| 学籍番号 | | 論文題目 | ドレミファそーする？<br>—音律の数理と音階の構成— |
|---|---|---|---|
| 氏名 | 中村 朋世 | | |

# 1　音楽の基礎知識

音は、空気などの媒質の振動により、耳に伝わる。媒質が 1 秒間に振動する数を**周波数**と呼ぶ。周波数が大きいほど、高い音が鳴っているように聞こえる。また、単一周波数を持つ音を**純音**と呼ぶ。1 つの音を出すと、同時に整数倍の周波数を持った音が鳴る。この音を**倍音**と呼ぶ。ある音の基本周波数を $f_0$ とすると、第 $k$ 倍音 $f_k$ は、

$$f_k = kf_0$$

ある 2 つの純音の周波数 $f_1, f_2$ の間に

$$f_2 = 2^n f_1,\ n \in \mathbf{N}$$

という関係が成り立つとき，この 2 音の関係を**オクターブ**と呼び，$f_2$ は $f_1$ より $n$ オクターブ高いという．

# 2　音律と音階

**音律**…音同士の周波数比を規定するルール．

**音階**…ある音律によってつくられた音を，基音から 1 オクターブ上の音までの周波数間に，周波数の小さい順に並べた音の配列．

## 2.1　ピタゴラス音律

基音の周波数を $P$ とし、音 $P_k$ を

$$P_k = \frac{3^k}{2^m}P \tag{1}$$

で与える．$P \le P_k \le 2P$ となるように,$m \in \mathbf{N}$ をとる．

$$\frac{3^{12}}{2^{18}} = \frac{531441}{262144} = 2.02729\cdots \fallingdotseq 2$$

より，(1) の計算を 12 回で止める．得られた $P_k$ を小さい順に並べる．

以上の手順を**ピタゴラス音律**といい，こうして得られた 12 音を，**ピタゴラス音階**と呼ぶ．

# 3　不協和度・不協和曲線

音楽において，高さの異なる 2 つ以上の合成音がよく調和して響く状態を「協和」と言い，その逆を「不協和」と言う．研究により統計的に数値化した不協和感を**不協和度**と呼ぶ．この値が大きいほど不協和感が大きいことを意味する．

## 3.1　純音の不協和度

**定義 3.1**　2 つの純音 $W_1, W_2$ の周波数とその大きさ（相対値）をそれぞれ $f_1, f_2$ および $v_1, v_2$ とする．また $\phi(f_1, f_2) = 12\log_2(f_2/f_1)$ とおく．この *2* 純音の**不協和度**は

$$d(f_1, f_2, v_1, v_2) = v_{12}\alpha_3\Big(\exp(-\alpha_1|\phi(f_1,f_2)|^{\beta}) - \exp(-\alpha_2|\phi(f_1,f_2)|^{\beta})\Big) \tag{2}$$

で与えられる．ここで，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ は $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta > 0$ かつ $\alpha_1 < \alpha_2$ を満たす定数，$v_{12}$ は $v_1, v_2$ の関数である．

## 3.2　複合音の不協和度

**定義 3.2**　基音をそれぞれ $f_1, f_2$ とする 2 つの複合音 *1,2* について音 $i = 1, 2$ における $k$ 倍音の周波数を $f_{ik}$，音量を $v_{ik}$ と表すとする．この時，$n$ 倍音まで含めた複合音 *1,2* の不協和度 $D(f_1, f_2)$ を

$$D(f_1, f_2) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d(f_{1i}, f_{2j}, v_{1i}, v_{2j}) \tag{3}$$

で定義する．$f_1$ を固定して $D(f_1, f_2)$ を $x = \phi(f_1, f_2)$ の関数として描いた曲線を，**不協和曲線**と呼ぶ．

