イプシロン　2018. Vol.60，7 － 16

GC を使った「学び合い」の授業のための教材研究の一例 －12/6の GC 活用研究会（松元実践）に向けて－

愛知教育大学数学教育講座　飯　島　康　之

1.　はじめに

1.1 中学校現場で浸透しつつある(?)「主体的・対話的で深い学び」

今年の愛知県の教研集会の数学教育(中学校)分科会では，「主体的・対話的で深い学び」そのものに取り組んでいるレポート，直接扱っていないものの，取り組みの中で言及しているレポートが大半だった。「発表」に向けて取り組まれた実践なので，そのような傾向が強くなったと理解すべきなのだろうか。それとも「主体的・対話的で深い学び」という概念は，中学校現場に浸透しつつあると理解してよいのだろうか。

1.2「学び合い」と「教え合い」

「対話的」という言葉があるからだろうか。実践の中でグループ学習を取り入れている実践が多い。そこでよく登場するのは，「学び合い」という言葉である。気になるのは，「学び合い」という言葉を使いつつも実質的には「教え合い」の機能を想定していると思われることが少なくない点である。「教え合い」という概念や行為が適切でないということではない。算数・数学のように「わかった / わからない」が明確な教科では，「わかった子がわからない子に教える」場面は少なくないし，「教えることによってより深く理解する」こともある。また，習熟のための場面などでは，「正解かどうかをチェックしあう」場面も少なくない。短時間で効果的・効率的に学びを進めていく上で「教え合い」は適切なことも少なくない。しかし，「主体的・対話的で深い学び」で想定されている「対話」は，「わかった子がわからない子に教える」スタイルとは少し違うように思われる。

おそらく，「学び合い」に関する実践知を高めていく上では，「グループにまかせたら，きっと自分たちの力でそれなりに乗り切ってくれるはずだ」という信念のもと，グループにおける生徒の学びに「ゆだねる」部分を増やしてみて，どのような学びがそこで生まれるのかをじっくりと観察することが重要だ。グループの学びにゆだねる時間を継続すべきか，そろそろ切り上げるべきかのタイミングをうまく見極められることに配慮しつつ，いい学びがあったら価値づけや共有化を行って，学級全体の学びに結びつけていく経験を増やしていくことで生徒の学びも成長していく。一方，グループの中での学びは，必ずしも全体の場で共有すべきものばかりとは限られない。グループの中で発生した問いに対してグループ独自で取り組んでみたら，「なんだ，ここに勘違いがあったからか」とグループの中で決着がつくこともある。そっと見守り，グループの中だけにとどめておく方がいい学びはなにかを経験していくことも重要だ。少し距離を置きつつグル

ープでの様子を詳しく観察してみると，そこにはさまざまな「学び合い」や「教え合い」が混在していることを実感することになると思う。

1.3 想定されている「学び合い」の様子とそのための工夫は?

そのような実践知を深めていくのと同時に，そのような学びを設計し，記述し,そして教授行動の指針となるような理論を形成していくことも重要である。本来，「学び合い」は，生徒同士が対等の立場で取り組んでいる場面を想定した概念である。「生徒が対等の立場で取り組もうと思わざるをえない」場面が事前に想定されているのだろうか。そして，「生徒が対等の立場で取り組むときに，どんな対話が想定され，どんな探究のプロセスが想定されている」のだろうか。そして，そのような探究のプロセスが成立するようにするために，教材の選択・発問の工夫など，どのような工夫がされているのだろうか。

普段の授業の中では，必ずしもそういう工夫が十分にされているとは限らない。そのため,通常の数学の問題を扱った授業では，おのずと「わかった / わからない」あるいは「知っている / 知らない」構図が中心となり，「学び合い」と言いつつも，実質的には「教え合い」の構図になっているのではないだろうか。

逆の言い方をすれば，グループの中での話し合いの原動力として,「(正解を)わかった / わからない」という対立軸ではないものとして，どのようなものがあるかを意識的に考え，取り組んでみることが，「学び合い」についての理解を深めていく上では重要なのではないだろうか。

