

本論文では、ピタゴラス数とアイゼンシュタイン数の性質について考察する。

ピタゴラス数とは、次で定義される数である。

定義 2. $a, b, c \in \mathbb{N}$ が、 $a^2 + b^2 = c^2$ を満たすとき、三つ組 (a, b, c) をピタゴラス数という。また、 $\gcd(a, b, c) = 1$ を満たすピタゴラス数を原始的なピタゴラス数という。

すべてのピタゴラス数は、次のように一般に表される。

定理 1. $a, b, c \in \mathbb{N}$ に対して、次の二つは同値である。

- (i) (a, b, c) は原始的なピタゴラス数で、 a は奇数、 b は偶数である。
- (ii) 次を満たす $m, n \in \mathbb{N} (m > n)$ が存在する:

$$\begin{cases} a = m^2 - n^2, & b = 2mn, & c = m^2 + n^2, \\ m \not\equiv n \pmod{2}, \\ \gcd(m, n) = 1. \end{cases}$$

特に原始的なピタゴラス数は無数に存在する。

ピタゴラス数の生成に関する上記定理 1 を示すことと、この定理を用いていくつかの性質を導くことを、本論文の目的の一つとしている。

次に、アイゼンシュタイン数の定義を述べる。

定義 3. $a, b, c \in \mathbb{N}$ が、 $a^2 + ab + b^2 = c^2$ を満たすとき、三つ組 (a, b, c) をアイゼンシュタイン数という。また、 $\gcd(a, b, c) = 1$ を満たすアイゼンシュタイン数を原始的なアイゼンシュタイン数という。

アイゼンシュタイン数はピタゴラス数と同じように、次のような一般的な形で表される。

定理 4. $a, b, c \in \mathbb{N}$ に対して、次の二つは同値である。

- (i) (a, b, c) が原始的なアイゼンシュタイン数で、 $2c - (a - b)$ は平方数である。
- (ii) 次を満たす $m, n \in \mathbb{N} (m > n)$ が存在する:

$$\begin{cases} a = m^2 - n^2, & b = n(2m + n), & c = m^2 + mn + n^2, \\ m \not\equiv n \pmod{3}, \\ \gcd(m, n) = 1. \end{cases}$$

特に原始的なアイゼンシュタイン数は無数に存在する。

本論文では、上記定理 4 を示すことをもう一つの目的としている。