令和２年度修士論文 (要旨)

待ち行列理論の研究

～待ち行列による製造かんばんモデルの一考察～

愛知教育大学大学院教育学研究科

数学教育専攻数学科内容学領域

大西　宏明

本研究では待ち行列理論により，かんばん方式が導入された工場の様子を数理モデル化し，そのモデルを用いて客の待ち時間の変化やかんばん枚数との関係について考察を行った．

1　待ち行列理論とかんばん方式

待ち行列とは現実のサービス業の窓口やインターネット通信において発生する「待ち」のことであり，我々の生活で身近に出会う現象である．待ち行列理論を用いることで様々な混雑を表現することができ，このような現象において発生する混雑を解析する..

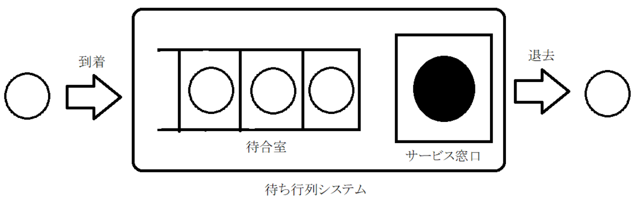

図 1: 待ち行列システム [1]

待ち行列システムの中で図２のように客の注文が受注生産であるようなものを考える．

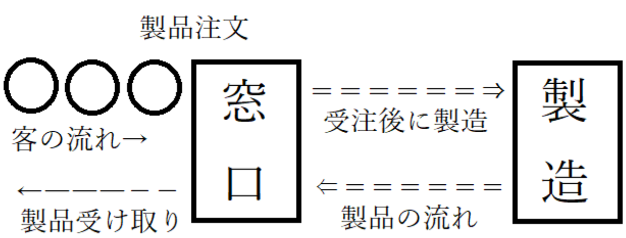

図 2: 受注生産方式 [4]

製品のオーダーを受けてから生産に入る受注生産は，最も簡単な生産方式である．しかし，受注生産ではオーダーしてから製品を受け取るまでに大きな待ち時間が生じてしまう可能性がある．在庫を持てば簡単にサービスを向上させることが，多くの在庫を持つことは保管など余分なコストが生じる．したがって，サービスを向上させるためには十分な在庫を持つことが重要である．そこで用いるのが「かんばん方式」である．

かんばん方式とはトヨタ自動車が開発・実施している生産管理方式である [2][3].「かんばん」とは，作業指示書のことである．客の注文が到着したときに，在庫があれば，客は即座に製品を受け取り，かんばんが外される．外されたかんばんは新しい製品の注文オーダーとなり，製造部門に回される．製造部門はかんばんが到着すると製品の製造に入る．製造部門ではかんばんが客の役割を果たしているのである．製造スピードより多くのかんばんが到着するときには，かんばんが製造待ちの行列を作る．製品が出来れば，かんばんは製品と一緒に在庫に戻る．客が到着したときに在庫がなければ，客は自分の製品が出来るまで待たなければならない．このかんばんをサービスかんばんと呼ぶことにする．

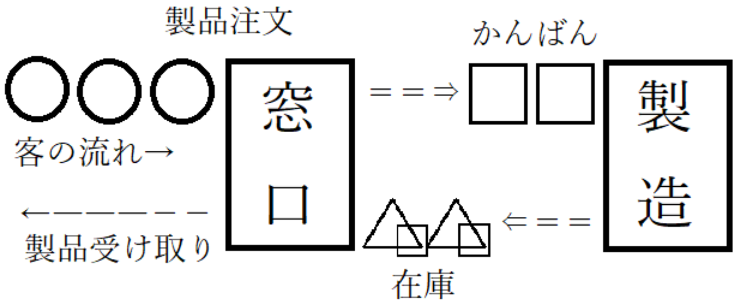

図 3: かんばん方式 [4]

