

数学的モデリング能力の育成に関する研究

<修士論文要旨>

愛知教育大学大学院 教育学研究科

数学教育専攻 数学科教育学領域

泉 真衣

論文構成

序章 テーマ設定の動機と本研究の目的と方法	2. 1 モデル構成原理
第1節 テーマ設定の動機	2. 2 現実性原理
第2節 本研究の目的と方法	2. 3 自己評価原理
第1章 問題解決学習の歴史	2. 4 文書構成原理
第2章 数学的モデリングについて	2. 5 共有性・再利用性の構成原理
第1節 数学的モデリングとは	2. 6 効果的なプロトタイプ原理
第2節 数学的モデリングを扱う意義	第3節 モデル導出活動の例
第3節 数学的モデリングに関する先行研究	3. 1 The Volleyball Problem
3. 1 伝統的な視座と「数学を実践的にする」	3. 2 The Sears Catalogue Problem
3. 2 Models&Modeling Perspectiveと「実践を数学的にする」	第4章 数学的モデリング能力を育成するための授業作り
第4節 数学的モデリングに関する先行研究のまとめ	第1節 課題学習について
第3章 モデル導出活動について	第2節 数学的モデリング能力を育成するために適した教材
第1節 モデル導出活動とは	2. 1 温暖化問題
第2節 モデル導出活動をデザインするための6つの原理	2. 2 子どもの体力低下問題
	2. 3 北海道旅行問題
	第3節 温暖化問題の授業構成
	終章 まとめと今後の課題
	第1節 まとめ

1. 研究の目的と方法

日本や諸外国では問題解決研究に関する研究が盛んに行われており、近年は数学的モデリングについての研究が多く行われている。そのような中で、アメリカでは10年ほど前からLesh

らによってModels & Modeling Perspectiveにおけるモデル導出活動に関する研究が盛んに行われている。しかし、日本ではModels & Modeling Perspectiveに基づくモデル導出活動に関する研究がほとんどなされていない。

そこで、Models & Modeling Perspective と、この視座において実生活をシミュレーションする際に重要だと言われているモデル導出活動について明らかにし、その指導方法を考察する。研究の方法は、Lesh らが行ってきた研究に関する文献を考察する。また、Models and Modeling Perspective におけるモデル導出活動を取り入れるための授業や教材とはどのようなものなのかを明らかにしつつ、そうした問題を用いた指導案を作成し、具体的な指導法を提案する。

2. 問題解決研究の歴史

1980年に全米数学教師協会(NCTM)からアジェンダが発行され、問題解決が1980年代のテーマとなった。Leshら(2007)が示した数学的問題解決の先行研究の外観を参考に、問題解決研究の歴史を振り返る。

2.1. 問題解決ストラテジー

問題解決ストラテジーに当たるものを最初に体系的に示したのはポリア(1954)である。ポリアが示したストラテジーはポリアの発見法と呼ばれている。

それに対して、ポリアの発見法の「計画を立てる」という段階において有効だと考えられている方法をストラテジーとして考える立場もある。このストラテジーには、「絵や図をかき(Drawing a picture or diagram)」「簡単な場合から考える(Solving a simpler problem)」などがある(Lenchner, 1983)。

2.2. メタ認知

重松(1995)は、メタ認知を「図をかき、計算をするといった場面で働く認知に対する認知、知識に関する知識などを意味するもの」(p. 238)と定義し、メタ認知をメタ知識とメタ技

能に分けている。

2.3. これからの問題解決研究

Leshら(2007)は、「より有望な最近のテーマの多く(状況的認知、実践のコミュニティ、表象的な流暢さに関連するようなもの)は、我々とその同僚が数学的学習及び問題解決に関するmodels and modeling perspectiveと呼んでいるものに収束していくように思われる」(p. 793)と述べ、models and modeling perspectiveを取り入れることを主張した。

3. 数学的モデリングについて

3.1. 数学的モデリングとは

池田・山崎(1993)は、数学的モデリングを「実際の問題の解決を目標に、実際の問題を数理化して数学的に解決し、解釈・検討して不都合が生じればモデルの修正を適宜繰り返し、より適した実際の問題の解決を見出していく全活動を意味するもの」(p.27)と定義し、下の図を用いて示している。

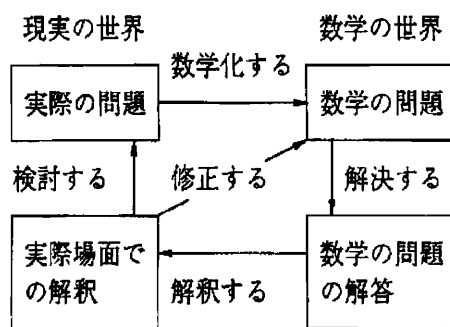


図1 池田・山崎(1993)の数学的モデリング (p.27)

