Bulletin of Aichi Univ. of Education, 63（Educational Sciences）, pp. 121 − 126, March, 2014

割合概念における認知的障害：等全体について

栗山 和広* 吉田 甫**

*学校教育講座（教育心理学）
**立命館大学文学部

Cognitive Obstacles in learning Ratio Concepts: Equal-Whole

Kazuhiro KURIYAMA* and Hajime YOSHIDA**

*Department of School Education (Educational Psychology), Aichi University of Education, Kariya 448-8542, Japan
**College of Letters, Ritsumeikan University, Kyoto City 603-8577, Japan

割合概念は，小学校の算数のなかで，子どもにとって理解することが最も困難な概念の1つである。割合概念は，小数，分数，比例といった有理数の下位概念の1つであり，中学校で学習する有理数へとつながっていく重要な概念である。しかし，これを理解しにくい概念と考えている小学生の子どもは多い。中学生になっても理解することが困難であり，高校生になっても正しく理解しているとはいえない生徒がいることは，さまざまな調査が指摘しているところである。

認知心理学的な視点から，有理数である小数，分数，比例といった概念に関しては，なぜ難しいのかといった研究が多くなされるようになっている。例えば，分数の大小関係の理解の困難性についての研究（Olive & Vomvoridi，2006；Smith，1995；吉田・栗山，1991；Yoshida & Kuriyama，1995）や，小数の大小間関係の理解についての研究（Hiebert & Carpenter，1992；栗山・吉田，2000；Resnick et al.，1989）や，比例についての研究（Singer & Resnick，1992）が行われるようになっている。

割合については，なぜ理解することが困難であるかについて，これまでにも多くの研究がなされている（Hart，1988；石田・神田，2008；中村，2008；Smart，1980；渡辺，2011）。しかし，そうした研究は，行動主義的な理論や実践的な考えや歴史的視点から検討したものであり，認知心理学の理論から検討されたものではなかった。

最近になり，認知心理学の視点から，割合概念について研究されてきている。そうした中の1つのアプローチとしては，子どものもつインフォーマルな知識に関する研究が見られるようになっている（栗山，2011；Lembke & Reys，1994；Numes & Bryant，1995；吉田・河野・横田，2000）。こうした研究は，公的な学習をする以前であっても，子どもは，割合の概念について，豊かなインフォーマルな知識を獲得していることを指摘している。例えば，栗山（2011）は，割合を学習する以前の小学4年生と5年生がもつインフォーマルな知識について検討している。課題としては，「％」についての直接経験の程度を調べる問題，分離量が与えられたときの割合の量を調べる問題，割引になった％を基に値段の大小比較ができるかについての問題が出題された。その結果，7割程度の子どもが日常生活の中での割合の基本的な意味を理解しており，さらに割合の量についても5割程度の子どもが量的な意味を理解していることが示唆された。また，公的に学習していないにも関わらず，割合の第2用法と呼ばれる計算問題を，インフォーマルに解決することができることが示された（栗山，2011；吉田・河野・横田，2000）。割合を公的に学習する以前から，子どもは割合の基本的な意味や量的な大きさについて理解していることが示唆される。

さらに，栗山（2007）は，割合概念を学習するなかで何が理解の障害になっているか，について検討した。割合は，割合，比べる量，基にする量の3要素から成立しており，割合＝比べる量÷基にする量として公式化されている。これが第1用法とよばれるものである。第2用法と第3用法はこれを変形して得られる。比べる量＝基にする量×割合が第2用法で，基にする量＝比べる量÷割合が第3用法である。栗山（2007）は，割合問題を提示し，問題の構成要素を同定する課題を行った。その結果，基にする量や比べる量を正しく同定できる子どもの割合は，第1用法で45％，第2用法で27％，第3用法で18％と低いことが示された。割合の文章問題では，問題から基にする量，比べる量，割合といった命題を正確に表象することが重要である。しかし，子どもはこうした最初の表象の段階でつまずいているのである。こうした割合の要素である基にする量，比べる量，割合を正確に同定できないことが，割合問題の解決の認知的障害の1つになっている。

こうしたアプローチの他に，Jitendra et al.（2009）やJitendra et al.（2011）は，問題スキーマの獲得をめざす指導（Schema Based Instruction: SBI）の有効性について検討している。SBIは，問題中の変数の関連性を示すスキーマ図による指導を行うもので，問題の構造をより意味的に直接的に理解させるものである。SBIで指導した7年生の事後テストは，従来のテキストで指導された生徒より，事後テストの成績の高いことが示された。しかし，彼らが行った事後テストの問題はTIMSから選ばれた問題であり，基本的な計算力といった手続き的知識についての問題であった。割合について，生活の中で応用できるような概念的知識について尋ねる問題ではなかった。そこでの問題点としては，SBIによる指導により割合の概念的理解が獲得されたかについては明確でない。

