		論文題目	ポアンカレ予想 ポアンカレ予想を紐解く
氏名	尾串 彩		

1　目指したこと

位相幾何学について初めて興味をいだいたのは，2007 年 10 月 22 日（月）放映，NHK スペシャル「100 年の難問はなぜ解けたのか〜天才数学者　失踪の謎〜」という番組を見たときであった。この番組の中でわたしは，物体の形に注目をした幾何学分野の存在，そして「ポアンカレ予想」という宇宙の謎に迫る手がかりとなるダイナミックな予想の存在を知った。

1904 年に H.Poincaré が発表したこの予想は,『単連結な 3 次元閉多様体は 3 次元球面 (S^3) に同相である。』というものだ。この予想の証明は 100 年の歳月を経てやっと，G.Perelḿan という人物によって解決された。

そんな難しい証明を理解することができたら…。そう考え，わたしはポアンカレ予想について研究を始めた。しかし，そもそも H.Poincaré 予想自体が数学用語で構成された理解し難いものであった。

そこで，ポアンカレ予想そのものに対しての知識を深めることを研究目標とし，位相幾何を学習することとした。

ポアンカレ予想の中で中心となる「単連結」という考え方。それに至るまでの「ホモロジー理論」の理解。そして位相幾何学の中でも角ばった形で図形を作る「組み合わせ位相幾何学」という分野の定義や特徴について学んだことを卒業論文にまとめた。

2　ポアンカレ予想の内容を理解する

2.1　ポアンカレの失敗

初めに H.Poincaré が発表した予想がある。

『組み合わせ 3 次元閉多様体は，そのホモロジー群がすべて 3 次元球面と同じならば，球面と同相である。』

この予想はすぐ，H.Poincaré 自身によって反例があげられた。

2.2　組み合わせ位相幾何学

位相幾何 (トポロジー) とは，図形の形やつながり方に注目し，性質を調べたり分類をする幾何分野である。組み合わせ位相幾何学とは，その中でも**三角分割**できる図形を研究対象とする。

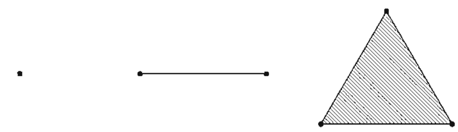
組み合わせ位相幾何学では，**単体**を用いて構成された**複体**という図を基に，図形の性質を調べる。

定義

R^n 内の独立な $r+1$ 個の点を $x_0, \cdots, x_r$ とする。

$\{\, \boldsymbol{x} \mid \lambda_0 x_0 +, \ldots, +\lambda_r x_r = 0, \lambda_0 + \cdots + \lambda_r = 1, \lambda_0, \ldots, \lambda_r \geq 0 \,\}$

を $x_0, \cdots, x_r$ を頂点とする ***r*次元単体** (r-**単体**) という。



0-単体　　1-単体　　2-単体

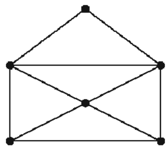
定義

面とは，Δ^r の周囲を形作る 0,⋯,r-1-単体及び自分自身のこととする。

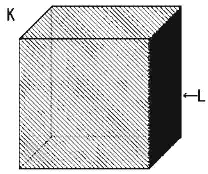
定義

有限個の単体の集合 K が次の条件 (☒)(☒) を満たすとき，K を**複体**という。

(☒)　$K \ni \Delta^r$ なら，δ^r のすべての面は K に属する。
(☒)　$K \ni \Delta_1^r, \Delta_2^r$ なら，$\Delta_1^r \sqcap \Delta_2^r$ は空集合，または Δ_1^r, Δ_2^r の共通の**面**となる。
また，K の部分集合 L がそれ自身複体となっているとき，L を K の**部分複体**といい $L \leq K$ と書く。



1 次元複体



2 次元複体

2.3　ホモロジー理論

ホモロジー理論とは，図形のつながりを精密に調べるために，H.Poincaré によって生み出された理論である。
図形から鎖複体という代数的な対象を作り，それを用いて図形のホモロジー群というものを定義する。
ホモロジー群は図形のつながりかたを測る量となり，さらに二つの図形 (複体)K と L について，
それらの多面体 $| K | L |$ が同相であればホモロジー群 $H(K)$ と $H(L)$ が同型になる。ゆえに，$H(K)$ と $H(L)$ が同型でなれば $| K |$ と $| L |$ は同相でないと分かる。

2.4　単連結

定義
位相空間 X, Y について，
$f : X \to Y, g : X \to Y$ なる連続写像があるとする。
このとき，
$H : I \times X \to Y$ となるような連続写像 H

$$\begin{cases} H(0,x) & = f(x) \ (x \in X) \\ H(1,x) & = g(x) \ (x \in X) \end{cases}$$

が存在するならば，f と g は**ホモトープ**であるといい，$f \sim g$ と表す。このときの連続写像 H を**ホモトピー**という。
また，f が一点への写像 g' とホモトープであるとき $f : X \to Y$ は**零ホモトープ**といい $f \sim 0$ と表す。
定義
Y 上のどの閉曲線 $f(x)$ もホモトープ 0 となるとき，Y を**単連結**という。

3　結果

以上で学んだことを用いて，
・3 次元球面のホモロジーを計算する。
・3 次元球面が単連結であることを証明する。
という二つのことを完成させ，ポアンカレ予想の概要を理解することができた。
この仮定の中で，ホモロジーを計算するために BASIC を用いて行列計算のを完成させたことが最も時間を要し，苦労した点である。
また組み合わせ位相幾何学の学習の中で，一筆書きの問題や正 n 角形が五つしか存在しないことの証明を学んだ。これらのことは今後中等教育の授業でも使える要素としてノートに留めておきたい。
そして今後，まずは高次元ポアンカレ予想から，そして G.Perelman の証明したポアンカレ予想を理解できるまで研究を続けたいと考えている。