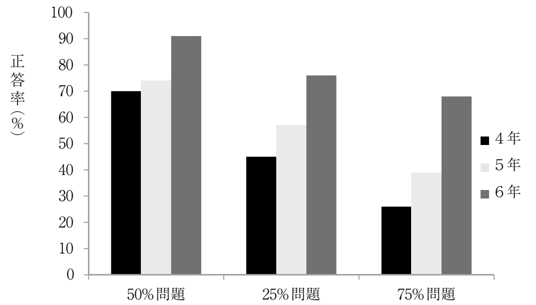


Figure 5　各問題における学年ごとの正答率

それでは，割合の公式を知らない子どもがどのようにして第2用法の問題を解決したのであろうか。子どもが，問題を解決するときに解答用紙に書いた方略から分析した。尚，子どもに面接したのでなく，問題を解く際に用いた方略から分析したものである。そのため，子どもの答案の3割程度しか分析することができなかった。正答した子どもの方略は以下の4つに分類された。第1は，50％を半分、25％を半分の半分というように半分を基にした方略である。第2は，％を4分の1，4分の3というように図に表して乗法的に解く方略である。第3は，全体の10％または5％を求めてそれを基にした割合を構成する方略である。第4は，75％を加法的に50％＋25％として合成･分解して求めた方略である。

こうした方略が，学年ごとにどのように用いられたかについて分析した。4年生では，50％問題では半分に基づく解決が最も多く見られた。25％問題では4分の1，75％問題では4分の3として乗法的に解決している子どもが見られた。75％問題では，合成・分解して解決している子どもも見られた。5年生では，50％問題で半分を基にして解く子どもが多く見られた。25％問題や75％問題では，4分の1や4分の3だからという乗法的な方略を利用する子どもが多かった。25％問題や75％問題で，全体の10％または5％を求めてそれを基にした割合を構成する方略も見られた。また，75％問題で，合成・分解して解決している子どもも少なかったが見られた。6年生では，5年生で割合の3用法の公式を学習しており，ほとんどの子どもが公式により問題を解決していた。しかし，25％問題や75％問題では、公式による解決ではなく，4分の1や4分の3だからという乗法的な方略を利用する子どもが見られた。このように4年生や5年生が，公式を利用しないで第2用法の問題を正確に解決できた理由は，子どもが多用な方略を利用して解決したことにあると言える。

考　察

本研究は，割合を学習する以前の子どものインフォーマルな知識について，意味表象と量的表象と第2用法から検討した。

最初に，意味表象については，値引きの比較問題，全体としての1の概念の問題，部分と全体の関係の問題から，4年生も5年生も割合のインフォーマルな知識をある程度獲得していることが示された。値引きの比較問題について，4年生も5年生も8割という高い正答率を示した。全体としての1の問題からは，子どもは100％という知識は安定していることが示された。さらに，部分と全体の関係の問題から，合成と分解の性質に関する知識を理解していることが示された。

次に，量的表象についても意味表象と同様な結果が示された。50％問題では4年生と5年生で8割，25％問題や75％問題ではそれぞれの学年において7割ほどの正答率を示した。また，4年生の90％問題でも6割程度の高い正答率であった。これらのことから，割合を学習する以前において，量的な表象を獲得していることが示された。割合の量としての大きさについて，子どもはインフォーマルに理解していると言えよう。

第2用法に関するインフォーマルな知識についても，公的に学習する以前の4年生や5年生もある程度獲得していることが示された。第2用法について公式を用いないで解決できるとは，一般には考えにくい。しかし，50％問題や25％問題では，およそ5割以上の子どもが正答している。また，難しい75％問題でも，公的に学習した6年生と比較すると正答率は低いが，4年生で26％，5年生で39％の子どもが正確に解いている。子どもは自ら考案した多用な方略を用いることにより，第2用法の問題を解決していたことは驚くべきことである。50％問題や25％問題では、半分を基にした方略を用いており，75％問題では4分の1，4分の3としての乗法的な方略や合成・分解による加法的な方略を利用していた。このように，割合の3用法の1つである第2用法については，インフォーマルな方略を利用することによりかなり解決できることが実証された。

また，6年生において，公式を用いないで，25％問題や75％問題をインフォーマルな方略で解いている子どもが見られた。これは，これまでの研究で示しているようなインフォーマルな知識は数学的な状況では活性化されないという結果とは異なるものである（Carraher et al., 1987：Leinhardt, 1988）。公的に学習しても，インフォーマルな方略をとることがSmith（1995）の分数の研究で示されている。同様な結果を，割合の3用法の問題解決において栗山（2006）も示している。この点については，これらの研究だけから明確に言うことはできないが，学習した後もインフォーマルな知識は強い影響をもっていることが示唆される。