この待ち行列システムにおける，客からの注文の到着率が λ，生産にかかる時間 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots$ はパラメータ μ の指数分布に従う独立同分布列とする．この待ち行列に加わっている客の数を B，生産中を含めて生産待ちのかんばんの数を C，かんばんの枚数を z 枚とする．かんばん方式には，在庫待ちの客のオーダー B と製造待ちのかんばん C の 2 種類の待ち行列がある．この 2 つの待ち数の和を L とする．L は製造を待っているオーダーの総数である．L は，客のオーダーが到着することで 1 増加し，製品の製造完了で 1 減少する．このような，客の到着間隔がパラメータ λ の指数分布に従い，サービス時間がパラメータ μ の指数分布に従い，サービス窓口が 1 つで待合室の容量に制限がない待ち行列システム待ち行列システムを M/M/1 待ち行列と呼ぶ．かんばん方式は M/M/1 待ち行列でモデル化することができる．[4].

2 製造かんばんモデル

従来のサービスかんばんモデルに製造かんばんと呼ばれるものを導入し，そのモデルを新たに製造かんばんモデルと呼んで考える．製造かんばんとは製造工程内における作業を指示する際に用いられるかんばんで，注文が来ずとも製造かんばんの枚数分は予め製品を製造しておき，製造工程内において客の役割を果たすものである．製品が出来れば，製品についている製造かんばんをサービスかんばんに付け替え，製造かんばんは製造工程の待ち行列に並び，サービスかんばんがついた製品は窓口の在庫に移動する．また，窓口と製造工程の間で動くサービスかんばんと混ざることはない．製造かんばんを加え，製造かんばんとサービスかんばんを利用したかんばんモデルについても待ち行列としてモデル化することが出来る [2][3]．これらの事実より，窓口と工程間でサービスかんばんを用い，各工程で製造かんばんを用いる待ち行列モデルについて考えることで状態の推移や客の待ち時間を到着の頻度，製造のスピード問わず一般的に求めたい．また，適切なかんばん数・作業方法について考察することで様々なシチュエーションにおける適切なかんばん数について考える．

3　考察

製品を作るために 2 工程を要する場合を考える．まず工程 2 で半製品を作り，それを工程 1 で仕上げる．客からの注文の到着率が λ，製造かんばんが 1 枚，サービスかんばんが c_0 枚，製造工程が 2 つであるようなかかんばん方式待ち行列システムを考える．窓口から先に注文が入る工程 2 の生産にかかる時間が平均 $\dfrac{1}{\mu_2}$ の指数分布に従う独立同分布の列であり，次の工程 1 の生産にかかる時間は平均 $\dfrac{1}{\mu_1}$ の指数分布に従う独立同分布の列であるとする．但し，原料は常に工程 2 に供給され続ける．

i_2：工程 2 内で生産中の部品の数
j_2：工程 2 内で生産済の部品の数
i_1：工程 1 内で生産中の部品の数
j_1：工程 1 内で生産済の部品の数
k：待ちサービスかんばんと待ち客の和．

として 2 工程の状態と待ち客の状態を (i_2, j_2, i_1, j_1, k) と表す．但し，$i_2 + j_2 = 1$ である．$i_1 + j_1 = 1$ とは限らない．何故なら，製造を始めようとしても工程 2 からの半製品が来ておらず，工程が止まる可能性があるからである．

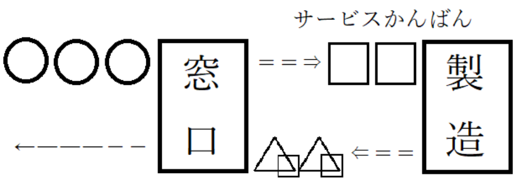

図 4: 2 工程における全体の様子 [4]

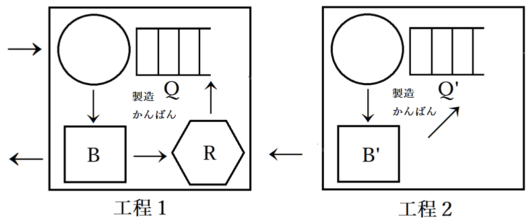

図 5: 2 工程における製造内の様子 [2][3]