1.4　昨年度のGC活用研究会での近藤実践(Euler線の証明)などの特徴

前回のGC活用研究会の素材は,Euler線の証明だった。これは授業者の近藤先生からの提案だったので取り組んだが，私からの提案だったら，たぶん実践まで至らなかっただろう。とても1時間だけで解決できるような素材ではなかったからである。公開する1時間の授業の中で，しかも中3の知識・スキルで，証明の最後までたどり着けるようにするにはどうしたらいいかという観点からの教材研究が中心になった。問題を理解するだけでも，事前に外心，垂心等の概念を学習しておく必要がある。証明の論法についても学んでおく必要がある。特にEuler線の証明では，直角三角形の場合を利用しながら一般の場合の証明に結びつけていくのだが，その発見をさりげなく支援するための工夫も必要だ。いわば，スキーの大回転のコースを設計するかのごとく,合計6時間程度をどう構成し，学びをどう積み重ねていくべきかを検討した研究授業だった。公開授業を1時間するために，単元を設計し，実践することが必要になってくるところまで私の方から求めるのはしのびない。でも，これに自発的に挑戦することで，(岡崎中学校で例年取り組んでいるような)単元全体を構成するような教材開発に私も近藤先生も取り組めたと実感している。

もちろん，そういう授業を進めていく上でも，生徒の中にさまざまな「学び合い」は生まれている。附属学校ならではの「学び合い」があるとも言える。でも，附属学校でないと使えない教材という印象は多くの方が実感している。可能ならば，今年はそこを変えてみたいと思った。

そんな折，実践者の松元先生から「どんな教材がいいでしょう」という打診があったので，「今年は，公立学校でも取り組めそうな問題にしましょう」と答えつつ，「学び合い」に焦点を当てた

提案をしてみたいと思った。そのとき，まず思い出したのは，2012/2/6 に，川崎市立玉川中学校で行われた地曳先生の実践だった。「今日はみんなに大発見をしてほしい」という投げかけから始まった実践である。同じ発問から出発したとき，附属名古屋中学校の生徒たちだったらどんな「学び合い」をしてくれるだろうか。そして，公立学校でも通用するなにかを実感させてくれるのではないだろうか。本稿ではそのような思いから出発した教材研究などの様子を，学部生や大学院生を対象とした模擬授業での様子なども取り入れながら報告する。松元先生による実践(12/6)までには，まだいろいろな検討会や(他のクラスでの)予備実践などを踏まえて内容を変更していく可能性もあるが，ご関心を持たれた先生は，ぜひ当日の研究会にご参加いただきたい。

2. 松元実践に向けた教材研究

2.1 発問あるいは授業の導入

私自身が模擬授業の中で取り組んだときは，できあがった図を提示するのでなく，図の作り方を説明しながら，その場で作図し，オンライン保存して学生に取り組んでもらうというスタイルをとった。

授業の導入の概略

今日は，みんなに図形について調べる中から「大発見」をしてほしい。
今日の図形を紹介しよう。(GC を使いながら作図する)
まず△ABC がある(図 1)。
ここに三つの辺があるが，それぞれを一辺とする正方形を△ABC の外側につくる(図 2)。
最後に，この 3 ケ所について，2 点を結んで線分をつくる(図 3)。
できました。
3 点 A,B,C を動かしながら，「△ABC がこんなときにこんな関係がある」という大発見をしてほしい。

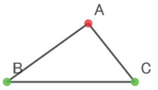


図 1 △ABC

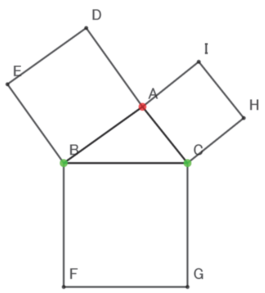


図 2 三辺上に正方形

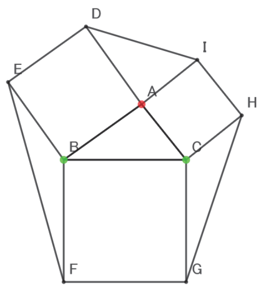


図 3 結んで三つの三角形

GC で作成した図(図 3)をオンライン保存し，それぞれのグループの iPad でそれを開き，動かして調べる状態にして，渡した。

2.2 証明すべき命題(定理)の発見

この発問で想定しているのは，「いろいろな場合を調べる」ことと，その中から「大発見と呼ぶに値する関係を見いだす」ことである。あるいは，その後，証明に取り組むであろうことを考えると，「証明を考える価値がある問題を見いだす」ことである。

