学籍番号		論文題目	テカチュウ，君に決めた！ —結婚問題と交換問題—
氏名	松永　優美		

1　交換問題とは

物の集合 A と人の集合 B を考え，$\#A = \#B$ とする．人 b が，物 a を物 a' よりも好むことを $a \succ_b a'$ と表す．$a \succ_b a'$ または $a = a'$ であることを $a \succeq_b a'$ と表す．これを**選好**と呼び，人はすべての物に対して選好を全順序関係でもつ．

$v_A : A \to B, v_B : B \to A$ となるような写像の組み合わせ $v = (v_A, v_B)$ について，全ての $a \in A, b \in B$ で対合性 $v_A(v_B(b)) = b, v_B(v_A(a)) = a$ を満たすとき，v を B に対する A の**分配**という．より好ましい分配について考察するのが**交換問題**である．

1.1　トップトレーディングサイクルアルゴリズム

減少列 $A = A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_i \supset \cdots$ を考える．$b \in B$ と $a \in A$ に対し，$a = \max_{\succ_b} A_i$ のとき，$b \hookrightarrow^i a$ と表す．特に $i = 1$ のときは $b \hookrightarrow a$ と表す．また，初期の分配を**初期配分**と呼ぶ．初期配分 ω で a に与えられた $\omega_A(a)$ を a に対応させ，$a \hookrightarrow \omega_A(a)$ と表す．これを**指差し**という．指差しを連ねた $a_1 \hookrightarrow \omega_A(a) \hookrightarrow^i a_2 \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow^i a_n \hookrightarrow \omega_A(a_n)$ を**指差し列**と呼び，指差し列が $a_1 \hookrightarrow \omega_A(a_1) \hookrightarrow^i a_2 \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow^i a_n \hookrightarrow \omega_A(a_n) \hookrightarrow^i a_1$ となるとき，**大きさ n のサイクル**と呼ぶ．以下では，大きさ n のサイクル中の添え字はすべて $\mod n$ で考える．初期配分 ω に対し，

step1: $A_1 = A, B_1 = B, i = 1$ とする．

step2: i 回目の指差しで指差し列をつくる．

step3: サイクル $a_1 \hookrightarrow b_1 \hookrightarrow^i a_2 \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow b_n \hookrightarrow^i a_1$ がつくられるとき，分配 v をぞれぞれ $v_B(b_k) = a_{k+1}$，$v_A(a_k) = b_k$ と定め，サイクルを構成するすべての物と人を退場させる．このようにや物や人を割り当てることを**退場する**といい，step2 から step3 までを**再配分**と呼ぶ．

step4: $A_{i+1} = A_i \setminus \{i$ 回目の指差しで退場した物$\}$，$B_{i+1} = B_i \setminus \{i$ 回目の指差しで退場した人$\}$，$i+1$ を i とよみかえ，再配分 step2,3 を繰り返す．

このアルゴリズムを**トップ・トレーディング・サイクルアルゴリズム**（以下，TTCA）という．また，TTCA によって v を導く初期配分の集合を Ω_v と表す．TTCA で導く分配 v は，交換による改善（すべての人にとって今まで以上に好ましい分配に変えること）は不可能であり，このことを**効率的**であるという．

2　くじびきと TTCA

人 $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8, b_9, b_{10}, b_{11}$ の，物 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}$ に対する選好は，それぞれ好ましい順に並べると，

$$
\begin{aligned}
b_1 &: a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6\ a_7\ a_8\ a_9\ a_{10}\ a_{11}\\
b_2 &: a_2\ a_5\ a_9\ a_3\ a_{11}\ a_4\ a_{10}\ a_7\ a_6\ a_8\ a_2\\
b_3 &: a_1\ a_3\ a_9\ a_{10}\ a_{11}\ a_5\ a_4\ a_2\ a_8\ a_6\ a_7\\
b_4 &: a_4\ a_1\ a_7\ a_6\ a_{11}\ a_{10}\ a_5\ a_8\ a_2\ a_3\ a_9\\
b_5 &: a_3\ a_2\ a_5\ a_6\ a_{11}\ a_9\ a_1\ a_8\ a_9\ a_{10}\ a_4\\
b_6 &: a_4\ a_6\ a_{11}\ a_1\ a_9\ a_7\ a_{10}\ a_3\ a_5\ a_2\ a_8\\
b_7 &: a_7\ a_8\ a_9\ a_{10}\ a_{11}\ a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6\\
b_8 &: a_8\ a_{11}\ a_9\ a_7\ a_6\ a_{10}\ a_5\ a_4\ a_3\ a_2\ a_1\\
b_9 &: a_9\ a_{10}\ a_8\ a_7\ a_5\ a_4\ a_3\ a_2\ a_1\ a_{11}\ a_6\\
b_{10} &: a_{10}\ a_7\ a_5\ a_6\ a_{11}\ a_9\ a_1\ a_8\ a_2\ a_3\ a_4\\
b_{11} &: a_{11}\ a_5\ a_4\ a_3\ a_2\ a_1\ a_7\ a_6\ a_{10}\ a_8\ a_9
\end{aligned}
$$