図 5 における R は製造かんばん置き場であり，工程 2 から送られてくる部品に工程 1 の製造かんばんをつける場所である．

推移図を考えると次のようになる．

$$
\begin{array}{ccccc}
(1,0,0,1,0) & \underset{\mu_2}{\rightarrow} & (0,1,0,1,0) & & \\
\lambda\downarrow & \mu_1\nwarrow & \lambda\downarrow & \mu_1\nwarrow & \\
(1,0,0,0,0) & \underset{\mu_2}{\rightarrow} & (1,0,1,0,0) & \underset{\mu_2}{\rightarrow} & (0,1,1,0,0) \\
\lambda\downarrow & \mu_1\nwarrow & \lambda\downarrow & \mu_1\nwarrow & \lambda\downarrow \\
(1,0,0,0,1) & \underset{\mu_2}{\rightarrow} & (1,0,1,0,1) & \underset{\mu_2}{\rightarrow} & (0,1,1,0,1) \\
\lambda\downarrow & \mu_1\nwarrow & \lambda\downarrow & \mu_1\nwarrow & \lambda\downarrow \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
\lambda\downarrow & \mu_1\nwarrow & \lambda\downarrow & \mu_1\nwarrow & \lambda\downarrow \\
(1,0,0,0,k) & \underset{\mu_2}{\rightarrow} & (1,0,1,0,k) & \underset{\mu_2}{\rightarrow} & (0,1,1,0,k) \\
\lambda\downarrow & \mu_1\nwarrow & \lambda\downarrow & \mu_1\nwarrow & \lambda\downarrow \\
\vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}
$$

図 6: 2 工程推移図

待ち行列が安定するための条件として $\frac{1}{\lambda} > \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}$ を仮定する．これを安定条件と呼ぶ．また，状態 (i_2, j_2, i_1, j_1, k) になる定常分布を $\pi(i_2, j_2, i_1, j_1, k)$ とする．このとき，$\pi(1,0,0,0,k) = a_k, \pi(1,0,1,0,k) = b_k, \pi(0,1,1,0,k) = c_k, (k \geq 0), \pi(1,0,0,1,0) = a_{-1}$, $\pi(0,1,0,1,0) = b_{-1}, 0 = c_{-1}$ とおくと図 6 より $k \geq 0$ のとき a_k, b_k, c_k は次の式を満たす.

$$\begin{cases} (\lambda+\mu_2)a_k = \lambda a_{k-1} + \mu_1 b_{k+1} \\ (\lambda+\mu_1+\mu_2)b_k = \mu_2 a_k + \lambda b_{k-1} + \mu_1 c_{k+1} \\ (\lambda+\mu_1)c_k = \mu_2 b_k + \lambda c_{k-1} \end{cases}$$

ここで $A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ とし，同様に $B(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$，$C(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ とする．それぞれ両辺に z^{k+1} をかけ，k についての無限和を考えると以下のように変形できる.

$$\begin{cases} (\lambda+\mu_2)zA(z) = \lambda z^2 A(z) + \mu_1(B(z) - b_0) + \lambda z a_{-1} & (1) \\ (\lambda+\mu_1+\mu_2)zB(z) = \mu_2 zA(z) + \lambda z^2 B(z) + \mu(C(z) - c_0) + \lambda z b_{-1} & (2) \\ (\lambda+\mu_1)C(z) = \mu_2 B(z) + \lambda z C(z) & (3) \end{cases}$$

ここで a_{-1}, b_{-1}, b_0 は推移図より，$(\lambda+\mu_2)a_{-1} = \mu_1 b_0, \lambda b_{-1} = \mu_2 a_{-1} + \mu_1 c_0, (\lambda+\mu_1)c_0 = \mu_2 b_0$ という関係を持つから a_{-1}, b_{-1}, b_0 を c_0 を用いて表すと，

$$b_0 = \frac{\lambda+\mu_1}{\mu_2} c_0 \tag{4}$$

$$a_{-1} = \frac{\mu_1}{\lambda+\mu_2} b_0 = \frac{\mu_1(\lambda+\mu_1)}{\mu_2(\lambda+\mu_2)} c_0 \tag{5}$$

$$b_{-1} = \frac{\mu_2}{\lambda} a_{-1} + \frac{\mu_1}{\lambda} c_0 = \frac{\mu_1(\lambda+\mu_1)}{\lambda(\lambda+\mu_2)} c_0 + \frac{\mu_2}{\lambda} c_0 = \frac{\mu_1(2\lambda+\mu_1+\mu_2)}{\lambda(\lambda+\mu_2)} c_0 \tag{6}$$

