学籍番号		論文題目	超幾何関数の大域解析 -局所挙動から大域挙動を知る-
氏　名	安達 駿弥		

1　はじめに

本論文は, [2] を主として勉強したことをまとめたものである.

微分方程式は自然法則を, そしてその解は自然現象を記述する. よって, 微分方程式の解がどう振る舞うかについての情報は, 自然現象を数学の言葉で理解するための重要な手がかりである.

微分方程式が**特異点**を持つ場合, その方程式の解の情報は特異点に凝縮されている. 従って, 特異点を持つ微分方程式の解の振る舞いを調べるときには, その方程式の特異点の周辺を調べることが有効である (局所理論). しかし方程式の特異点がいつも 1 つであるとは限らない. 方程式が複数の特異点を持つ場合, 異なる特異点の周りで与えられた解の間には線形関係が成り立つ. この線形関係を求める問題のことを微分方程式の解の**接続問題**という. 接続問題は大域理論とも呼ばれる. 本論文の目的は以下の通りである.

超幾何微分方程式の解の接続問題を解く

2　超幾何微分方程式とその解

定義 1. 次の 2 階線形常微分方程式を**超幾何微分方程式**という.

$$x(1-x)y'' + \{\gamma - (\alpha+\beta+1)x\}y' - \alpha\beta y = 0 \tag{2.1}$$

ただし $x \in \mathbb{C}$ は独立変数, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ はパラメータである.

以下, パラメータ α, β, γ は全て整数でなく, また互いに整数差はないとする. このとき次が成り立つ.

定理 1. 超幾何微分方程式 (2.1) は次の冪級数 $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ を解の一つに持つ:

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha, n)(\beta, n)}{(\gamma, n)(1, n)} x^n. \tag{2.2}$$

ただし記号 (α, n) はポッホハマー記号で

$$(\alpha, n) = \begin{cases} \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1) & (n \geq 1) \\ 1 & (n = 0) \end{cases} \tag{2.3}$$

と定義される. 級数 (2.2) を**超幾何級数**という. 超幾何級数は $|x| < 1$ において収束する.

正規形の線形常微分方程式の解は, 係数関数が正則なところまで解析接続される. 従って超幾何微分方程式の任意の解は少なくとも $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ にまで解析接続される. よって解の一つである超幾何級数も $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ まで解析接続可能であるが, 超幾何級数は $x = 0$ で値が定義されていることから超幾何級数は結局 $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ まで解析接続される. 超幾何級数を $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ まで解析接続して得られる関数を**超幾何関数**という. 超幾何級数の解析接続は次で与えられる.

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-xt)^{-\beta}\, dt, \tag{2.4}$$

これを**超幾何関数の Euler 型積分表示**という.

3　超幾何微分方程式の解の接続問題

超幾何微分方程式 (2.1) は Riemann 球面 $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上の 3 点 $\{0, 1, \infty\}$ に確定特異点を持つ方程式であるので, 各特異点の近傍で収束する解空間の基底 (**基本解**と呼ばれる) を構成することができる. 超幾何微分方程式は 2 階線形の方

程式なので, 解空間は 2 次元のベクトル空間をなす．したがって, 各特異点近傍における基本解は 2 つずつ存在する．それぞれの基本解を [確定特異点, 収束域], 基本解の順で書くと次のようになる．

$$[x=0,\, B_0] : \begin{cases} y_1(x) = F(\alpha, \beta, \gamma; x) \\ y_2(x) = x^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma; x), \end{cases} \tag{3.1}$$

$$[x=1,\, B_1] : \begin{cases} y_3(x) = F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1; 1 - x) \\ y_4(x) = (1-x)^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma - \alpha - \beta + 1; 1 - x), \end{cases} \tag{3.2}$$

$$[x=\infty,\, B_\infty] : \begin{cases} y_5(x) = x^{-\alpha} F(\alpha, \alpha - \gamma + 1, \alpha - \beta + 1; 1/x) \\ y_6(x) = x^{-\beta} F(\beta, \beta - \gamma + 1, \beta - \alpha + 1; 1/x). \end{cases} \tag{3.3}$$

ただし

$$B_0 := \{x \in \mathbb{C} \mid 0 < |x| < 1\}, \quad B_1 := \{x \in \mathbb{C} \mid 0 < |1-x| < 1\}, \quad B_\infty := \{x \in \mathbb{C} \mid |x| > 1\}$$

である．これらの基本解も $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ まで解析接続される [1]．微分方程式の解は解析接続しても解なので, 基本解を解析接続して得られる関数はまた基本解の線形結合で表すことができる．それを表しているのが本論文の目的である次の定理である．これによって, 超幾何級数 $y_1(x)$ を B_0 の外に解析接続して得られる関数である超幾何関数を超幾何微分方程式の基本解を用いて表すことができる．

定理 2. 超幾何微分方程式の基本解 $y_1(x), ..., y_6(x)$ の間には次の関係が成り立つ:

$$(y_1(x), y_2(x)) = (y_3(x), y_4(x)) C_{10} = (y_5(x), y_6(x)) C_{\infty 0}. \tag{3.4}$$

ただし $C_{10}, C_{\infty 0}$ は 2×2 行列で

$$C_{10} = \begin{pmatrix} \dfrac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)} & \dfrac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)} \\ \dfrac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha + \beta - \gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} & \dfrac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\alpha + \beta - \gamma)}{\Gamma(\alpha - \gamma + 1)\Gamma(\beta - \gamma + 1)} \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

$$C_{\infty 0} = \begin{pmatrix} \dfrac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta - \alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma - \alpha)} e^{-\pi i \alpha} & \dfrac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\beta - \alpha)}{\Gamma(\beta - \gamma + 1)\Gamma(1-\alpha)} e^{-\pi i (\alpha - \gamma + 1)} \\ \dfrac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha - \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma - \beta)} e^{-\pi i \beta} & \dfrac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\alpha - \beta)}{\Gamma(\alpha - \gamma + 1)\Gamma(1-\beta)} e^{-\pi i (\beta - \gamma + 1)} \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

である．ただし $\Gamma(\alpha)$ はガンマ関数を表す．

関係式 (3.4) を**接続公式**といい, $C_{10}, C_{\infty 0}$ を**接続行列**という．接続公式は超幾何関数の Euler 型積分表示 (2.4) を用いて導出される．接続公式によって, 超幾何関数の $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ における振る舞いは超幾何微分方程式 (2.1) の基本解 $y_1(x), ..., y_6(x)$ を用いて表現できることがわかる．さらに (3.1)-(3.3) によると, これらの基本解は全て超幾何級数を用いて表されている．これらのことから, 超幾何関数の定義域全域における振る舞い (大域挙動) は局所挙動である超幾何級数を用いて記述されてしまうことがわかる．

4 今後の展望

今回扱った超幾何微分方程式は, 特異点とその周りでの解の挙動 (特性指数) を与えるだけで方程式自体が決まってしまう **rigid** と呼ばれるクラスに属する非常に性質が良い微分方程式である．今回得られた知見をさらに深め, 超幾何微分方程式のように性質の良い方程式のクラスを見つけ出すのが今後の目標である．

参考文献

[1] 安達駿弥: 超幾何微分方程式の局所解の Euler 型積分表示, 愛知教育大学数学教育学会誌『イプシロン』, vol.58.

[2] 原岡喜重 『超幾何関数』(すうがくの風景) 朝倉書店, 2002.