イプシロン　2000. Vol. 42, 75-83

# 一様分布の和の平均到達時間

## ― $e$ を近似する確率シミュレーション ―

愛知教育大学　　鈴　木　将　史

### 1．はじめに～ある日の問題～

筆者が学生だった頃，大学祭の催しとして，数学科の学生がひと部屋を借りて喫茶店を開き，そこで様々な数学上の質問に答えるというサービスが行われていた。その部屋を訪れてくれたお客さんから料金を徴収していたかどうかは記憶にないが，数学科の学生側が出題する「懸賞問題」などもあって，結構盛況だったことを覚えている。

そのとき，高校生か大学１・２年と思われる男子学生がやって来て，M．ガードナーが書いたブルーバックスか何かの本（書名は確認しなかったので不明）を見せながら，次のような定理を証明する方法について尋ねた。ここではそれを定理１として紹介しよう。

**定理１**　［0，1］区間の一様乱数（０と１の間に一様に分布した実数値確率変数）を独立にいくつも発生させて加えていくとき，その和が１を超えるまでにかかる乱数の個数の平均は，自然対数の底 $e = 2.71828\cdots$ である。

つまり，０と１の間の値をまんべんなく取るような乱数（コンピュータを使って乱数を発生させると，通常このような乱数が得られる。もっとも，その場合あくまでも「疑似乱数」であり，「真の乱数」と言えない面があるが，そのことはここでは論じない。）を次々と加えていくと，いつかは和が１を超えるであろうが，それまでに平均していくつの乱数を加えなければならないかという問題の答えが，$e$ になるというのである。

なお本稿では，定められた値に達するのに必要な乱数の個数を「到達時間」という言葉で呼ぶことにする。たとえば１秒に１個乱数を発生させるとしたら，乱数の個数はそのまま所要時間となり，イメージとしてつかみやすいと思う。

さて，筆者は確率論を専攻していたので，この問題の担当として呼ばれ，そのとき初めてこの定理を知った。幸いオーソドックスな手法により，証明は比較的簡単にできたので恥をかくことはなかったが，この美しい定理は永く筆者の頭に残った。筆者が答えた証明はあとで紹介するとして，この定理は以下の２つの理由で，とても興味深く，かつ教育的である。

## 理由１　結論が意外である

この定理の結論を知らされず，問題として与えられたとすると，多くの人が「よくわからないけど，２ぐらいかな」と考えるのではないか。なぜなら，１個の一様乱数の平均値は 0.5 であるから，２個の一様乱数の和の平均がちょうど１になるからである。

実はこの考えは，「幾何分布」と呼ばれる分布に関する次のような問題に対しては全く正しいことがわかる。

〔問題１〕 公平なコインを表が出るまで投げ続けるとき，初めて表が出たときの回数の平均はいくつか。またコインの表が出る確率が $p$ $(0<p<1)$ のときはどうか。

〔答〕一般の場合について，初めて表が出るまでにかかる回数を $T$ とおく。容易にわかるように，

$P(T=k)=pq^{k-1}$　（ただし $q=1-p$）より、回数の平均値は

$$E(T)=\sum_{k=1}^{\infty}kpq^{k-1}=p\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}=p\cdot\frac{1}{(1-q)^2}=p\cdot\frac{1}{p^2}=\frac{1}{p}$$

となり，平均回数は表が出る確率の逆数，公平なコインの場合は２となる。　□

この問題は，「コインを投げて表が出たら１点，裏が出たら０点として，点数の和が１になるまでの回数の平均値を求めよ」と表現してもよい。このとき表が出る確率を $p$ とすれば，毎回の得点の平均は $1\cdot p+0\cdot(1-p)=p$ であり，平均到達時間はまさにその逆数となっていることがわかる。つまり「毎回の平均得点の逆数」＝「平均到達時間」なのである。

公平なコインの場合には，毎回の点数の平均値は $p=0.5$ であり，平均到達時間はその逆数，すなわち２となる。この場合，毎回の点数を確率変数 $X$ と見ると，$X$ は区間［0, 1］上における「間隔１の一様分布」とも言える。つまり上の〔問題１〕は，「定理１を間隔１に離散化したもの」と見てよい。