学部 3 年生(7 名)対象に模擬授業を行ったとき，最初，次のような会話で始まった。

S1 : (点 A を動かした後で) この図(図 4)が一番いいな。
この図の場合には，三つの正方形の面積がすべて等しいです。

T1 :これは△ABC がどんな形のときと言ったらいいですか?

S2 : 正三角形。

T2 : なるほど。つまり，△ABC が正三角形のとき，外側にある 3 つの正方形の面積は等しい，ということですね。

S3 : はい。

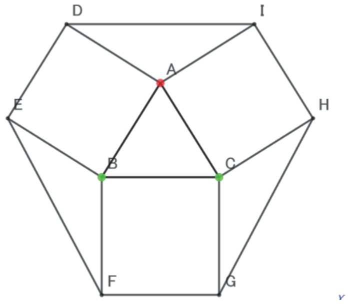


図 4　△ABC が正三角形の場合

T3 : たしかに。
(ちょっと間をおいて)
○○さん。あなたにとっては，この発見は「大発見」と呼ぶに値しますか?

S4 : ….(若干沈黙があって)….. いいえ。

T4 : なんで?

S5 : 当たり前だから。

T5 : たしかに，正三角形だったら 3 つの辺が等しいはずで，それを 2 乗したものが正方形の面積なので,…. 当たり前ですね。

全員で 7 名だったので，教師(役)も加わった会話になったが，おそらく生徒にゆだねても生徒の中で同じような会話が発生し，「△ABC が正三角形のとき 3 つの正方形の面積が等しい」という命題は，「当たり前だから」という理由で却下されるのではないだろうか。

実際に生徒が調べるのは，すべての場合になるとは限らないが， △ABC の形状に注目して場合分けをするとしたら，図 5 に示すようにいろいろな場合が想定される。実は，正方形の面積の相等性について注目する場合は，どの場合も辺の長さが等しいことに関わるので，二等辺三角形ならば二つが等しい，正三角形ならば三つが等しいという議論であって，「当たり前」である。逆に，直角三角形のときには，A+B=C という形の三平方の定理があるはずだが，今回の観察においては，方眼さえないので，それぞれの正方形の面積の値を意識することは難しい。つまり，三平方の定理を確信を持って発見する余地はほとんどないと考えると，おのずと発見すべき関係は，三角形の面積の関係に焦点化されてくるだろう。

三角形の面積に注目したときに，どんなことに気づきうるのであろうか。発見してほしい命題は，「ここにある 4 つの三角形すべての面積が等しい」という命題だが，図から面積がすぐ分かるわけではなく，確信をもって等しさを語れるのは合同な三角形の組を見いだせる場合であろう。

図 5 にはその様子もまとめてみた。これらを手がかりに，どのように想定する命題にたどり着くことができるだろうか。模擬授業での様子を踏まえつつ，いくつかの可能性を検討してみたい。

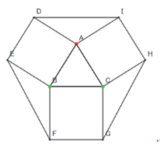
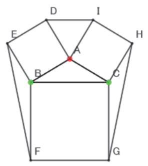
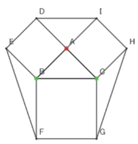
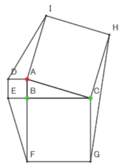
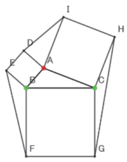
△ABC の形	正三角形	二等辺三角形	直角二等辺三角形	直角三角形	一般の三角形
図					
正方形の面積の関係	3 つが等しい	2 つ等しい	2 つ等しい	すべて異なる	すべて異なる
三角形の合同	外側の 3 つが合同	左右の 2 つが合同	上下・左右の 2 組が合同	中央と左が合同	合同なものはない

