学籍番号		論文題目	いつとるの？今でしょ！ —最適停止ゲームとしてのカードゲーム—
氏名	高山 孔太		

1　ゲームの解とナッシュ均衡点

本論では，ゲーム理論のうちプレイヤーが互いに自己の利益だけを追求する意思決定の理論，すなわち非協力型のゲームを取り扱い，その中でどのように行動すれば自己の利益を最大化することができるのかについて考える．

定義 1.1　**プレイヤー**の集合 $[n]=\{1,2,\ldots,n\}$ とそれに属する各プレイヤー $i\in[n]$ が持つ**戦略**の集合 S_i を考える．全プレイヤーの戦略の組 $\boldsymbol{s}=(s_1,\cdots,s_n)\in S_1\times\cdots\times S_n$ に対し，各プレイヤー i ごとに**利得** $f_i(\boldsymbol{s})\in\mathbf{R}$ が与えられている，即ち各 $i\in[n]$ に対し，**利得関数** $f_i:S_1\times\cdots\times S_n\to\mathbf{R}$ が与えられているとき，組 $\bigl([n],\{S_i\}_{i\in[n]},\{f_i\}_{i\in[n]}\bigr)$ を**戦略型非協力ゲーム**と呼ぶ．また，複数個のプレイヤー i の戦略 $s_{i1},\ldots,s_{ik}\in S_i$ を考える．これらを形式的に線形結合した $t_i=\alpha_1 s_{i1}+\alpha_2 s_{i2}+\cdots+\alpha_k s_{ik}$，ただし $\alpha_1+\cdots+\alpha_k=1$ を**混合戦略**と呼び，混合戦略の集合を $\overline{S}_i$ と表す．それに対し，$s_i\in S_i$ を**純戦略**と呼ぶ．このとき混合戦略 t_i を要素に持つ戦略の組 $\boldsymbol{s}$ の各プレイヤー $j\in[n]$ の利得は，$f_j(\boldsymbol{s})=\sum_{p=1}^{k}\alpha_p f_j(\boldsymbol{s}/s_{ip})$ と定めることとする．ただし，$\boldsymbol{s}/s_i$ は戦略の組 $\boldsymbol{s}$ でプレイヤー i だけが戦略を s_i に変更してできる戦略の組を表す．

定義 1.2　プレイヤー $i\in[n]$ の戦略 $t_i\in\overline{S}_i$ が $f_i(t_i,\boldsymbol{t}_{-i})=\max_{u_i\in\overline{S}_i}f_i(u_i,\boldsymbol{t}_{-i})$ を満たすとき，t_i を戦略 $\boldsymbol{t}_{-i}$ に対する**最適応答**という．ただし，$\boldsymbol{t}_{-i}$ は $\boldsymbol{t}$ から第 i 成分を除いたものである．戦略型 n 人ゲームにおいて，戦略の組 $\boldsymbol{t}\in\overline{S}_1\times\cdots\times\overline{S}_n$ について全てのプレイヤー i の戦略 t_i が戦略 $\boldsymbol{t}_{-i}$ に対する最適応答となっているならば $\boldsymbol{t}$ は**ナッシュ均衡点**であるという．

2　最適停止ゲーム

ランダムに数値の書かれた n 枚のカードがある．この山札から一枚ずつカードがめくられ二人のプレイヤーに書かれた数字が分かるように机上におかれる．両プレイヤーはその数値を見て取るか取らないかの選択ができ，一枚取った時点でそのカードの数値が取ったプレイヤーの得点となり，ゲームから抜ける．机上のカードを見送る（R）ことも受け取る（A）こともできるが，二人が共に受け取りたいと思った場合は，確率 $\frac{1}{2}$ で受け取り手を決める．両プレイヤーとも n 枚目までにカードを取り手元にある得点を競い合う．このようなカードゲーム $\mathcal{G}$ の最適な戦略について考える．なお，以下では $a,b\in\mathbf{R}$ に対して，$a\vee b=\max(a,b)$, $\overline{a}=1-a$ と表し，実数要素の 2×2 行列 A に対して $valA=\max\min(\overline{\varphi},\varphi)A(\overline{\psi},\psi)^T$ と表す．また 2×2 行列 A に対して $(M_1(\varphi,\psi),M_2(\varphi,\psi))=(\overline{\varphi},\varphi)A(\overline{\psi},\psi)^T$ とおくとき，A のナッシュ均衡点を $M_1(\varphi,\psi')\le M_1(\varphi',\psi')$ と $M_2(\varphi',\psi)\le M_2(\varphi',\psi')$ を同時に満たす (φ',ψ') とし，$(M_1(\varphi',\psi'),M_2(\varphi',\psi'))$ を $eq.valA$ で表す．