上記の直観からすると，０と１の間の連続的な一様乱数のときには平均が２ではなく，自然対数の底 $e$ になるというのはかなり意外で，しかも登場人物が美しいため神秘的な感じさえするように思う。

## 理由２　定義と全く関係のない設定から $e$ が出てくる

「一様乱数の和」という設定には，指数・対数関数は全く関係を持たないように見える。にもかかわらず，結論には突然 $e$ が登場する。このような例は円周率 $\pi$ についてはよく見かけるが，自然対数の底 $e$ については珍しいのではないだろうか。

確率論で乱数を利用したシミュレーション，いわゆる「モンテカルロ・シミュレーション」を行う場合にしても，$e$ が得られるものは珍しい。有名なものとしては，正方形に内接する円を描いておき，正方形内にランダムに取った多数の点の中で円内にあるものの個数を数えれば，その割合が面積の比を表すことから $\pi$ が近似されるというシミュレーションがある。直観的にわかりやすく，結構精度のよい結果が得られるので，教育現場などでもパソコンを使って実際に行われることが多いと思う。

しかし面積の比が $e$ をもたらすような図形を，指数関数を使わずに作ろうとするのは難しいであろう。だから $\pi$ のときと同じような発想で $e$ を近似するシミュレーションを作るわけにはいかない。ところが，上の定理1をもとにすれば，乱数を次々と発生させて和が1を超えるまでの回数を数える，という操作を何度も繰り返して，その到達時間の平均を求めればいいわけだから，全く容易に $e$ を近似するシミュレーションを実行できる。そのためのプログラムは，全くつまらないほど簡単なもので，おそらくは $\pi$ を近似するプログラムよりも単純であろうと思われる。

実際，簡単な（せいぜい十数行の）プログラムを実行すると，1万回の繰り返しで誤差はほぼ 0.01 以下，100万回もやれば 0.001 以下となり，自然対数の底 $e$ を，2.718 あたりまで確定することができる。

円周率 $\pi$ については（記号は知らなくても）小学校から習い，イメージも幾何学的につかめるが，自然対数の底 $e$ については，$\pi$ と同じぐらい重要な定数であるにもかかわらず，大学生に聞いてみてもその定義や性質を答えられる者は少ない。これは学習時期が遅く，時間をかけて定着する余裕がなかったということもあるだろうが，やはり円周率ほどクリアなイメージをつかみにくいということが大きいと思う。教える側としては，「複利計算の極限値」など少しでも直観的に理解してもらえるように努力するのだが，学生の理解度は今ひとつである。その点，定理1は十分に簡潔であり，定数 $e$ の簡単なイメージをつかむ助けとなる，従来にない見方であるといえよう。筆者がこの定理を教育的だと考えるのはこのことである。定理1が有名になれば，きっと高校の授業でもこのシミュレーションが盛んに行われるようになることは間違いないと思う。

## 2．定理の証明

ここでは前述した大学祭の喫茶コーナーで筆者が行った証明を紹介する。この定理がどうして正しいのか，そのわけが計算によって示されるが，特に証明にこだわらない読者は，ここを飛ばして次節へ直行してもよい。

〔定理1の証明〕

区間［0, 1］上の独立な一様分布確率変数列を $X_1$, $X_2$, $X_3$, $\cdots$ で表し，それらの共通な確率密度関数を $p(x)$ で表す。$p(x)$ は，$0 \leqq x \leqq 1$ で 1，その他では 0 となる関数である。さて，$0 \leqq x \leqq 1$ に対し，

$$P(X_1 \leqq x) = \int_0^x p(y)\,dy = x\,,$$

$$P(X_1 + X_2 \leqq x) = \int_0^x P(X_1 \leqq x-y)\,p(y)\,dy = \int_0^x (x-y)\,dy = \frac{1}{2}x^2\,,$$

$$P(X_1 + X_2 + X_3 \leqq x) = \int_0^x P(X_1 + X_2 \leqq x-y)\,p(y)\,dy = \int_0^x \frac{1}{2}(x-y)^2\,dy = \frac{1}{3!}x^3\,.$$