問題解決では、「数理化→解決→解釈→検討・修正」というサイクルを繰り返し経過しながら問題解決が図られることが大切だと考えられる。

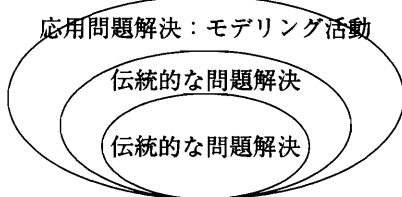
3.3. 数学的モデリングに関する2つの視座

Leshら(2007)は問題解決と数学的モデリングに関する2つの視座を示した。これらの視座は、「伝統的な視座」と「Models & Modeling Perspective」と呼ばれており、それぞれの視座に基づき「数学を実践的にする」と「実践を数学的にする」が存在する。

(1) 伝統的な視座と数学を実践的にする

Leshら(2007)は、伝統的な視座を次のように示している。

伝統的な視座では、応用問題の解決は伝統的な問題解決の部分集合として扱われる。



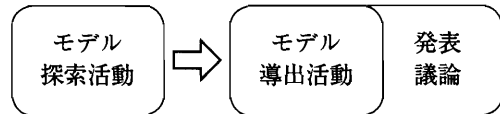
「実生活」問題の解決を学習することは、以下の4つのステップを含むと仮定される。

1. 最初に、脱文脈化された状況において、前もって必要なアイデアやスキルを習得する。
2. 学んだ手続きの使用を要求するようデザインされた文章問題で、新しく習得されたアイデアやスキルを練習する。
3. 一般的に内容から独立した問題解決プロセスと発見法を学習する。
4. 最後 cm (もし時間が許すなら)、補足情報を要求するような厄介な「実生活」状況 I (すなわち、応用問題)において、先立つアイデア・スキル・発見法を使うことを学ぶ。

次に、この伝統的な視座に基づいた「数学を実践的にする」について示す。

これは、最初に教師が生徒に学習する内容に関連する知識を教え、生徒は教えられたことを「実生活」の問題に適応し、問題を解決するというものである。

Leshら(2007)は、「数学を実践的にする」を次のような図で表している。

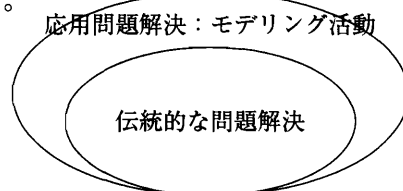


(p.317)

(2) Models & Modeling Perspective と実践を数学的にする

Leshら(2007)は、Models&Modeling Perspectiveを次のように示している。

Models & modeling Perspective では、伝統的な問題解決は、応用問題解決(すなわち、モデル導出活動)の部分集合として扱われる。



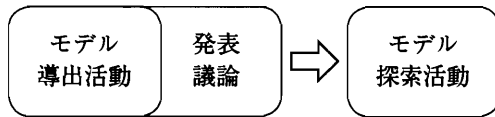
応用問題を解決することは、ふさわしい解決の開発と提携して(言い換え・図を描くなどによって)、問題の数学的センスを作ることを含む。理解は、all-or-nothingの状況とはみなされない。そして数学的アイデアと問題解決能力は問題解決プロセスの間で共に発達する。

「実生活」問題(応用問題)を解決するために必要とされる構成・プロセス・能力は、問題解決に取り組む前に「習得する」というよりも、発達の間段階でなされることが仮定される。

次に、Models & Modeling Perspective に基づいた「実践を数学的にする」について示す。

これは、最初に生徒が「実生活」の問題に対して、自分自身の考えを表現・テスト・修正する活動から始まる。教師はその結果を整理し生徒の能力を高める手助けをする。

Lesh ら (2007) は、「実践を数学的にする」を下のような図で表している。



(p.317)

3. 4. 数学的モデリングに関する先行研究のまとめ

現在の日本の数学の授業の多くは「数学を実践的にする」で構成されており、「実践を数学的にする」を取り入れた授業はほとんどみられない。この理由として、「実践を数学的にする」のように、知識を教えそれを適用する問題を解決させる方が、生徒に知識が定着しやすいことが挙げられる。しかし、ここで与えられる問題は、生徒にとって身近な状況とは言えず、生徒は問題を解決する必要性を感じにくく、生徒の学習活動が知識を適用し解答を求めるだけになってしまう恐れもある。

以上より、このようにどちらか一方だけで授業を行うのではなく、「実践を数学的にする」ことを取り入れていく必要があると考えられる。

4. モデル導出活動について

4. 1. モデル導出活動とは

Lesh ら (2007) は Models & Modeling Perspective におけるモデル導出活動を「強力で共有でき、再利用できる概念的モデルを導出するためにデザインされた活動」と定義している。

4. 2. モデル導出活動をデザインするための6つの原理

(1) モデル構成原理

モデル構成原理は、生徒が創ったモデルの構成が明らかに示されているものである必要性を示している。

(2) 現実性原理

現実性原理は、有意性原理と呼ぶこともできる。その理由は、課題の結論を出すためには、それぞれの生徒の知識や経験に基づいて状況を意味づけすることが大切だからである。

(3) 自己評価原理

生成したモデルを、解釈・検討・修正し、よりよいモデルを生成するためには、生成したモデルに対して自己評価をし、何が足りないのか、どのようにすればよいのかを考え、モデルを修正していく必要がある。