まだ二人ともゲームに残っていて，最初の観察値 $X_1=x$ を見ておりこれの後にまだ $n-1$ 個の確率変数列が残っているという状態を $state(x\mid n)$ で表す．プレイヤー I の戦略は $state(x\mid n)$ のときに確率 $\varphi(x,n)$ で R を，確率 $\overline{\varphi}(x,n)$ で A をランダムに選択し，同様にプレイヤー II の戦略は確率 $\psi(x,n)$ で R を，$\overline{\psi}(x,n)$ で A を選択する．二人が最適にふるまったときのそれぞれの期待値 V_n^I，V_n^{II} は

$$(V_n^I,V_n^{II})=\int_0^1 eq.valM_n(x)dx,\qquad M_n(x)=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} R & A \end{array}\\ \begin{array}{c} R\\ A \end{array} & \begin{pmatrix} V_{n-1}^I,V_{n-1}^{II} & U_{n-1},x\\ x,U_{n-1} & \frac{1}{2}(x+U_{n-1}),\frac{1}{2}(x+U_{n-1}) \end{pmatrix}\end{array}$$

で与えられる．ただし帰納的に定まる利得行列 M_n にある U_{n-1} は，どちらかのプレイヤーが抜けて一人ゲームになった後の残っているプレイヤーのゲームの値であって，漸化式 $U_n=\displaystyle\int_0^1(x\vee U_{n-1})dx=\frac{1}{2}(1+U_{n-1}^2),U_0=0$ により定まる．

定理 2.1　ゲーム $\mathcal{G}$ の $state(x\mid n)$ における各プレイヤーの均衡戦略は以下である．(1) $0\le x<V_{n-1}$ ならば R を選べ．(2) $V_{n-1}<x<U_{n-1}$ ならば R と A をそれぞれ確率 $\dfrac{1-z_{n-1}}{1+z_{n-1}}$，$\dfrac{2z_{n-1}}{1+z_{n-1}}$ でランダムに選べ．ただし，$z_{n-1}=\dfrac{x-V_{n-1}}{U_{n-1}-V_{n-1}}$ である．(3) $U_{n-1}<x\le1$ ならば A を選べ．ただし数列 $\{V_n\}$ は $U_0=V_0=0$，$V_n=\dfrac{1}{4}(1+U_{n-1})^2-(U_{n-1}-V_{n-1})(\lambda U_{n-1}+\overline{\lambda}V_{n-1})$，また $\lambda=2\log2-1$ である．ゲーム $\mathcal{G}$ の均衡値は (V_n,V_n) である．

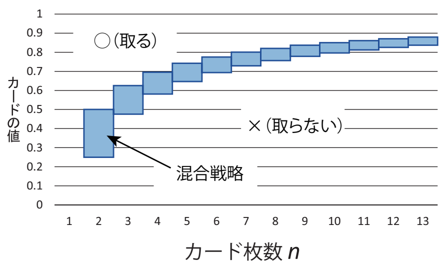

図 1　$state(x\mid n)$，$n=1,\ldots,13$ における共通均衡戦略

3 ハンデありの場合の最適停止ゲーム

2 節のゲーム $\mathcal{G}$ を変更し，相手が始めに手札をもっている，すなわちプレイヤー II が $\alpha(0 \le \alpha \le 1)$ の利得をあらかじめ持っているものとしたゲーム $\mathcal{G}'$ を考える．このゲームは各プレイヤーにとって対称ではなくなり，新たに利得行列が

$$M_n(x) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} R & A \end{array} \\ \begin{array}{c} R \\ A \end{array} & \begin{pmatrix} V_{n-1}^{I}, V_{n-1}^{II} & U_{n-1}^{I}, x \\ x, U_{n-1}^{II} & \frac{1}{2}(x + U_{n-1}^{I}), \frac{1}{2}(x + U_{n-1}^{II}) \end{pmatrix} \end{array}$$