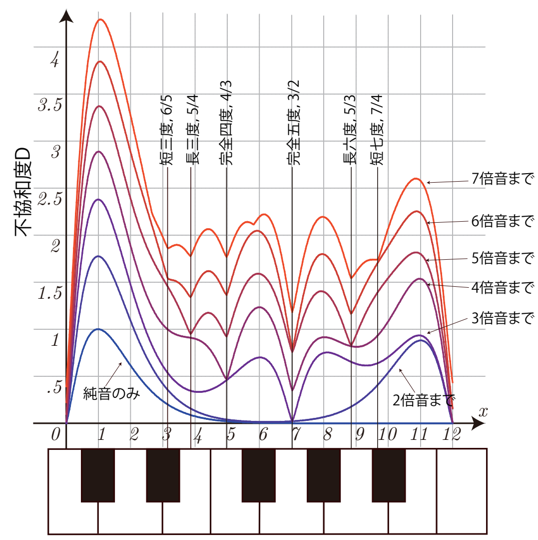


図 1: 2 複合音の不協和度曲線．第 7 倍音まで考慮した．

| 音 | ド | ＃ド | レ | ＃レ | ミ | ファ | ＃ファ | ソ | ＃ソ | ラ | ＃ラ | シ | ド’ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 周波数 | 1 | $\frac{256}{243}$ | $\frac{9}{8}$ | $\frac{32}{27}$ | $\frac{81}{64}$ | $\frac{4}{3}$ | $\frac{1024}{729}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{128}{81}$ | $\frac{27}{16}$ | $\frac{16}{9}$ | $\frac{243}{128}$ | 2 |

表 1: ピタゴラス音律による 12 音音階

### 3.3 不協和曲線の性質

**定義 3.3** 連続関数 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ が $x = a$ を除外した近傍 $(a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$ において微分可能で導関数が連続であり，
$$\lim_{x \to a-0} f'(x) = -\infty, \lim_{x \to a+0} f'(x) = +\infty$$
となるとき $x = a$ を尖点と呼ぶ．

**補題 3.1** 連続関数 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ が $x = a$ で尖点をもつなら，$f$ は $x = a$ で極小値をとる．

**命題 3.1** 連続関数 $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ は $x = 0$ で尖点を持ち，$x \neq 0$ で微分可能とする．このとき正の定数 $v_{ij}$ を用いて
$$G(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} v_{ij} g(x - \phi(i,j)) \tag{4}$$
で定義される関数 $G$ の尖点の集合は $\{\phi(i,j) \mid 1 \leq i,j \leq n\}$ である．

**補題 3.2** $0 < \beta < 1$ のとき，$d(x)$ は $x = 0$ のみで尖点を持つ．

**定理 3.2** $0 < \beta < 1$ のとき，複合音の不協和度 $D(x)$ は $\{\phi(i,j) \mid 1 \leq i,j \leq n\}$ の各点でのみ極小値をとる．

## 4 連分数

ピタゴラス音律による音階 (1) を底を 2 にした対数で考えれば
$$0 = \log_2 1 \leq \log_2 \frac{3^n}{2^m} = n \log_2 3 - m \leq \log_2 2 = 1$$
と同値なので，結局 $n \log_2 3$ の小数部分 $n \log_2 3$ を求めることに等しい．以下 $\gamma = \log_2 3$ と表して議論する．図 2 は点列 $\{n\gamma\}$ を音階を構成する音数に合わせて打点していったものである．

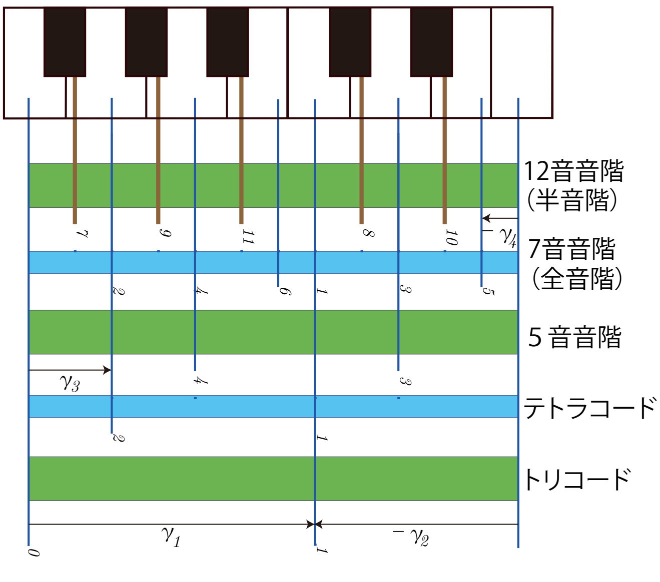


図 2: $n\gamma$ と音階．数値が $n$ を表す．基音を $F$ とした．

**定義 4.1 (一般全音階，一般半音階)** 無理数 $\gamma > 1$ に対し，帰納的に以下の集合列を構成する．

1.) $C_{-1} = \emptyset$，$D_0 = C_0 = \{0\}$，$\gamma_0 = 1$，$\gamma_1 = \langle\gamma\rangle$ とおく．