このようになった．**各 b_k が a_k をもらうような初期配分のつくりかたとくじびきの特徴を考えたい！**

2.1　要の人

効率的な分配 v をとる．$b, b' \in B$ に対し，$b' >_v b \Leftrightarrow v_B(b') \succ_b v_B(b)$ と表す．$b >_v b'$ または $b' >_v b$ が成り立つとき，b は b' と**関係がある**といい，b と関係がある人 b' が存在するとき，b を**要の人**と呼び，b と関係があるような b' は存在しないとき，b は**自由な人**と呼ぶ．また，$b_1, \ldots, b_k \in B$ がどの組合せ $i \neq j$ についても $b_i >_v b_j$ でないとき $v-$ **独立**であるという．要の人の集合を B^v，要の人が割り当てられるものの集合を $A^v = v_B(B^v)$ と表す．

要の人は，一番好ましいものをもらえてない人か，もしくは一番好ましいものももらえていない人がほしかったもののもらう人なので，$B^v = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 b_6\}$ となる．※くじびきのとき，**要の人の関係を満たさないと，違うものを導く！**たとえば，b_1 より b_3 が先に物を選ぶと，a_1 は b_3 に取られてしまう．

配分 v に対し，B^v の番号付けの集合 $X_v = \{\sigma : \{1, 2, \ldots, m\} \to B^v :$ 全単射 $\mid \sigma(i) >_v \sigma(j) \Rightarrow i < j\}$ を**要の並び**という．今回，$1 \leq i \leq 6$ に対して $\sigma(i) = b_i$ とすると要の並びになっている．$\sigma \in X_v$ に対し，B^v の分割を $\tau_0 = 0$, $\tau_i = \max\{k > \tau_{i-1} \mid \sigma(\tau_{i-1}+1), \ldots, \sigma(k)$ は $v-$ 独立 $\}$ とおき，$B_i^v(\sigma) = \{\sigma(\tau_{i-1}+1), \ldots, \sigma(\tau_i)\}$ とおくと，$\boldsymbol{B}^v(\sigma) = \{B_i^v(\sigma)\}$ は B^v の分割を与える．

各 $b \in B^v$ に対し，指差し列 $\omega_B(b_k) \hookrightarrow b_k \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \omega_B(b_1) \hookrightarrow b_1 \hookrightarrow \omega_B(b) \hookrightarrow b$ で，$b_1, \ldots, b_k \in B \setminus B^v$ となるものを考える．k を最大にする指差し列は一意的に決ま

り，そのときの指差し列を b の**枝**と呼び，$\omega_B(b_k)$ を b の**枝先**と呼び，$\xi(b) = \omega_B(b_k)$ と表す．枝の先は必ず A^v の要素になっており，xi は $\xi : B^v \to A^v$ の全単射写像である．

各 $i \geq 2$ に対して，$(B_i^v(\sigma))^* = \left\{b \in B_i^v(\sigma) \mid \exists b' \in B_{i-1}^v(\sigma)\ b' >_v b\right\}$ と定め，$(B_i^v(\sigma))^*$ の要素を**柱の人**と呼ぶ．なお $(B_1^v(\sigma))^* = B_1^v(\sigma)$ と考える．

枝先 $\xi : B^v \to A^v$ を次のように定める．

- $b_{i+1} \in B_k^v(\sigma) \setminus (B_k^v(\sigma))^*$ ならば $\xi(b_i) = v_B(b_{i+1})$ と定める．
- ξ は単射

$$\left\{b_i \in B_k^v(\sigma) \mid b_{i+1} \in (B_k^v(\sigma))^*\right\} \cup \{b_{\tau_k}\} \to v_B\left((B_k^v(\sigma))^* \right)$$

を与える．

この定め方を σ による枝先 ξ の**指定**と呼ぶ．

2.2 組立て

はじめに枝先 ξ を任意に選んでおく．次に，$b \in B \backslash B^v$ に割り当てる物を，任意に選んだ単射写像 $\omega_B^\circ : B \backslash B^v \to A$ を用いて定める．その像を $A_\circ = \omega_B^\circ(B \setminus B^v)$ とおけば，$\omega_B^\circ : B \setminus B^v \to A_\circ$ は全単射となるので，$\omega_A^\circ = (\omega_B^\circ)^{-1} : A_\circ \to B \setminus B^v$ と定義する．更に各 $b \in B^v$ に対し，$a_0 = \xi(b)$ とおき，$a_{j-1} \in A_\circ$ となる限り $b_j = \omega_A^\circ(a_{j-1})$，$a_j = \max_{\succ_{b_j}} A$ と帰納的に定義する．やがて，$a_j \in A \setminus A_\circ$ となる j があらわれるので，このとき $\omega_A^\bullet(a_j) = b$ と定めると，b の枝は $\xi(b) = a_0 \hookrightarrow \omega_A^\circ(a_0) = b_1 \hookrightarrow a_1 \hookrightarrow \cdots a_{j-1} \hookrightarrow \omega_A^\circ(a_{j-1}) = b_{j-1} \hookrightarrow a_j \hookrightarrow b$ と構成される．そこで，