で与えられ，一人ゲームとなったときの期待利得 U_n^I，U_n^{II} はそれぞれ $U_n^I = \int_0^1 (x \vee U_{n-1}^I)dx = \frac{1}{2}\left(1 + (U_{n-1}^I)^2\right), U_0^I = 0, U_n^{II} = \int_0^1 (x \vee U_{n-1}^{II})dx = \frac{1}{2}\left(1 + (U_{n-1}^{II})^2\right), U_0^{II} = \alpha$ で与えられる．このゲーム $\mathcal{G}'$ における各プレイヤーの戦略の組を $R - R$ のように表すとする．

定理 3.1 $state(x \mid n)$ における各プレイヤーの均衡戦略は以下で与えられる．
(1) $V_{n-1}^{II} < U_{n-1}^{I}$ のとき，(i) $0 \le x < V_{n-1}^{I}$ ならば $R - R$ を選べ．(ii) $V_{n-1}^{I} < x < V_{n-1}^{II}$ ならば $A - R$ を選べ．(iii) $V_{n-1}^{II} < x < U_{n-1}^{I}$ ならば R か A をプレイヤー I はそれぞれ確率 q，$\overline{q}$ で，プレイヤー II はそれぞれ確率 p，$\overline{p}$ でランダムに選べ．ただし，$p = \dfrac{U_{n-1}^{II} - x}{U_{n-1}^{II} + x - 2V_{n-1}^{II}}, q = \dfrac{U_{n-1}^{I} - x}{U_{n-1}^{I} + x - 2V_{n-1}^{I}}$ である．(iv) $U_{n-1}^{I} < U_{n-1}^{II}$ ならば $A - R$ を選べ．(v) $U_{n-1}^{II} < x \le 1$ ならば $A - A$ を選べ．
(2) $U_{n-1}^{I} < V_{n-1}^{II}$ のとき，(i) $0 \le x < V_{n-1}^{I}$ ならば $R - R$ を選べ．(ii) $V_{n-1}^{I} < x < U_{n-1}^{II}$ ならば $A - R$ を選べ．(iii) $U_{n-1}^{II} < x \le 1$ ならば $A - A$ を選べ．ただし数列 $\{V_n^I\}$，$\{V_n^{II}\}$ は $V_{n-1}^{II} < U_{n-1}^{I}$ ならば

$$\begin{aligned} V_n^I =& \frac{1}{4}\left(2(V_{n-1}^I)^2 + (V_{n-1}^{II})^2 + (U_{n-1}^I)^2 + (U_{n-1}^{II})^2 - 2V_{n-1}^{II}U_{n-1}^{I} - 2U_{n-1}^{I}U_{n-1}^{II} + 2U_{n-1}^{I} + 1\right) \\ & - (U_{n-1}^I - V_{n-1}^I)^2 \left(2\log 2 - \frac{5}{4} - 2\log(1+\beta) + \frac{3}{2}\beta - \frac{1}{4}\beta^2\right) \\ V_n^{II} =& \frac{1}{4}\left(-(V_{n-1}^{II})^2 + (U_{n-1}^I)^2 + (U_{n-1}^{II})^2 + 4V_{n-1}^{I}V_{n-1}^{II} - 4V_{n-1}^{I}U_{n-1}^{II} + 2V_{n-1}^{II}U_{n-1}^{II}\right. \\ & \left.-2U_{n-1}^{I}U_{n-1}^{II} + 2U_{n-1}^{II} + 1\right) - (U_{n-1}^{II} - V_{n-1}^{II})^2 \left(2\log(1+\gamma) - \frac{3}{2}\gamma + \frac{1}{4}\gamma^2\right), \end{aligned}$$