図 5 △ABC の形に注目して調べたいろいろな場合

(1) GC の測定機能を使って発見した 4 年のゼミ生

発問を提示した後，研究室にあるモノを取りにいく必要があり，中座した。その間はほんの 2,3 分だったはずなのだが，戻ってみると，ゼミ生は「すべての三角形の面積が等しいんですね」と言う。さすが 4 年生と思いつつ「なんでわかったの?」とたずねると，「GC で測定しましたから」という反応。「それって，中学生にとっては掟破りじゃないか?」。

掟破りかどうかは，授業でのルールによる。一つのやり方として，「いろいろなものを測定する機能があるから，それを使っていい」と指示する方法もありうる。地曳実践はこの方法を選択していた。そういうルールを採用した場合には，注目したい三角形の面積を測定し，「え，ここここの面積って，いつも一緒なの?」という驚きとして実感するはずだ。実際，正方形は辺の長さが等しくないと面積は等しくならないので,四角形に関しては興味深い結果はえられず,三角形に関しては, 4 つすべての面積がいつも等しいという意外な結果に到達することができる。

大学生の場合, GC の機能に習熟しているので，思いつきを確かめるのに使った時間は短かった。玉川中の生徒も慣れていた。でも附属名古屋中の生徒の場合，測定の機能を使うための指導も必要になるし，いろいろな多角形の面積を調べるのに時間がかかることが懸念される。

(2) GC の測定機能を使わなかったところ発見に困った 3 年生と示唆される代替案(1)

学部 3 年生(7 名)のときには，測定機能は使わないことにした。本節冒頭で示したようなやりとりをしながら，進めていったのだが，「すべての三角形の面積が等しい」につながる手がかりを見いだすことができなかった。そこでの模擬授業では，「実は 4 年生は測定して見つけてしまったのだけど」と続け，その後は証明に焦点化して話を進めたのだが，中学生の場合に GC の測定機能を使わないなら，同じように困ってしまう状況が想定された。

一つの代替案は，GC の測定機能を使っていいと指示することである。しかし，これまでそれらの機能を使っていないので，そのための指導が必要になるし，一定の時間も必要になる。また，デジタル的に表示される面積が等しいというだけの情報が提示されるのだから，証明等を考えるための手がかりなどは付随しないことが気になった。

ここでは採用しなかったが，もう一つの代替案としては，(iPad 上に示されている図について)定規などで測定することが考えられる。つまり，次のような思考の様相である。

・正方形の面積は，辺の長さの二乗だから，面積が等しいときには辺も等しくなるはずで，あまり目新しい結果はでそうもない。

・ということは，おもしろい関係があるとしたら，三角形の面積の方。

・三角形の面積は，底辺と高さで求められる。

・たとえば，この二つの三角形は，底辺が等しくなっているのだから，高さが等しければ面積は等しくなるはず。この図形の高さって，どこだろう。

・(測定してみると)どうも同じくらいじゃないかな。

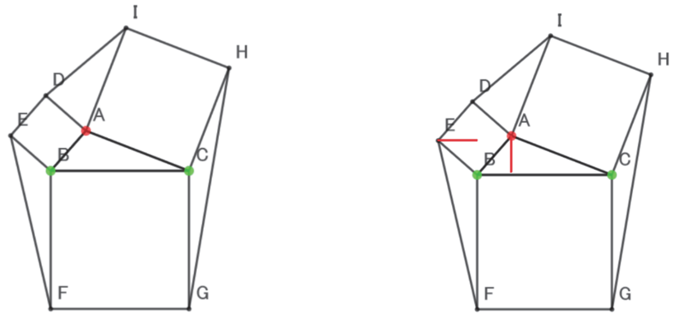


図 6 △ABC と△EFB の高さへの注目と測定

(3) 代替案(2)

もう一つ別の方法がありうるとすれば，「二等辺三角形でないのに三角形の面積が等しくなる場合ってあるかな」とか「△ABC と△EFB が等しくなる場合ってあるかな」というような問いが想定される。

