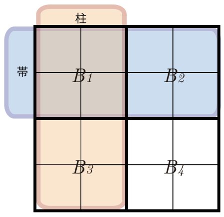
学籍番号		論文題目	読んどく？四独の数え方 ―平面パズルへの置換群の作用の考察―
氏名	蓑島 悠矢		

1　四独盤と四独変換群



1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

a	b	c	d
c	d	a	b
b	a	d	c
d	c	b	a

定義 1.1　4×4 行列で成分が $1, 2, 3, 4$ のみからなるものの集まりを M_4 とし，

a)　各 $p = 1, 2, 3, 4$ に対し $\{x_{p1}, x_{p2}, x_{p3}, x_{p4}\} = \{1, 2, 3, 4\}$,

b)　各 $q = 1, 2, 3, 4$ に対し $\{x_{1q}, x_{2q}, x_{3q}, x_{4q}\} = \{1, 2, 3, 4\}$,

c)　各 $s, t \in \{0, 1\}$ に対し $\{x_{2s+1\ 2t+1}, x_{2s+1\ 2t+2}, x_{2s+2\ 2t+1}, x_{2s+2\ 2t+2}\} = \{1, 2, 3, 4\}$

の三条件をみたす M_4 の元 $x = (x_{pq})$ を**四独盤**と呼ぶ．四独盤のなす M_4 の部分集合を X_4 と表す．

任意の 4 次対称群の元 $\rho \in S_4$ と $x \in M_4$ に対し $\rho(x) = (\rho(x_{pq}))_{p,q \in \{1,2,3,4\}}$ と置けば ρ は $M_4 \to M_4$ の全単射となり，特に $x \in X_4$ ならば四独盤の定義から $\rho(x) \in X_4$ が分かる．一般に $x, y \in M_4$ がある $\rho \in S_4$ によって $y = \rho(x)$ となるとき $x \sim_{S_4} y$ と表し，S_4 による同値類の集合を $\overline{M}_4 = M_4 / \sim_{S_4}$ と表す．

定義 1.2　X_4 の S_4 による同値類の集合 $\overline{X}_4 = X_4 / \sim_{S_4}$ の元を**四独パターン**と呼ぶ．

四独パターンを四独パターンに移す置換 $G_4 = \{\Phi\left(\overline{X}_4\right) \subseteq \overline{X}_4 \mid \Phi \in E_4\}$ は E_4 の部分群をなすので，これを**四独変換群**と呼ぶこととする．特に σ, μ, τ を $x = (x_{pq}) \in \overline{M}_4$ に対し σ を 1 行目と 2 行目の入れ替え，μ を帯 $B1B2$ と帯 $B3B4$ の入れ換え，τ を対角線に関する転置とした $\sigma, \mu, \tau \in G_4$ を四独の**基本変換**と呼ぶ．

定義 1.3　四独盤の位置 (p, q) にあるマスを A_{pq} と名付ける．マス A_{pq} と A_{rs} について $p = r$ または $q = s$，もしくは A_{pq} と A_{rs} が同じブロックに属するとき，この二つのマスは**独立でない**といい，いずれも成り立たないとき**独立である**という．

命題 1.4　盤 $A = (A_{pq})$ の 4 マス $S = \{A_{p_i q_i}, i = 1, 2, 3, 4\}$ で，どの 2 マスも互いに独立でないものを取ると，任意の四独変換 $\Phi \in G_4$ による像 $\Phi(S)$ は $\Phi(A)$ の行，列，ブロックのいずれかになる．すると，(1) A の任意の行は像 $\Phi(A)$ の行に，A の任意の列は像 $\Phi(A)$ の列に移る，(2) A の任意の行は像 $\Phi(A)$ の列に，A の任意の列は像 $\Phi(A)$ の行に移る，のいずれか一方のみが起こる．また A の任意のブロック B の像 $\Phi(B)$ は $\Phi(A)$ のブロックである．

定理 1.5　G_4 は基本変換 σ, μ, τ で生成される．

2　四独盤の分類

定義 2.1　有限群 G の集合 X への**作用**とは，各 $g \in G$ に対し X 上の全単射写像 $\phi_g : X \to X$ が対応し，

1. 単位元 $e \in G$ に対し，ϕ_e は X 上の恒等写像 $\phi_e : x \mapsto x$ である．
2. $g, h \in G$ の積 gh に対し写像の合成 $\phi_{gh}(x) = \phi_g \circ \phi_h(x)$ が対応する．
3. $g \in G$ の逆元 g^{-1} に対し逆写像 $\phi_{g^{-1}}(x) = \phi_g^{-1}(x)$ が対応する．

の 3 条件がなりたつことをいう．以下では記号を簡略化し $\phi_g(x) = gx$ と書くことにする．

定義 2.2　$x, y \in X$ に対し，ある $g \in G$ により $y = gx$ となるとき $y \sim_G x$ と表す．$\sim_G$ は X の同値関係となり，$x \in X$ の同値類 $G(x) = \{y \in X \mid y = gx$ となる $g \in G$ が存在する $\}$ を x の**軌道**と呼ぶ．またこの同値関係による商集合を $X/G = X/\sim_G = \{G(x) \mid x \in X\}$ と表す．$g \in G$ を一つとったとき g の作用で移動しない X の点の集まりを $X^g = \{x \in X \mid x = gx\}$ と表し，$x \in X$ を一つとったとき x を動かさない G の元の集まりを $G_x = \{g \in G \mid x = gx\}$ と表し x の**固定部分群**と呼ぶ．