$$\omega_A(a) = \begin{cases} \omega_A^\circ(a) & (a \in A_\circ) \\ \omega_A^\bullet(a) & (a \in A \setminus A_\circ) \end{cases}$$

かつ $\omega_B = (\omega_A)^{-1}$ と $\omega = (\omega_A, \omega_B)$ を定めることを，σ による**初期配分の組み立て**と呼ぶ．枝先が $\sigma \in X_v$ で指定された枝先であるとき，組み立てられた ω は v を導く．

2.3 基準の枝先

$\sigma \in X_v, \omega_B^\circ : B \setminus B^v \to A$ を用いて初期配分の組み立てをする．組み立てに用いる枝先を，

- $\sigma(i+1) \in B_k^v(\sigma) \setminus (B_k^v(\sigma))^*$ ならば $\xi_0(\sigma(i)) = v_B(\sigma(i+1))$ と定める．
- $\sigma(i+1) \in (B_k^v(\sigma))^*$ ならば
  $p = \min\left\{p' \geq 0 \mid \sigma(i-p') \in (B_i^v(\sigma))^*\right\}$ に対して
  $\xi_0(\sigma(i)) = v_B(\sigma(i-p))$ と定める．

枝先 ξ_0 を**基準の枝先**と呼び，基準の枝先を集めた集合を $\Xi = \{\xi_0 \mid \sigma \in X_v$の基準の枝先$\}$ と表す．また，同じ基準の枝先を指定できる σ の集合を，$X_v(\sigma) = \{\sigma' \in X_v \mid \Omega_v(\sigma) = \Omega_v(\sigma')\}$ と表す．基準の枝先 ξ_0 を指定できる要の並び σ が指定する任意の枝先 ξ を用いて組み立てる初期配分の集合を $\Omega_v(\xi_0)$ と表す．このとき，基準の枝先は X_v と Ω_v に分割を与える．人の数 $\#B = N$, 要の人の数 $\#B^v = M$ に対して，${}_NP_{N-M} \cdot \#X_v(\xi_0) = \#\Omega_v(\xi_0)$ が成り立つため，v を導く初期配分の場合の数は ${}_NP_{N-M} \cdot \#X_v$ となる．

3 結論

$\#B = N, \#B^v = M$ とする．くじびきで v を導くようなくじの順番の場合の数は，N 個の番号を自由な人に割り振る割り振り方 ${}_NP_{N-M}$ と残りの番号を要の人に割り振る割り振り方，つまり，関係を満たす要の並びの数 $\#X_v$ に等しい．このことから,「互いに他人の選好を知らず，どの物も他人から見た好ましさが確率的に等しい」という条件の下でくじびきと TTCA は確率的に等しいことがわかった．

3.1 確率

人は互いに他人の選好を知らず，したがってどの物も他の人に選ばれる確率は等しいとみなす．物の集合 A と人の集合 B に対し，$\#A = \#B = n$ とする．自分がくじびきでもっとも好ましいものをもらう確率 P を求めたい．

自分を b とし，最もほしいものを a とする．人 b が k 番目の順番に割り当てられる確率は $\dfrac{1}{n}$ である．b に順番がまわってくるとき，すでに $k-1$ 個の物はとられている．どの物も 1 から $k-1$ 番までの人に選ばれている確率が等しいので，a がすでに選ばれている確率は $\dfrac{k-1}{n}$ であり，残っている確率は $1 - \dfrac{k-1}{n}$ である．よって b が k 番目のくじをひき，a をもらう確率は $\dfrac{1}{n}\left(1 - \dfrac{k-1}{n}\right)$ である．したがって，求める確率 P は

$$P = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

となる．

参考文献

[1] 坂井豊貴， マーケットデザイン入門―オークションとマッチングの経済学―, ミネルヴァ書房, 2010.

[2] 田村明久, 離散凸解析とゲーム理論, 朝倉書店, 2009.

[3] 小椋幸美， 結婚できない男　テカリン☆彡―結婚問題の安定解を探索する新しい手法の提案― ， 愛知教育大学数学教育講座卒業論文，2012.

[4] D.Gusfield and R.Irving， The Stable Marriage Problem, The MIT Press, 2003.