以下同様にして，$0 \leqq x \leqq 1$ に対し，

$$P(X_1 + X_2 + \cdots + X_k \leqq x) = \frac{1}{k!}x^k$$

となることが示される。したがって特に $x=1$ のとき，

$$P(X_1 + X_2 + \cdots + X_k \leqq 1) = \frac{1}{k!}$$

となる。さて，和が1を超える回数（到達時間）を $T$ とおくと，「$T=k$」とは「$k-1$ までは1以下で，$k$ のときは1以下でない」ということであるから，

$$\begin{aligned} P(T=k) &= P(X_1 + \cdots + X_{k-1} \leqq 1) - P(X_1 + \cdots + X_k \leqq 1) \\ &= \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} \\ &= \frac{k-1}{k!}\,. \end{aligned}$$

これより到達時間の平均は，

$$E(T) = \sum_{k=1}^{\infty} k\,P(T=k) = \sum_{k=1}^{\infty} k\,\frac{k-1}{k!} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-2)!} = e$$

となる。　□

上の証明で，独立な確率変数の和に関する「畳みこみ積分(convolution)」を用いたが，そのような知識がなくても，$P_1 + P_2 \leqq x$ であるためには $P_1 = y$ のもとで $P_2 \leqq x - y$ であればよいことから，計算の趣旨は何となく理解されるであろう。

## 3．離散化の試み～サイコロで $e$ を近似する

定理1の結論は前述のように大変意外かつ教育的だが，パソコンがない環境では直接確かめてみることは困難である。また，たとえパソコンが容易に利用できるとしても，何千何万という乱数を一瞬のうちに発生させて実行するシミュレーションは，「なるほど理論通りだ」という感興

を誘いはするものの，何となく自ら確かめたという実感を味わえるものではない。

こんなとき教室でよく使われる道具がコインやサイコロである。これらは何千回と繰り返し実験するのには向かないが，文字通り「自らの手で」シミュレーションを実行したという気分は，はっきりと味わうことができる。これらのうちコインは〔問題1〕そのものであるから，サイコロを利用してみよう。つまり，連続型ではないが一様ではある「サイコロの目」という乱数を使うのである。

しかしすぐに気づくように，サイコロの目そのままでは，毎回少なくとも1が足されてしまい不適当であるから，「6の目を0とみなす」という「変換」を行って，0，1，2，3，4，5の6つの目が等確率（6分の1）で出ることにしておく。その上で次のように問題を設定する。

**〔問題2〕** 0から5までの目が $\frac{1}{6}$ ずつの確率で出るサイコロを何回も振るとき，出た目の和が<u>5を超える</u>までの到達時間の平均値を求めよ。

これは定理1に似せて翻訳すれば，「0，0.2，0.4，0.6，0.8，1 を等確率で取るような離散的な乱数を次々と発生させ，それらの和が1を超えるまでにかかる回数の平均値はいくつか」という問題と同じである。つまり「定理1を間隔 0.2 に離散化したもの」である。

ただ，よく考えると，「5を超える」とは「6以上」ということなので，5までしか出ないサイコロにとっては，少し目標が高い。そのため平均到達時間は少し長くなるだろうと思われる。そこで「5を超える」を「5以上となる」に変えた次の問題も考えられる。

**〔問題3〕** 0から5までの目が $\frac{1}{6}$ ずつの確率で出るサイコロを何回も振るとき，出た目の和が<u>5以上となる</u>までの到達時間の平均値を求めよ。

連続型の確率変数の場合は「超える」も「以上となる」も結果は変わらないが，サイコロのような離散型変数の場合には大きな違いを生ずる。〔問題3〕の方に関して言うと，今度は1回で到達してしまう確率が1/6もあり，逆に目標が少し低いため，平均到達時間は少し短くなるだろうと思われる。

筆者は最近数年にわたって，中学生や高校生を対象とした公開講座を愛知教育大学において担当しているが，上の2つの問題の答えは当初思いつかなかったため，「5を超えるまでの平均到達時間と5以上となるまでの平均到達時間を足して2で割れば，だいたい $e$ に近くなるだろう」という程度で満足していた。この「足して2で割った」値は実験的にもまあまあ $e$ に近く，あとで述べる厳密な値に基づく計算でも 2.737152 となるので，「当たらずとも遠からず」といったところだったわけである。