次に四独変換群の作用による四独盤の分類を行う．まず四独パターン $\overline{X}_4$ の完全代表系としてブロック B_1 が $B_1 = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline\end{array}$ であるものを選ぶこととし，実際に順に調べると (1) の A から L の 12 パターンで全てであることが分かる．したがって，四独盤全体の個数はこれの $|S_4| = 24$ 倍である．すなわち，

命題 2.3　四独盤の個数は $|X_4| = 12 \times 24 = 288$ である．

初期状態のマスの組を 16 文字列 $[A_{11}A_{12}A_{13}A_{14}A_{21} \cdots A_{44}]$ に σ, μ, τ を新しい四独パターンが現れなくなるまで順次作用させると，リストは 128 番目で止まった．すなわち，

命題 2.4 四独変換群 G_4 の位数は $|G_4| = 128$ である．

$$\begin{array}{llll} A & = \{1234, 3412, 2143, 4321\}, & G & = \{1243, 3412, 2134, 4321\}, \\ B & = \{1234, 3412, 2341, 4123\}, & H & = \{1243, 3421, 2134, 4312\}, \\ C & = \{1234, 3421, 2143, 4312\}, & I & = \{1243, 3421, 2314, 4132\}, \\ D & = \{1234, 3412, 4123, 2341\}, & J & = \{1243, 3421, 4132, 2314\}, \\ E & = \{1234, 3421, 4312, 2143\}, & K & = \{1243, 3412, 4321, 2134\}, \\ F & = \{1234, 3412, 4321, 2143\}, & L & = \{1243, 3421, 4312, 2134\}. \end{array} \tag{1}$$

求めた 128 個の四独変換を 12 個の四独パターン $\overline{X}_4$ に作用させ，不変性を調べた。更にこの結果を元に $|\overline{X}_4^g|$ の個数で変換 $g \in G_4$ を分類したもの調べた．ここにバーンサイドの補題を適用すると，

$$|\overline{X}_4/G_4| = \frac{1}{|G_4|}\sum_{g\in G_4}|\overline{X}_4^g| = \frac{48\times 2+9\times 4+4\times 6+6\times 8+4\times 10+1\times 12}{128} = \frac{256}{128} = 2$$

が得られる．すなわち

命題 2.5 四独パターンの四独変換群による軌道の数は 2，すなわち $|\overline{X}_4/G_4| = 2$ である．

四独変換で移りあうことの無い四独パターンは A と B の二つで，残りのパターンは A, B いずれかに四独変換で移る．

定理 2.6（四独盤の分類定理） 四独の 12 パターン $\overline{X}_4$ の四独変換群 G_4 による軌道は $\{A, F, H, L\}$ および $\{B, C, D, E, G, I, J, K\}$ である．

ν	$\lvert\overline{X}_4^g\rvert = \nu$ となる変換の個数	G_4 の元（ただし $s = \sigma, m = \mu, t = \tau$ と表示.）
2	48	$t, tm, mt, sts, mtm, tsms, stms, msts, smts, tmts, stsm, tstm, smst, tmsms, mtsms, mstms, smtms, tmtms, msmts, stmsm, mstsm, smtsm, tmtsm, smstm, tmstm, tsmtm, msmst, mtmsms, tstsms, msmtms, tsmsts, mstmsm, smtmsm, tmtmsm, msmtsm, msmstm, tmsmtm, smstsms, tmstsms, tsmtsms, tsmstms, msmtmsm, tsmstsm, smstmsms, msmstsms, tmsmtsms, tsmstmsm, msmstmsms$
4	9	$ms, sm, tmst, tsmt, tstmsms, tmsmsts, tmsmtmsms, tmsmstmsm, tmsmstmsms$
6	4	$m, sms, tmt, tsmst$
8	6	$msms, tmtm, tmtsms, tsmstm, tmsmst, tsmstsms$
10	4	$tmtmsms, tmsmstm, tsmstmsms, tmsmstsms$
12	1	e

表 1　四独パターン不変数による四独変換群 G_4 の元の分類とリスト．この他にどのパターンも不変にしない 56 個の変換がある．

参考文献

[1] A. Adler, I. Adler, Fundamental Transformations of Sudoku Grids, Mathematical Spectrum Vol. 41 Issue 1, pp. 2-7, 2008.

[2] 秋山 仁, 中村 義作, ゲームにひそむ数理―ゲームでみがこう!!数学的センス, 森北出版, 1985.

[3] B. Felgenhauer and F. Jarvis, Mathematics of Sudoku I, 2006, `http://www.afjarvis.staff.shef.ac.uk/sudoku/felgenhauer_jarvis_spec1.pdf`

[4] J. ローゼンハウス, R. タールマン, 「数独」を数学する　世界中を魅了するパズルの奥深い世界, 青土社, 2014. 共立出版, 2006.