

学籍番号		論文 題目	人生 進んで迷って行き止まり —迷路の数理と粘菌モデル—
氏名	瀧本 樹		

1 壁と通路

定義 1 $m, n \in \mathbf{N}$ とする. 頂点集合を $V_0 = [0, m+1] \times [0, n+1] \setminus [m] \times [n]$ とし, 辺集合を $E_0 = \{\{a, b\} \subset V_0 \mid a \sim b\}$ とする無向単純グラフ $\mathbf{W} = (V_0, E_0)$ を外壁とよぶ. また, 頂点集合を $V = [0, m+1] \times [0, n+1]$ とし, 辺集合 $E \subset 2^V$ が2条件

- 1). $E_0 \subset E$,
- 2). $\{a, b\} \in E$ ならば $a \sim b$

を満たすような無向単純グラフ $\mathbf{X} = (V, E)$ をサイズ $m \times n$ のプレ迷路とよぶ.

定義 2 $\mathbf{c} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ とする. サイズ $m \times n$ のプレ迷路 $\mathbf{X} = (V, E)$ に対し, 頂点集合を $U = [m+1] \times [n+1] - \mathbf{c}$, 辺集合 H を

$$H = \{\{p, q\} \in 2^U \mid p \sim q \text{ かつ } \forall \{a, b\} \in E \text{ に対し } \overline{pq} \cap \overline{ab} = \emptyset\}$$

とする無向単純グラフ $\mathbf{G}^X = (U, H)$ をプレ迷路 \mathbf{X} の通路と呼ぶ.

2 連結迷路と単連結迷路とは

定義 3 任意の2点 $p, q \in U$ に対し, $\{p, p_1\}, \{p_1, p_2\}, \dots, \{p_r, q\} \in H$ となる互いに相異なる点列 $p_1, \dots, p_r \in U$ が存在するとき, プレ迷路 \mathbf{X} を連結迷路と呼ぶ. 更にこのような点列が各対 p, q に対し, ただ一通りだけ存在するとき, プレ迷路 \mathbf{X} を単連結迷路と呼ぶ.

2点 p, q が連結であるとき, その経路を $(p; p_1, p_2, \dots, p_r; q)$ と表記する.

3 クラスタ法

単連結迷路を生成する迷路は複数存在する. そのなかでよく知られたもののひとつにクラスタ法がある. クラスタ法は以下のようなアルゴリズムで単連結迷路を生成する. 迷路のサイズは $m \times n$ とする.

- 0: $k = 0$ とし, $U_0 = U$, $H_0 = \emptyset$ にとつた $\mathbf{G}_0^X = (U_0, H_0)$ を初期状態とし, クラスタ集合を $C_N = \{(i, j) \in U \mid N = i + m(j-1)\}$ とする.
- 1: $C_1 \neq U$ ならばランダムに $p \in U, q \in N(p)$ を選び,
- 2: p, q が同じクラスタ集合に属するならば手順1に戻る.
- 3: $H_{k+1} = H_k \cup \{\{p, q\}\}$, $\mathbf{G}_{k+1}^X = (U_0, H_{k+1})$ とおく.
- 4: $p \in C_{N_1}, q \in C_{N_2}$ のとき $C_N = C_{N_1} \cup C_{N_2}$ とし, $N = \min(N_1, N_2)$ とする.
- 5: $k+1$ を改めて k と置き直し, 手順1に戻る.
- 6: $C_1 = U$ となったときの $\mathbf{G}^X = \mathbf{G}_k^X$ が求める単連結迷路となる.

4 クラスタ法によって生成された迷路は単連結迷路か

まず, 相異なる2点と同じクラスタ集合に属するならばこの2点は連結であることを証明する. 手順1~4より, $p \sim q$ なる $p, q \in U$ に対して $p \in C_{N_1}, q \in C_{N_2}$ ($N_1 \neq N_2$), $\{p, q\} \notin H_k$ ならば $\{p, q\} \in H_{k+1}$, $C_N = C_{N_1} \cup C_{N_2}$ とする. ここで $p \in C_{N_1}, q \in C_{N_2}$ ($N_1 \neq N_2$) で $(p; p_1, \dots, p_r; q)$ が存在したと仮定する. すると $p_k \sim p_{k+1}$ で $p_k \in C_{N_1}, p_{k+1} \in C_{N_2}$ となる p_k, p_{k+1} が $(p; p_1, \dots, p_r; q)$ の中に存在する. しかし手順4より $C_N = C_{N_1} \cup C_{N_2}$ となるので矛盾. よって, $p, q \in C_N$ ならば $(p; p_1, \dots, p_r; q)$ が存在する.

次に, 相異なる2点をつなぐ経路がただひとつ存在することを証明する. 手順6より, プレ迷路 \mathbf{X} は $C_1 = U$ となったときであるから連結迷路である. ここで異なる二つの経路 $(p; p_1, \dots, p_r; q), (p; p'_1, \dots, p'_r; q)$ が存在したとする. $k = t$ のとき初めて p, q はここで初めて同じクラスタ集合に属したとする. このとき初めて $(p; p_1, \dots, p_r; q)$ が存在する.

$k = t' (> t)$ のとき初めて $(p; p'_1, \dots, p'_r; q)$ が存在したとする. $k = t' - 1$ のときある i が存在して $(p; p'_1, \dots, p'_{i-1}; p'_i), (p'_i; p'_{i+1}, \dots, p'_r; q)$ の二つの経路が存在する. $\{p'_i, p'_{i+1}\} \in H_{t'}$ が存在するには手順2より p'_i と p'_{i+1} が相異なるクラスタ集合に属さなければならない. よって矛盾.