が求まるので (4), (5), (6) を (1), (2), (3) に代入すると次のようになるのでこの連立方程式を解くことで，A(z),B(z),C(z) を c_0 を用いて表すことが出来る.

$$\begin{cases} (\lambda+\mu_2)zA(z) = \lambda z^2 A(z) + \mu_1\left(B(z) - \frac{\lambda+\mu_1}{\mu_2} c_0\right) + \lambda z \frac{\mu_1(\lambda+\mu_1)}{\mu_2(\lambda+\mu_2)} c_0 & (7) \\ (\lambda+\mu_1+\mu_2)zB(z) = \mu_2 zA(z) + \lambda z^2 B(z) + \mu_1(C(z) - c_0) + \lambda z \frac{\mu_1(2\lambda+\mu_1+\mu_2)}{\lambda(\lambda+\mu_2)} c_0 & (8) \\ (\lambda+\mu_1)C(z) = \mu_2 B(z) + \lambda z C(z) & (9) \end{cases}$$

(7), (9) を変形し (8) に代入すると以下のように $B(z)$ が求まる.

$$B(z) = \frac{\mu_1(\lambda+\mu_1-\lambda z)(\lambda+\mu_2-\lambda z)(2\lambda+\mu_1+\mu_2)}{(\lambda+\mu_2)X(z)} c_0 \cdots (*)$$

但し，

$$X(z) = -\lambda^3 z^3 + 2\lambda^2(\lambda+\mu_1+\mu_2)z^2 - \lambda\{(\lambda+\mu_1+\mu_2)^2 + \mu_1\mu_2\}z + \mu_1\mu_2(2\lambda+\mu_1+\mu_2)$$

とする．B(z) より A(z)，C(z) も求めることができる.

$$zA(z) = \frac{\mu_1^2\mu_2(\lambda+\mu_1-\lambda z)(2\lambda+\mu_1+\mu_2) - \mu_1(\lambda+\mu_1)X(z)}{\mu_2(\lambda+\mu_2)X(z)} c_0$$

$$C(z) = \frac{\mu_1\mu_2(\lambda+\mu_2-\lambda z)(2\lambda+\mu_1+\mu_2)}{(\lambda+\mu_2)X(z)} c_0$$

ここで $z = 1$ とすると $X(1) = \mu_1\mu_2(\mu_1+\mu_2) - (\mu_1^2+\mu_1\mu_2+\mu_2^2)\lambda$ である．ここで $\frac{1}{\lambda} > \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}$ より，

$$\frac{1}{\lambda} > \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1+\mu_2} \Leftrightarrow \mu_1\mu_2(\mu_1+\mu_2) - (\mu_1^2+\mu_1\mu_2+\mu_2^2)\lambda > 0$$

であるから，$X(1) > 0$ である．導いた a_k, b_k, c_k を用いて平均待ち行列長を次の式で求めることができる．

$$\begin{aligned}\sum_{k=c}^{\infty}(k-c)(a_k+b_k+c_k) &= \sum_{k=0}^{\infty}(k-c)(a_k+b_k+c_k) - \sum_{k=0}^{c-1}(k-c)(a_k+b_k+c_k) \\ &= A'(1)+B'(1)+C'(1) - c\{A(1)+B(1)+C(1)\} - \sum_{k=0}^{c-1}k(a_k+b_k+c_k)\end{aligned}$$

また，到着した際の状況が状態 $(1,0,0,0,n)$ であった客の待ち時間を $W_n(A)$，$(1,0,1,0,n)$ であった客の待ち時間を $W_n(B)$，$(0,1,1,0,n)$ であった客の待ち時間を $W_n(C)$ とすると平均待ち時間を求めることができる．$W_n(A)$、$W_n(B), W_n(C)$ は次の式から導かれる．

$$\begin{aligned}W_n(A) &= \frac{1}{\mu_2} + W_n(B) \\ W_n(B) &= \frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\left\{\frac{1}{\mu_1} + W_{n-1}(A)\right\} + \frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\left\{\frac{1}{\mu_2} + W_n(C)\right\} \\ W_n(C) &= \frac{1}{\mu_1} + W_{n-1}(B)\end{aligned}$$