2.) $k \geq 0$ に対し，$n_{k+1} = [\gamma_k / \gamma_{k+1}]$，
$\gamma_{k+2} = \gamma_k - n_{k+1}\gamma_{k+1}$ とおき，
$$D_{k+1} = C_k \coprod (C_{k-1} + (-1)^k \gamma_{k+1}), \tag{5}$$
$$C_{k+1} = C_{k-1} \coprod \left( \coprod_{n=0}^{n_{k+1}-1} (D_{k+1} \setminus C_{k-1} + (-1)^k n \gamma_{k+1}) \right) \tag{6}$$
と定義する．

$D_k$ を $k$ 次の**一般全音階**，$C_k$ を $k$ 次の**一般半音階**と呼ぶ．また，これらの音階を $\gamma$ で**生成された音階**と呼ぶ．

**定義 4.2** 一般に正の実数 $0 < \gamma < 1$ に対し，$\gamma_0 = 1, \gamma_1 = \gamma$ として，$k \geq 1$ に対し帰納的に
$$n_k = [\gamma_{k-1}/\gamma_k], \qquad \gamma_{k+1} = \gamma_{k-1} - n_k \gamma_k$$
で定義される数列 $\{n_k\}$ を $\gamma$ の**連分数展開**と呼び，$\gamma = [n_1, n_2, \ldots]$ と表す．またこの展開を $[n_1, n_2, \ldots, n_k]$ で止めてできる分数を $\gamma$ の第 $k$ 近似と呼ぶ．

**命題 4.1** 定義 *4.1* における数列 $\{n_k\}$ は $\langle\gamma\rangle$ の連分数展開を与える．また $\#C_k$ は $\langle\gamma\rangle$ の第 $k$ 近似分数の分母である．

| 一般音階 | 音名 | 音階名 |
|---|---|---|
| $D_1$ | $\{F\}$ | オクターブ |
| $C_1$ | $\{F\}$ | オクターブ |
| $D_2$ | $\{F, C\}$ | トリコード |
| $C_2$ | $\{F, C\}$ | トリコード |
| $D_3$ | $\{F, G, C\}$ | テトラコード |
| $C_3$ | $\{F, G, A, C, D\}$ | 5 音音階 |
| $D_3$ | $\{F, G, A, B, C, D, E\}$ | 7 音音階（全音階） |
| $C_3$ | $\{F, F\#, G, G\#, A, A\#, B, C, C\#, D, D\#, E\}$ | 12 音音階（半音階） |

表 2: 一般音階と実際の音階の対応．

## 参考文献


[1] 藤澤 隆史, N. Cook, 和音性の計算法と曲線の描き方-不協和度・緊張度・モダリティ-, 関西大学総合情報部紀要「情報研究」第 25 号, pp36-51, 2006.

[2] Y. Hashimoto, *A renormalization approach to level statistics on 1-dimensional rotations,* Bull. of Aichi Univ. of Education, Natural Science **58**, pp 5-11, 2009.

[3] 国安 愛子, 事典形式 音楽理論, 音楽之友社, 1977.

[4] 森田 紀一, 数の体系, 岩崎書店, 1964.

[5] 小方 厚, 音律と音階の科学ードレミ…はどのようにして生まれたか, ブルーバックス, 講談社, 2007.

[6] 大塚 正元, 楽譜の数学, 早稲田出版, 2003.

[7] R. Plomp and W. J. M. Levelt, *Tonal Consonance and Critical Bandwidth*, J. Acoust. Soc. Am. **38** Issue 4, pp. 548-560, 1965.

[8] 高橋 裕, 不協和度解析に基づいた作曲の試み, 情報科学芸術大学院大学メディア表現研究科 メディア表現専攻 修士論文, 2010.