本研究で見られたインフォーマルな知識を用いることにより，割合の指導についてどのようなことが考えられるのであろうか。割合の学習では，割合の3用法の習得が中心であり，学校でも3用法の公式の習得に多くの時間を使っている。意味表象や量的表象の知識を子どもが獲得していることと，割合概念の公式の理解とは全く関連していないように思われる。しかし，割合概念の本質は，公式そのものではなく，全体に占める量としての大きさの理解である。割合概念の公式を意味的に理解するためには，公式や記号を記憶することではなくインフォーマルな知識が前提となると考えられる。そこで，インフォーマルな知識を基にした具体的な指導について以下に述べる。第1に，量としての割合概念について子どもはかなり豊かな知識をもっていることから，算数の教科書にある小数倍から指導するのではなく，％から導入することである。子どもの既有知識を考慮するならば，％からの指導が子どもにとっては当然わかりやすいといえよう。さらに，量概念を強調するための視聴覚教材としての割合モデルを導入することにより，割合の量的側面がより理解しやすくなると考えられる。割合モデルとは，外側の四角形が基にする量で，内側の四角形が比べる量となるモデルである。こうした視覚的教材を用いることにより，基にする量に占める比べる量が割合であることが視覚的に簡単に理解できる。

第2に，割合モデルの教材を用いることにより，およその割合が把握できる。およその見積もり能力の獲得により，答えが適切かどうかを子どもが評価できると思われる。

第3に，割合の第2用法をインフォーマルに子どもは理解していることから，教科書における第1用法，第2用法，第3用法という公式の指導順ではなく，第2用法を最初に指導することである。

こうした方法は，教科の論理ではなく，子どもの論理に基づいた指導である。教科の論理とは，算数や数学の論理の世界を子どもにわかりやすくまとめたものである。それに対して，子どもの論理とは，子どもがインフォーマルに獲得している知識に基づくものである。従来の教科教育のカリキュラムでは，子どものインフォーマルな知識を全くと言っていいほど考慮していない。子どもが算数や数学の理解に困難性をもっていなければ問題はないが，現状からみるとそうはなっていない。そこで，教科の論理だけでなく子どもの論理を取り入れた指導を考えていくことが重要になると考えられる。

今後の課題としては，現行の教科の論理に基づいたカリキュラムでなく，子どもの論理をもとにしたカリキュラム構成を行いその効果を実証することである。Yoshida & Sawano（2002）は，分数の領域において子どもの論理をもとにしたカリキュラムについて検討している。今後は，割合の領域も含めて，いろいろな領域において，子どものインフォーマルな知識を分析し，子どもの思考に基づいたカリキュラム構成についての検証が必要になってくる（栗山，2010）。そのためには、それぞれの領域で子どものもつインフォーマルな知識をこれから具体的に明らかにしていくことが重要である。

引用文献

Carpenter, T.P., Fennema, E., & Romberg, T.A. 1993 Toward a unified discipline of scientific inquiry. In Carpenter, T.P., Fennema, E., & Romberg, T.A. (Eds.), *Rational numbers: An integration of research*. Hillsdale, N.J.: Lawrence.

Carraher, T. N., Carraher, D.W., & Schliemann, A.D. 1987 Written and oral mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, **18**, 83-97.

De Corte, E., Greer, B., & Verschaffel, L.1996 Mathematics learning and teaching, In D. Berliner & R. Calfee (Eds.), *Handbook of Educational Psychology*, Macmillan, New York.

藤村宣之　1990　児童期における内包量概念の形成過程について　教育心理学研究，**38**，277-286.

Fuson, K. 1988 *Children's counting and concepts of number*. New York: Springer-verlag.

Gelman, R., & Gallistel, C.R. 1978 *The child's understanding of number*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

河野康男・吉田甫　1999　割合を学習する以前の5年生が持つインフォーマルな知識の分析　宮崎大学教育学部・教育実践研究指導センター紀要，**6**，25-38.

Kiren 1988 Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. In J. Hibert & M. J. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle graders*. Pp. 162–181. Hillsdle, NJ: Lawrence. 1988.

栗山和広　2002　幼児・児童における数表象の構造　北大路書房

栗山和広　2006　割合の問題解決における方略分析　九州保健福祉大学研究紀要，**7**，87-92.

栗山和広　2010　子どもはどう考えるか　おうふう

Lamon, S.J. 1993 Ratio and proportion: Connecting content and children's thinking. *Jounrnal for Research in Mathematics Education*, **24**, 41–61.

Leinhardt G. 1988 Getting to know: Tracing student's mathematical knowledge from intuition to competence. *Educational Psychologist*, **23**, 170–193.

Mack, N.K., 1990 Learning fractions with understanding: Building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, **21**, 16–32.

Mack, N.K., 1993 Learning rational numbers with understanding: Building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, **21**, 119–144.

Moss. J., & Case, R. 1999 Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, **30**, 122–147. 1999.

Noelting, G. 1980 The development of proportional reasoning and the ratio concept: Part 1 differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics*, **11**, 217–253.

澤野幸司・吉田甫　1997　分数の学習前に子どもがもつインフォーマルな知識　科学教育研究，**21**，99-206.

Smith J.P. 1995 Competent reasoning with rational numbers. *Cognition and Instruction*, **13**, 3–50.

Streefland, L. 1993 Fractions: A realistic approach. In Carpenter, T.P., Fennema., E., & Romberg, T.A. (Eds) *Rational numbers: An integration of research*. Hillsdale, NJ: LEA.

吉田甫・栗山和広　1991　分数概念の習得過程に関する発達的研究　教育心理学研究，**39**，382-391.

Yoshida H. & Sawano, K. 2002 Overcoming cognitive obstacles in learning fractions: Equal partitioning and equal-whole. *Psychological Reasearch*, **44**, 183–195.

（2011年9月12日受理）