但し，$W_{c-1}(A) = W_{c-1}(B) = 0$ である．$W_n(A), W_n(B), W_n(C)$ を用いて $c = 2$ であるときの客の平均待ち時間を次の式で求めることができる．

$$\sum_{k=2}^{\infty}\{W_k(A)a_k + W_k(B)b_k + W_k(C)c_k\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\{W_k(A)a_k + W_k(B)b_k + W_k(C)c_k\} - \sum_{k=0}^{1}\{W_k(A)a_k + W_k(B)b_k + W_k(C)c_k\}$$

得られた連立方程式を用いてシミュレーションを行った．$c = 2, \lambda = 1, \mu_1 + \mu_2 = 5$ として安定条件を満たすように μ_1, μ_2 の値を変動させた場合の平均待ち行列長，平均待ち時間について次の結果が得られた．

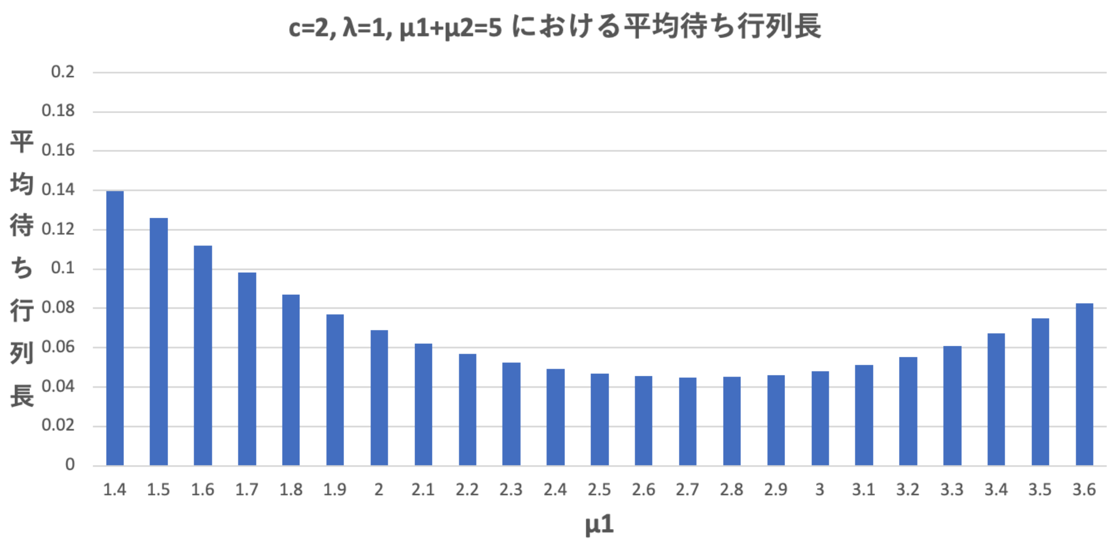

図 7: $c = 2, \lambda = 1, \mu_1 + \mu_2 = 5$ における平均待ち行列長

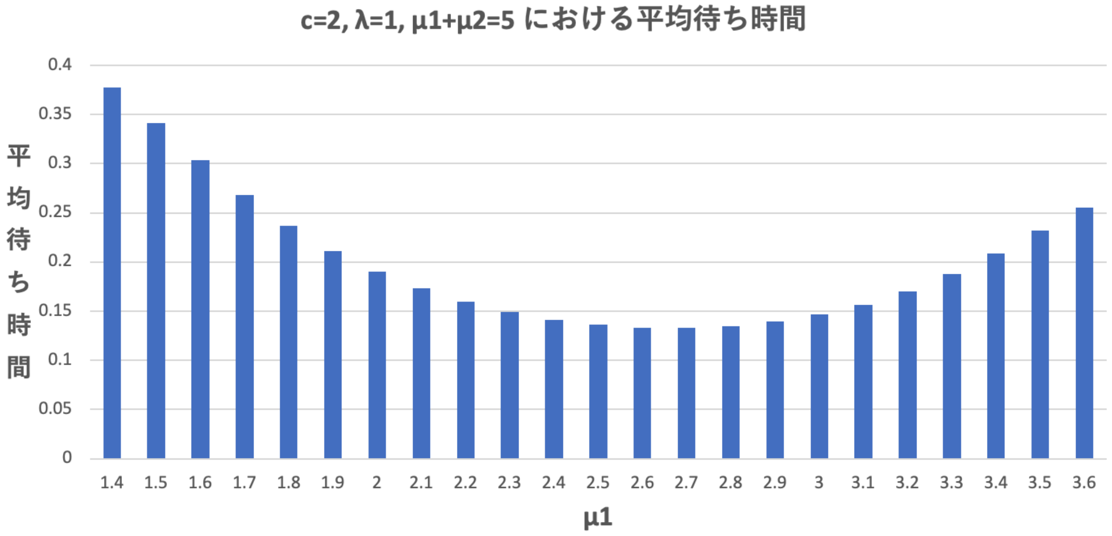

図 8: $c = 2, \lambda = 1, \mu_1 + \mu_2 = 5$ における平均待ち時間

以上より，平均待ち行列長，平均待ち時間ともに値が最も小さくなるとなるのは $\mu_1 = 2.7, \mu_2 = 2.3$ のときである．また，μ_1, μ_2 の値が入れ替わった場合に注目すると，$\mu_1 > \mu_2$ の場合は $\mu_1 < \mu_2$ の場合と比較して平均待ち行列長，平均待ち時間の値がともに小さくなることが分かる．

次に，サービスかんばんの枚数 c の値を変動させて考える．$\lambda = 1, \mu_1 = 3, \mu_2 = 2$ として c の値を変動させた場合の平均待ち行列長，平均待ち時間の値について次の結果が得られた．