$k = t'' (< t)$ のとき初めて $(p; p'_1, \dots, p'_r; q)$ が存在したとすると $k = t'' - 1$ のとき同様に $(p; p'_1, \dots, p'_{i-1}; p'_i), (p'_i; p'_{i+1}, \dots, p'_r; q)$ の二つの経路が存在する. p'_i, p'_{i+1} は相異なるクラスタ集合に属しているため $\{p'_i, p'_{i+1}\} \in H_{t''}$ が存在し, ここで初めて p, q は同じクラスタ集合に属する. よって矛盾.

ゆえに $(p; p_1, \dots, p_r; q)$ がただひとつ存在する. したがって定義3より単連結迷路となる.

5 粘菌の迷路解法モデル

「迷路を解くことは人間にとってもそれほどやさしい作業ではない．ところが，単細胞生物である真正粘菌という生物が見事に迷路を解くことが発見された。」[2] 注意として，ここで用いられている迷路は連結迷路である．中垣氏による粘菌の迷路解法をもとにした数理モデルは次の通りである [3]．

サイズ $m \times n$ の迷路 $\mathbf{X} = (V, E)$ に対し，ある格子点 $i, j \in U$ とその辺 $\{i, j\} \in H$ に対してその点にかかる圧力を P_i, P_j とする．辺 $\{i, j\}$ の長さを a_{ij} ，コンダクタンスを D_{ij} ，単位時間あたりの流量 Q_{ij} を

$$Q_{ij} = \frac{D_{ij}(P_i - P_j)}{a_{ij}}$$

とする． $u_1, u_2 \in U$ をそれぞれ流入口，流出口とし， u_1 から単位時間あたり流量 Q_0 を流入する． $P_{u_2} = 0$ とする．

$$\frac{d}{dt} D_{ij} = f(|Q_{ij}|) - dD_{ij} \quad (*)$$

をコンダクタンスのダイナミクスとする．これを微小時間で差分化すれば

$$D_{ij}(t + \Delta t) = D_{ij}(t) + \Delta t (f(|Q_{ij}|) - dD_{ij}(t)) \quad (**)$$

となる．ここで f は単調増加な関数で $f(0) = 0$ とする．これらをもとに次のような手順で D_{ij} のダイナミクスを追う．

0: $t = 0$ とし， $a_{ij}, D_{ij}(t), Q_0$ を与える．

1: $\sum_{j \in U_i} Q_{ij}(t) = 0$ がすべての点で成り立つので，それらを連立させて $Q_{ij}(t)$ を求める．

2: 漸化式 (**) から $D_{ij}(t + \Delta t)$ を求める．

3: $t + \Delta t$ を改めて t と置き直し，手順 1 に戻る．

4: $\lim_{t \rightarrow \infty} D_{ij} \neq 0$ となる解の集まりが u_1 と u_2 を結ぶ最短経路である．

6 シミュレーションの結果

実際に粘菌モデルをもとにシミュレーションを行った．点 A を流入口，点 D を流出口とし， $a_{AB} = 1, a_{BC} = 1, L_{BD} = 1, a_{AD} = 3$ とする迷路 \mathbf{X} を考え，初期条件を $D_{AB}(0) = D_{BC}(0) = D_{BD}(0) = D_{AD}(0) = 1$ とした．また $Q_0 = 10, \Delta t = 0.01$ とした． $f(|Q_{ij}|) = Q_{ij}, a = 1$ としてシミュレーションを行ったところ， D_{AB}, D_{BD} は全く同じ値の取り方をした．また t を十分に大きくしたときその値は 10 に近づいた． D_{AD} は $t = 1.11$ までは増加したものの $t = 1.12$ から減少した．また t を十分に大きくしたとき D_{AD} は 0 に近づいた． D_{BC} は減少した． t を十分に大きくしたとき D_{BC} は 0 に近づいた．

参考文献

- [1] 仁平 政一，西尾 義典，グラフ理論序説，プレアデス出版，2005．
- [2] 中垣 俊之，山田 裕康，迷路を解く巨大アメーバ細胞：粘菌，生物物理，**41(5)**，pp244-246，2001．
- [3] 中垣 俊之，粘菌 その驚くべき知性，PHP SCIENCE WORLD，2010．

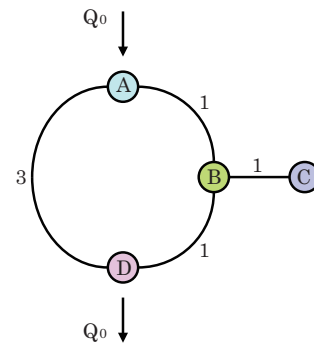


図 1: シミュレーションに用いた迷路 \mathbf{X}

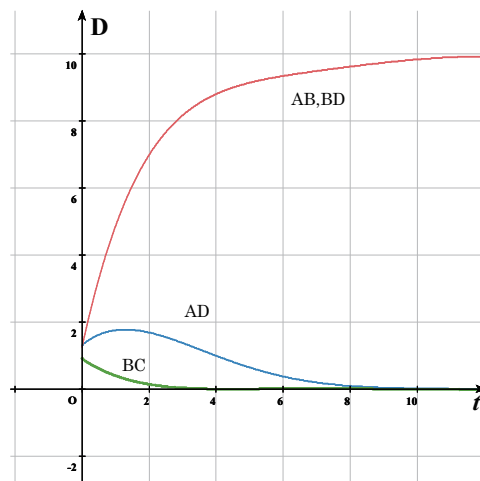


図 2: 左の例での各 D_{ij} の推移