(4) 文書構成原理

生徒が自分自身の考えを文書化することで、自分の考えを整理し自己評価するために重要な原理であると考えられる。

(5) 構成概念の共有性・再利用可能性原理

この原理は、生徒が創り出した構成概念は、他者と共有できることと他の問題でも再利用可能であることが重要だということを示している。

(6) 効果的なプロトタイプ原理

モデル導出活動によって創り出されたモデルは、生徒がこの先に問題解決に取り組むときに役立つよう、考え方の原型にならなければならない。

4. 3. モデル導出活動の例

(1) The Volleyball Problem

この問題は、バレーボールキャンプの主催者に18人の選手の公平なチーム分けの方法を示

す問題である。

問題では次のようなそれぞれの選手のデータとコーチのコメントが書かれた表が与えられる。

名前	選手の身長	垂直とびの高さ	40m走の秒数	サーブの成功数(10本中)
Gena	6'1"	20	6.21	8
Beth	5'2"	25	5.98	7
Jill	5'10"	24	6.44	8
...

Leshら(2007)は、この問題に対して「多くのモデル導出活動はすでに事前に量化され与えられているデータや情報の表を伴わない。だからバレーボール問題は通常ではない」と評価している。しかし、実際には、私たちの生活の中には、表が与えられており、表の数値を読み取りそれらの関係を見つけ出す場面が多くある。そのため、The Volleyball Problemのように表から数値を読み取り解決する問題は、現実世界でも有用であると考えられる。

5. 数学的モデリング能力を育成するために適した教材

5.2. 数学的モデリング能力を育成するために適した教材

モデル導出活動をデザインするための6つの原理の中で、教材を設定するとき重要な原理は現実性原理である。モデル導出活動を行うためには、現実には起こっている問題を扱う必要がある。その問題の中には、「なぜその問題を解決する必要があるのか」や「誰が解答を必要としているのか」について書かれている必要がある。

5.3. 温暖化問題の指導

この問題を解決している段階で、生徒が解決するプロセスを評価することができるよう、生

徒の考えをワークシートに書かせる。解決している途中で考えが変わったときには、書いたものは消さないで残しておくよう指示をする。このようにすることで、後にワークシートを見たときに生徒の解決プロセスを追うことができるようにする。解決後、解決方法についての発表会を行うことで、他のグループの解決にも目を向けさせ新たな概念を取り入れることができるようにする。

6. まとめと今後の課題

本研究では、問題解決の中でも数学的モデリングに焦点を当て、数学的モデリング能力の育成について研究を進めてきた。

日本の数学教育は伝統的視座に基づいた「数学を実践的にする」に偏っていることが明らかになった。そのため、わが国ではほとんど行われていない models and modeling perspective に基づいた「実践を数学的にする」を取り入れる必要性がある。Leshらの先行研究より models and modeling perspective に基づいた「実践を数学的にする」を取り入れる際に重要だと考えられるモデル導出活動が重要であることが明らかになった。

そのため、本研究ではモデル導出活動をデザインするための授業設計を行った。

今後の課題として、第4章で作成した指導案に基づく授業実践をすることが挙げられる。実際に授業を行う際には、生徒の興味・関心なども考慮しながら「現実の問題」に関する教材の推敲を重ねる必要がある。

引用・参考文献

Lenchner,G.(1983). *Creative problem solving in school*. Boston: Houghton Mifflin. p.10

- Lesh,R.,Hoover,M.Hole,B.,Kelly,A.,&Post,T.,
(2000)"Principles for developing thought-revealing activities for students and teachers",In A.E.Kelly&R.A.Lesh(eds.)
Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education
(pp.591-646).Mahwah,NJ:Lawrence Erlbaum Associates.
- R.Lesh,C.Yoon,J.Zawojewski.(2007).John Dewey revisited-making mathematics practical versus Making Practice Mathematical. R.A.Lesh,E.Hamilton,&J. J.Kaput(Eds.)*Foundations for the future in mathematics education*.In(pp.315-348)Lawrence Erlbaum Associates.
- Lesh, R. & Zawojewski, J. S. (2007). Problem solving and modeling. In F. Lester (Ed.),*The Handbook of research on mathematics teaching and learning* (2nd ed.) (pp.763-804). Joint Publication Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics; Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- G. ポリア著柿内賢信訳 (1954). 『いかにして問題をとくか』. 丸善株式会社.
- 池田敏和・山崎浩二 (1993), 「数学的モデリングの導入段階における目標とその授業展開のあり方に関する事例的研究」, 日本数学教育学会, 『日本数学教育学会誌数学教育』, 第 75 卷, 第 1 号, pp26-32.