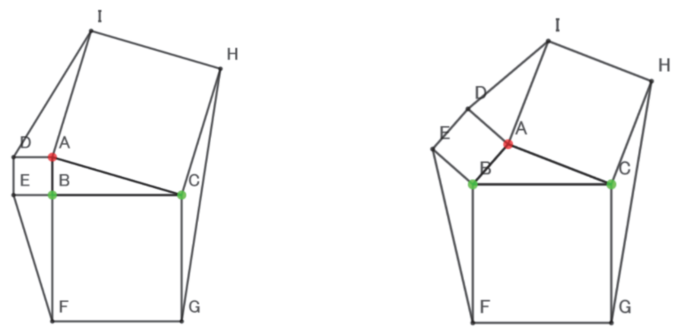


図 7 △ABC が直角三角形の場合への注目と一般化

この二つの三角形が合同になる場合として，図 7 左のような場合がある。「このときには二つの三角形の面積が等しいけれど，点 A を少し動かしたとき，この二つの三角形の面積はどうなるだろう」などの問いから，一般の場合での二つの三角形の面積に注目し，直角三角形の場合には底辺と高さが明らかに等しいのに対して，今回では底辺は同じ。では高さはどうなっているのか」という点に注目していく流れである。

他の関係の場合には，合同関係によって一目瞭然だが，この 2 つの三角形の面積は，一目見ただけではわからない。でも，面積は等しい。また，この関係は，この二つの三角形だけでなく，他のペアにも通用する。その結果，最初想定していなかったことだが, 4 つすべての三角形の面積が等しいということが分かる。

少なくとも最初見たときには成り立つとは思っていなかった「4 つもの三角形の面積がいつも等しい」という命題にたどり着くことで，「意外性のある命題」を発見したことを実感してくれるのではないだろうか。

(4) 代替案(3)

タブレット上に表示されている長さを定規で測定することは, GC の機能を使って測定するよりも手軽だが，若干違和感はある。また，点は自由に動かしてよいため，測定値はグループによって異なる。より自然に測定しやすくするためには，特定の図を印刷されたワークシートを配布し，その図について測定したり，書き込みをして考えるという方法もありうる。全員同じ図について測定をして考えることになる。同じ図について考えることが利点になるのか，一つの場合だけについて考えるのが欠点になるのか，そのあたりの吟味も必要になる。

2.3 証明の発見

証明する価値を感じる問題が見つかったら，それに続いて証明が課題になる。ここで注意したいのは，問題の発見が容易に行えれば証明も容易に行えるというわけではない点である。

(1) 学部 4 年生には高校生の方法で解決する学生もいた

ＧＣの測定機能を使った測定値から関係を見いだしたのが学部 4 年生集団だった。「証明しよう」と投げかけてからそれほど時間を経過しないうちに，ある学生が，「そりゃ，そうでしょう」と次のように解決した。

$\triangle ABC = 1/2 \cdot AB \cdot BC \sin\angle ABC$

$\triangle EFB = 1/2 \cdot EB \cdot BF \sin\angle EBF = 1/2 \cdot AB \cdot BC \sin(180^\circ - \angle ABC) = 1/2 \cdot AB \cdot BC \sin\angle ABC$

そして，一点を共有する二つの三角形の頂角の和が 180° ということが鍵だと指摘した。高校生ならば，この解決が最も妥当な解決である。さらに，今回は，中学生が取り組む課題として想定しているので，中学生に適した方法で解決してほしいと指示した。

(2) 高さに注目し，直角三角形の合同によって証明する

大学院生(2 名)が取り組んだときも，最初, (1)の高校生の方法で解決した。上記と同様に，中学生的な解決を求めたが，なかなか進展しなかった。10 分くらい経過したとき，「中学生だったら，三角形の面積は，底辺×高さ÷2 の公式しか使えないかな」「等しい辺があるから，それを底辺と

みると，高さが等しければいいはず」という会話になった。図 8 左のように高さを書き込み，数分後に図8右のようにそれらを一辺とする直角三角形を見いだし，そして，少し吟味してから，直角三角形の合同条件(斜辺と一鋭角)が成り立つので証明できることを見いだした。