しかしそのような理論的裏付けのない，あいまいな「満足」では当然マズいと思い，次第に2つの問題の「本当の平均値はいくつなのだろう」との疑問を解決したくなった。また，サイコロの場合に限らず，これをルーレットに変えれば目の数は6から一挙に 37 や 38 まで上がり，平均到達時間もより一層 $e$ に近くなるであろうと思われる。その意味でも，サイコロの場合だけでなく，目の数を一般化した場合に問題を解決しておく必要がある。

## 4．離散的な場合の平均到達時間

この節では，前節の〔問題2〕〔問題3〕に対する答えを与える。と同時に，目の数が5まで以外の一般的な場合に対しても平均到達時間を与える。

そのために，「一般化されたサイコロ」の目の上限を $M$ としよう。通常のサイコロの場合にはもちろん $M=5$ というわけである。その上で，繰り返し振られる「一般化されたサイコロ」の目の表現として，$\{0, 1, 2, \cdots, M\}$ のそれぞれの値を等確率で取るような，同一の分布にしたがう独立な確率変数の列 $X_1, X_2, X_3, \cdots$ を考える。この設定のもとで，前節の2つの問題は，以下のように一般化される。

**〔問題4〕** 0 から $M$ までの値を $\dfrac{1}{M+1}$ ずつの等確率で取る独立な確率変数の列 $X_1, X_2, X_3, \cdots$ の $n$ 個の和を $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ とおく。このとき，初めて $S_n > M$ となる $n$ を $T$（到達時間）とする。この到達時間の平均値を求めよ。

**〔問題5〕** 0 から $M$ までの値を $\dfrac{1}{M+1}$ ずつの等確率で取る独立な確率変数の列 $X_1, X_2, X_3, \cdots$ の $n$ 個の和を $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ とおく。このとき，初めて $S_n \geqq M$ となる $n$ を $T$（到達時間）とする。この到達時間の平均値を求めよ。

これらの問題を解決する上で大きな力を発揮する補題を用意しよう。

**補題1**　$k \leqq M$ となる $k$ に対し，$S_n = k$ となるような $X_1, X_2, \cdots, X_n$ の値の取り方の総数は，重複組合せ ${}_nH_k$ に等しい。したがって，その確率は

$$P(S_n = k) = \frac{{}_nH_k}{(M+1)^n}$$

となる。

〔補助1の証明〕$S_n = k$ となる場合の数は，$X_1$，$X_2$，…，$X_n$ のそれぞれに0以上の整数を対応させ，それらの和が $k$ となるようにする仕方の総数だから，言い換えれば $n$ 個の箱に $k$ 個のボールを分けて入れるときの，ボールの入れ方の数に等しい。これは $n$ 個の箱から重複を許して $k$ 個を取る場合の数に等しいから，重複組合せ ${}_nH_k$ に他ならない。 □

**補題2**　$0 < r < 1$ となる $r$ に対し，

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \, {}_nH_k = \frac{r}{(1-r)^{k+1}} .$$

〔補題2の証明〕まず ${}_nH_k$ について考えると，

$${}_nH_k = {}_{n+k-1}C_k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \frac{1}{k!} n(n+1)(n+2)\cdots(n+k-1)$$

と表されるから，

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \, {}_nH_k = \frac{r}{k!} \sum_{n=1}^{\infty} (n+k-1)\cdots(n+1) n \, r^{n-1}$$

$$= \frac{r}{k!} \left( \frac{d}{dr} \right)^k \left[ \sum_{n=1}^{\infty} r^{n+k-1} \right]$$

$$= \frac{r}{k!} \left( \frac{d}{dr} \right)^k \left[ \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} \right] \qquad (r^{k-1} \text{までは微分で消える})$$

$$= \frac{r}{k!} \left( \frac{d}{dr} \right)^k \left[ \frac{1}{1-r} \right]$$

$$= \frac{r}{k!} \frac{k!}{(1-r)^{k+1}}$$

$$= \frac{r}{(1-r)^{k+1}} . \quad \square$$

さて，$k \leqq M$ のとき，初めて $S_n > k$ となる $n$ を $T$ とおくと，定理1の証明と同様に，

$$P(T=n) = P(S_{n-1} \leqq k) - P(S_n \leqq k)$$

$$= \frac{1}{(M+1)^{n-1}} \sum_{j=0}^{k} {}_{n-1}H_j - \frac{1}{(M+1)^n} \sum_{j=0}^{k} {}_nH_j$$