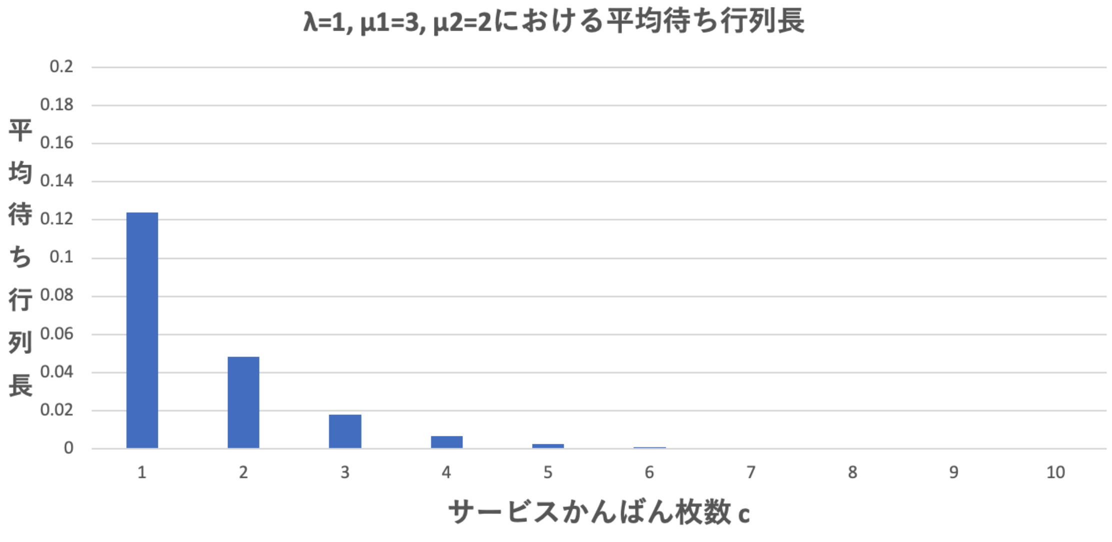

図 9: $\lambda = 1, \mu_1 = 3, \mu_2 = 2$ における平均待ち行列長

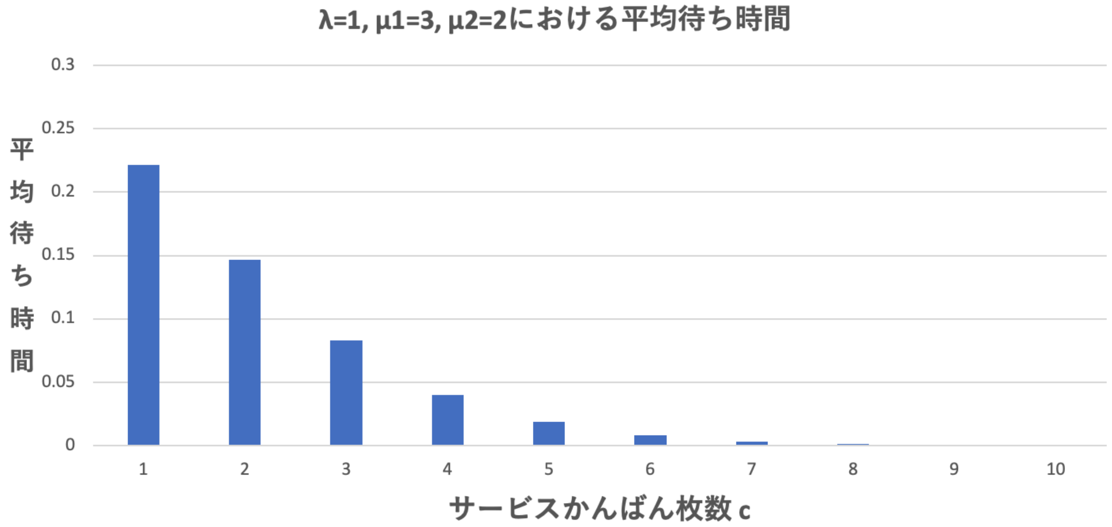

図 10: $\lambda = 1, \mu_1 = 3, \mu_2 = 2$ における平均待ち時間

また，$\lambda = 1, \mu_1 = 2, \mu_2 = 3$ として c の値を変動させた場合の平均待ち行列長，平均待ち時間の値について次の結果が得られた．