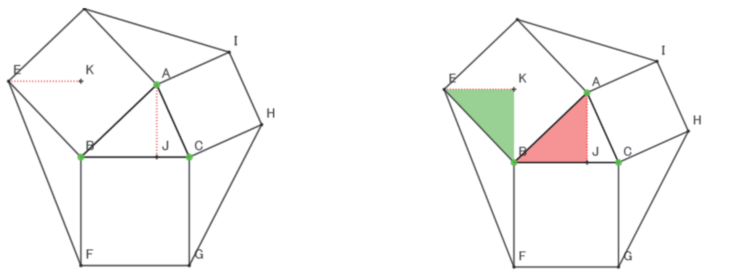


図 8 △ABC と△EFB の高さへの注目と合同な直角三角形の発見

(3) 二つの三角形の関係

これらは直角三角形の合同条件によって合同を示せれば，それで十分ともいえるのだが，先に

sin∠EBF = sin (180° - ∠ABC) = sin∠ABC

を見いだした 4 年生は，次のような言葉で表現した。

「この右側の三角形(△ABJ)をカコーンと回せば左側の三角形(△EBK)に重なります」

高さを表す線分 AJ を点 B を中心に 90° 回転したら EK に重なると表現してもいいし，△ABJ を回転して△EBK に重なると表現してもいい。

(4) △ABC 自身を回転すると

さらに，△ABC そのものを回転するという考え方もできる。図 9 左のように，点 B を中心に△ABC を 90° 回転すると，大きな三角形△EFL が登場し，中線 EF は面積が等しい二つの三角形に分割していることが分かる。他の頂点で 90° ずつ回した図が図 9 右である。

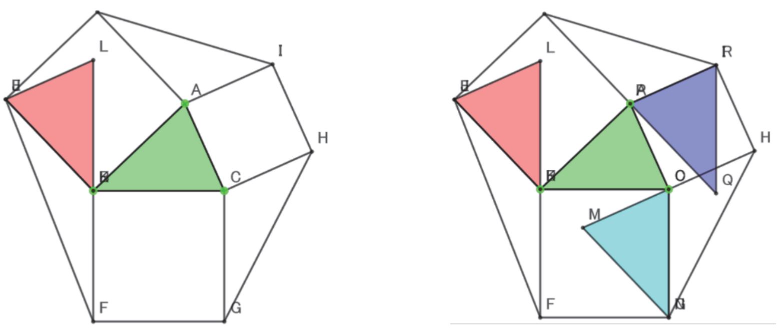


図 9 △ABC を回転すると大きな三角形と中線が見いだせる

3.　「学び合い」が成立するための本実践での工夫

3.1　GC, タブレットと「学び合い」の親和性

これまで多くの先生方と GC を使った実践に取り組む中で，多くの「学び合い」を観察してきた。次のような点で，タブレットで GC を使った実践は，「学び合い」と親和性があると考える。

(1) 「発見」を支援するソフトである

GC の初歩的な使い方は，与えられた図を動かして，いろいろな場合を観察することにある。一点を動かすだけでも，「ほぼ無限個の場合」が観察可能だ。そこから「いつも成り立つ」ことに注目することもできれば，特殊な場合に注目することもできる。「潜在的に発見可能な場合がたくさん埋め込まれている図」として与えている点が，第一の特徴である。

(2) 4 人に 1 台のタブレットは話し合いに適している

4 個の机をつなげ,中央にタブレットを置き，それを操作・観察するという使い方をすることが多い。この場合，しっかり観察したいと思うと上からタブレットを覗く態勢になるので,4 人の顔が寄り，会話しやすい環境になる。さらに, PC をマウスで操作する場合に，マウスを握っている人からマウスを譲り受けないと操作することができないが，タブレットの場合には指タッチでいいので，「こうしたい」と思った生徒は自分の指を伸ばして操作するだけでいい。またマルチタッチになっているので，数人で協力しながら操作する課題を出すこともできる。

(3) ノートなど他の媒体に切り換えやすい

数学の授業なので，「観察だけで終わる」ことはない。それを元に証明など，数学的問題に取り組むことに結びつけていくことが必要だ。あるいは，話し合いもいつまでも続けていく必要はない。生徒が「一人で証明について考えたい」と思ったら，モードを切り換えて個人追究に切り換えられる方がいい。4 人に 1 台のタブレットを置く方法の場合，机上の他のスペースにノートやワークシートなどを置くことができるため，紙での作業に切り換えたり，必要性を感じたら再びタブレットに戻ったりすることもできる。生徒が媒体を自由に切り換えられることは，紙を使った証明活動を妨げない上でも重要な要因である。