が得られる。これより

$$
\begin{aligned}
E(T) &= \sum_{n=1}^{\infty} n\,P(T=n) \\
&= \sum_{j=0}^{k}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(M+1)^{n-1}}\,{}_{n-1}H_j - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(M+1)^{n}}\,{}_{n}H_j\right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(M+1)^{n-1}} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(M+1)^{n}} \quad (j=0\ \text{のとき}) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{k}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(M+1)^{n-1}}\,{}_{n-1}H_j - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(M+1)^{n}}\,{}_{n}H_j\right] \\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(M+1)^{n}} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(M+1)^{n}} \\
&\quad + \sum_{j=1}^{k}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(M+1)^{n}}\,{}_{n}H_j - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(M+1)^{n}}\,{}_{n}H_j\right] \\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(M+1)^{n}} + \sum_{j=1}^{k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(M+1)^{n}}\,{}_{n}H_j \\
&= 1+\frac{1}{M}+\sum_{j=1}^{k}\frac{\dfrac{1}{M+1}}{\left(1-\dfrac{1}{M+1}\right)^{j+1}} \quad (\text{補題 2 による}) \\
&= \frac{M+1}{M}+\sum_{j=1}^{k}\frac{1-\dfrac{M}{M+1}}{\left(\dfrac{M}{M+1}\right)^{j+1}} \\
&= \frac{M+1}{M}+\sum_{j=1}^{k}\left[\left(\frac{M+1}{M}\right)^{j+1}-\left(\frac{M+1}{M}\right)^{j}\right] \\
&= \left(\frac{M+1}{M}\right)^{k+1}
\end{aligned}
$$

以上の計算に $k=M$ および $k=M-1$ を代入して，次の定理２を得る。

**定理２**　0 から $M$ までの値を等確率で取る独立な確率変数の $n$ 個の和 $S_n$ について，

初めて $S_n > M$ となる到達時間 $T$ の平均値は $\left(\dfrac{M+1}{M}\right)^{M+1}$ で，一方

初めて $S_n \geqq M$ となる到達時間 $T$ の平均値は $\left(\dfrac{M+1}{M}\right)^{M}$ である。

したがってサイコロの場合，和が５を超える到達時間の平均値（問題２）は $1.2^6=2.985984$，和が５以上となる到達時間の平均値（問題３）は $1.2^5=2.48832$ で，両者の平均は 2.737152 となる。

0 から 36 まであるルーレットなら，前者は 2.7559495…，後者は 2.6814644… で，両者の平均は 2.71870698… と，かなり $e$ に近い数値となることがわかる。

## ５．極限値 $e$

前節で求めた平均到達時間は，「区間［0，1］を $M$ 等分してできる$(M+1)$個の数値を等確率で取る一様な確率変数を次々と加えていき，和が１を超えるか１以上となるまでの平均回数」と言い換えることもできる。したがって上限 $M$ を大きくすれば，確率変数の取りうる値がだんだん細かくなり，やがて連続一様分布へと近づいていく。そのため定理２の平均到達時間も，定理１の平均到達時間である $e$ へと近づいていくことが直観的に分かる。

このことを定理２の平均到達時間そのものから直接示すこともできる。定理２によれば，初めて $S_n \geqq M$ となる到達時間 $T$ の平均値は $\left(\frac{M+1}{M}\right)^M$ であるが，$e$ の定義から

$$\left(\frac{M+1}{M}\right)^M=\left(1+\frac{1}{M}\right)^M \to e \qquad (M\to\infty \text{ のとき})$$

となり，定理２のどちらの平均時間も，$M$ を大きくすれば $e$ に収束することがわかる。

一方，定理１で平均到達時間が $e$ になることを示すのに使った式は，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=e$$

というものである。どちらも $e$ を導く式として有名なものであるが，定理１を直接証明する場合と，離散的な変数の極限として導く場合とで，この両方の式が現れるというのが興味深い。

以上，自然対数の底を近似する確率シミュレーションについて述べてきたが，このように簡単な設定で，美しく，しかも数学的にも面白い結論が出る題材は珍しいと思う。少しでも $e$ を身近なものとしてとらえさせるのに役立つような教材のひとつとして，利用してみてはいかがであろうか。