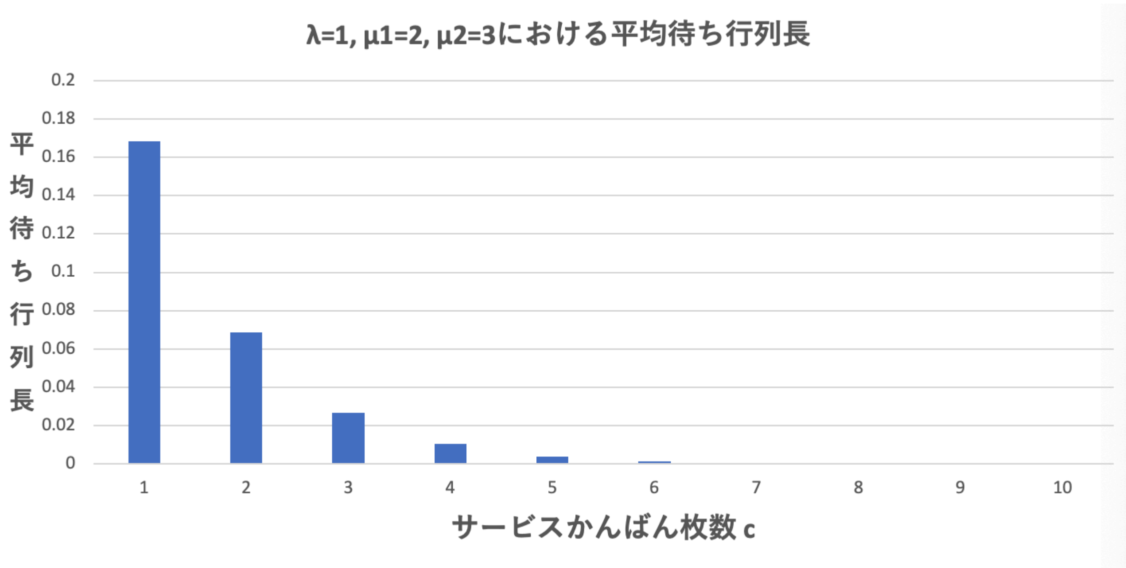

図 11: $\lambda = 1, \mu_1 = 2, \mu_2 = 3$ における平均待ち行列長

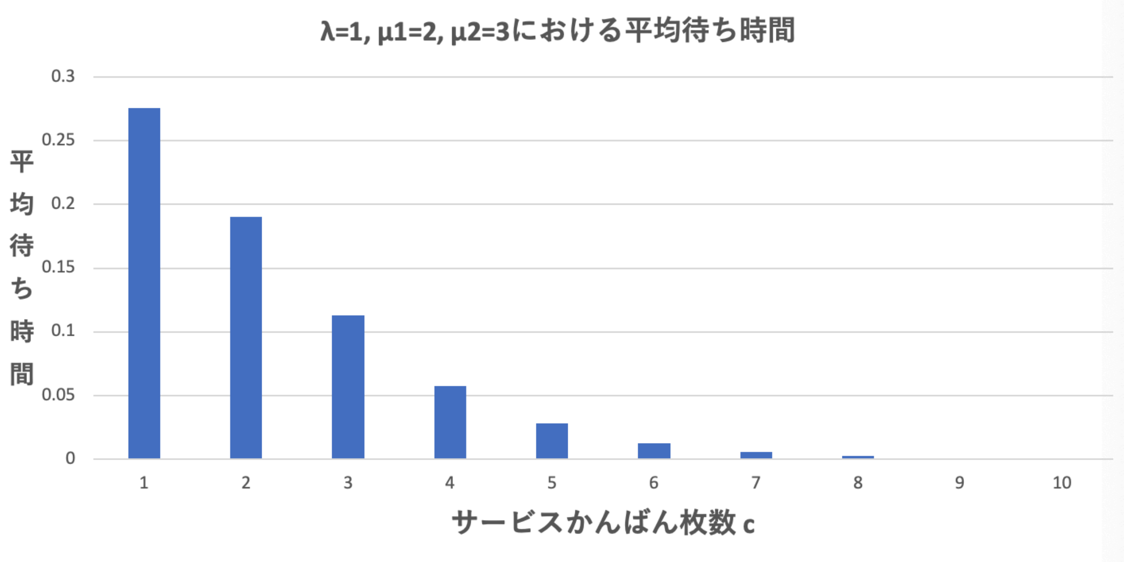

図 12: $\lambda = 1, \mu_1 = 2, \mu_2 = 3$ における平均待ち時間

以上より，平均待ち行列長，平均待ち時間ともには c の値が増加すれば単調に減少していくことが分かる．特に $\mu_1 > \mu_2$ である場合は $c = 1$ における値も $\mu_1 < \mu_2$ と比較して小さく，0 に近づけるために必要なサービスかんばんの枚数が少ない．

4 まとめ

- $\mu_1 + \mu_2$ が一定である場合に μ_1 と μ_2 を入れ替えると，$\mu_1 > \mu_2$ の場合で平均待ち行列長，平均待ち時間ともに小さい値をとる．
- サービスかんばんの枚数を増加させた場合，平均待ち行列長，平均待ち時間ともに 0 に向かって単調に減少する．
- 作業が早い工程と遅い工程の 2 種類がある場合は原料が常に供給される側の工程に遅い工程を配置し，常に動かし続けることで平均待ち行列長，平均待ち時間の減少につながっていると本研究の結果から推測される．

参考文献

[1] 宮沢政清,「待ち行列の数理とその応用」，牧野書店　(2013)

[2] 大野勝久,「JIT 生産システム」，日本オペレーションズ・リサーチ学会　(1998)

[3] 小島貢利・中島健一,「かんばん方式の数理」，日本オペレーションズ・リサーチ学会 (2002)

[4] 豊泉洋,「かんばん方式による在庫管理」，塩田茂雄・河西憲一・豊泉洋・会田雅樹「待ち行列理論の基礎と応用」共立出版，9 章　pp.151-157　(2014)