しかし，当たり前のことだが，そのような親和性があれば，いつでも質の高い「学び合い」が成立するわけではない。発問などが適切でなければ，機械的な「作業」になったり，無目的に図形を動かすだけの時間になってしまう。どのような対話的な探究のプロセスがありうるのかを想定し，それを引き出すのに適切な発問やワークシートなどの工夫が事前の準備として不可欠なのである。

3.2　「大発見」に値する命題を見つけるためには

「大発見をしてほしい」という言葉は，地曳実践からの受け売りだが，この投げかけはとても興味深い。「発見」ならば，とりあえず一つでも「見つけさえすればいい」だろうし，たとえ小さなことであっても，「たしかにそれもあるね」と受容されることになる。しかし，「大」発見ということになると，さまざまな発見がある中で，「他と比較して注目したい特徴がある」ことを意味している。まずは「いろいろとありうる発見」を見つける必要がある。それらを比較して評価する必要がある。そして，根拠を明確にして「大発見」に値するものを明確にする必要がある。

それはちょっと一人では手に負えそうもない。それぞれが見つけたものを共有し，話し合って取り組むべき課題と，生徒たちは感じるのではないだろうか。

なお，「大発見をしてほしい」というだけでは何を発見したらいいかがわからないかもしれない。そこで，私の模擬授業の中では，「△ABC がこんなときにこんな関係があるという発見をしてほしい」という発問にしてみた。同じ発問でいいのか，変えた方がいいのかも，当日までに松元先生が検討する課題の一つになるだろう。

3.3 少し手応えがある証明問題

大学生や大学院生は，2.3(1)のように，三角比を使った解決が多かった。「中学生的な方法で」と再考を求めると，意外に時間を要する問題になった。中学生にも同じくらいの時間を要する問題であるなら，個人追究の中で困難を感じた生徒たちは，おのずと話し合いをしながら解決していくことになると予想される。しかし，授業までには直角三角形の合同条件までを学んでいるだろうというのが，松元先生の推測なので，しばらく前に習った直角三角形の合同条件の応用問題として，2.3(2)の証明によってあっさりと解決してしまう可能性もないとは言えない。

一方，合同な二つの三角形には，2.3(3)のように，「回転すると重なる」関係もあるし，その回転を使うことで，2.3(4)の別解を引き出すことも可能なので，あっさりと解決してしまって時間に余裕が生まれたときには，そちらについての考察に導いていく選択肢もある。授業の進行に合わせて，どう対処するかを判断する事柄の一つになるだろう。

4. おわりに

ここ数回，附属名古屋中学校での GC 活用研究会で取り組んできた課題は，少し難しいものが多かった。九点円とか Euler 線など，中学生で解決できるのだろうかと思いながら，彼らでも解決できるような道筋を考えることは，それを解決できるようにするためには何を指導しなければならないかという，単元構成やカリキュラムを見直す機会を提供してくれた。

授業では，難題にグループさらに学級全体の力を合わせてチャレンジしていくという文脈の中で，様々な学びの様子を観察することができた。10 のグループのそれぞれで何が起こっているのかは傍観者としての私たちにはよく分からない。それぞれにビデオカメラや IC レコーダを設置し，会話記録をつくってみると，それぞれ違ったドラマがあることがわかる。授業者はリアルタイムでそのすべてを把握して授業を進めているわけではないことを考えると，授業の難しさを実感した。しかし逆にいえば，生徒にとってグループはいわば秘密基地であり，先生にすべてが見えているわけではない世界があるからこその「学び合い」であることも実感した。

今回の，「大発見をしてほしい」という投げかけは，九点円や Euler 線の証明のような難問とはかなり趣が違う。これまでに見えてきた「学び合い」とどういう点で共通し，どういう点で異なるのか。興味をもっと観察してみたい。

謝辞：本研究は科学研究費補助金（課題番号：17K00967）の助成を受けたものである。