ただし $\beta = \dfrac{V_{n-1}^{II} - V_{n-1}^{I}}{U_{n-1}^{I} - V_{n-1}^{I}}$，$\gamma = \dfrac{U_{n-1}^{I} - V_{n-1}^{II}}{U_{n-1}^{II} - V_{n-1}^{II}}$ であり，$V_{n-1}^{II} > U_{n-1}^{I}$ ならば
$V_n^I = \frac{1}{4}\left(2(V_{n-1}^I)^2 + (U_{n-1}^{II})^2 + 2U_{n-1}^{I} - 2U_{n-1}^{I}U_{n-1}^{II} + 1\right), V_n^{II} = \frac{1}{4}\left((U_{n-1}^{II})^2 + 4V_{n-1}^{I}V_{n-1}^{II} - 4V_{n-1}^{I}U_{n-1}^{II} + 2U_{n-1}^{II} + 1\right)$ で与えられる．このゲームの均衡値は (V_n^I, V_n^{II}) である．

定理 3.1 からわかることは，始めの条件に差があるときのゲームの期待利得は n において一定とはならず，α の値によって漸化的に求まる V_{n-1}^{II} と U_{n-1}^{I} の関係によって取るべき戦略が変わり，それにより V_n^I と V_n^{II} の値が変わるということである．また，実際に $[0,1]$ の範囲で α の値を変えてグラフを作った結果，一度 $V_{n-1}^{II} < U_{n-1}^{I}$ となるとその後の大小関係は変わらないことが分かった．

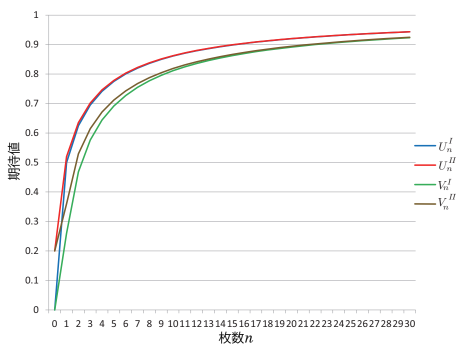

表 1 ゲーム $\mathcal{G}'$，$state(x \mid n)$，$n = 1, \ldots, 30$，$\alpha = 0.2$ における均衡戦略

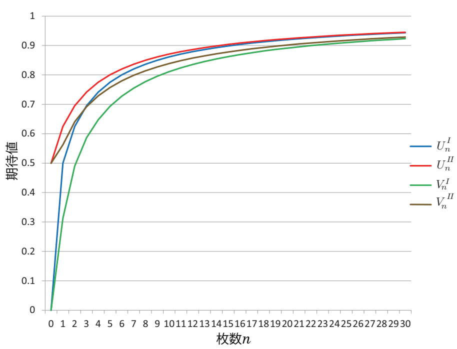

表 2 ゲーム $\mathcal{G}'$，$state(x \mid n)$，$n = 1, \ldots, 30$，$\alpha = 0.5$ における均衡戦略

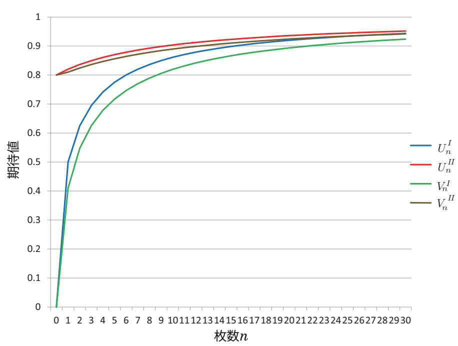

表 3 ゲーム $\mathcal{G}'$，$state(x \mid n)$，$n = 1, \ldots, 30$，$\alpha = 0.8$ における均衡戦略

参考文献

[1] 坂口実, 最適停止ゲーム, 応用数理 12(3),pp281-293, 2002.
[2] 岡田章, ゲーム理論・入門, 2008.