ところで，我が国で子どもの学力において課題となっているのは，計算といった技能的知識ではなく，概念の意味的な理解であることが指摘されている（平成24年度全国学力・学習状況調査）。また，国際的な学力調査であるPISA（2009）においても，我が国の子どもは，現実の生活の中で応用できるような能力の獲得が遅れていることが示唆されている。こうした問題への対応として，新しい概念の学習に際して生じる認知的障害への指導が必要であると考えられる。というのは，認知的障害を克服することにより，意味的な理解の深化が進むと考えられるからである。しかし，この認知的障害に関しては，筆者の知る限り，わが国のみならず海外でも，ほとんど研究されていないのが実情である。

そこで，本研究では，割合の認知的障害としての等全体について検討することが目的である。等全体については，Yoshida & Sawano（2002）は分数における等全体の認知的障害を見出している。それは，全体は全ての分数で等しいという原理を，子どもは理解することがかなり困難であるというものである。分数では，全体は1であり，どのような分数であっても分数の大きさは全て等しい。しかし，子どもは等全体の概念を理解することが極めて困難であることが，彼らにより指摘されている。また，等全体については，学習指導要領においても指導目標とはなっていないのが現状である。この概念が習得されていないために，分数の学習においていろいろな困難を引き起こしている。こうした等全体の認知的障害は，分数に限定されるものではなく，割合においても同じことが考えられる。

本研究では，割合における等全体の認知的障害について検討するとともに，等全体の問題と割合の文章問題との関連についても検討する。こうした関連性の検討により，子どもは割合の意味について深く理解しているかについて検討できると考えられる。

方　法

対象者

愛知県内の公立小学校6年生78名が対象者である。彼らは，割合の単元について10ヶ月前に学習を終えている。

材料

用いられた問題は，以下のようであった。(1) 3用法の問題3問：第1用法，第2用法，第3用法の問題が，各用法ごとにそれぞれ1問出題された。(2) 等全体についての問題1問。(3) 割合の値引きに関する問題が1問。

(1) 3用法の問題：

第1用法：「ちなつさんのクラスは35人で，このうちの7人が宿題をやっていません。宿題をやっていない人は，クラス全体の何人でしょう。」

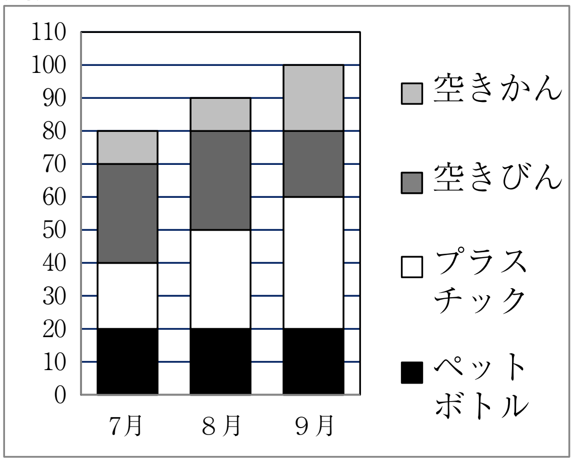
第2用法：「ただし君のクラスは40人です。このうち8月生まれのひとは，クラスの15％です。8月生まれの人は何人でしょう。」

第3用法「みさきさんの家には，花壇があります。花壇の面積は6㎡です。これは庭全体の30％になります。庭全体の面積は何㎡でしょう。」

(2) 等全体の問題（平成21年度全国学力テスト小学校算数Bより作成）

つばさん君の学校では，リサイクル活動を行っています。つばさくんたちは，7月，8月，9月のリサイクル活動で集めたものの重さを，下のようにグラフにまとめました。以下の問題に答えましょう。

(kg)リサイクル活動で集めたものの月ごとの重さ



①7月にあつめたペットボトルの重さは，約何kgですか。

②7月の全体の重さをもとにしたペットボトルの重さの割合と，9月の全体の重さをもとにしたペットボトルの重さの割合を比べると，どのようなことがいえるでしょうか。1から3までの中から正しいものを1つ選んで，その番号を（　　）に書きましょう。また，そ

の番号を選んだわけを書きましょう。

1　ペットボトルの重さの割合は，7月の方が大きい。

2　ペットボトルの重さの割合は，7月と9月で同じ。

3　ペットボトルの重さの割合は，9月の方が大きい。

(3) 割合の値引きに関する問題（平成22年度全国学力テスト小学校算数Ｂより作成）

まさるくんは，定価2300円のシャツ，定価3900円のズボン，5800円のくつを1品ずつ買います。まさる君は，「1品に限り，定価の20％引き」と書かれてある割引券を1枚もっています。シャツ，ズボン，くつのうち，どれに割引券をつかうと，値引きされる金額が大きくなりますか。答えのところにその品物の名前をかきましょう。また，値引きされる金額が一番大きくなると考えたわけを書きましょう。

手続き

問題は一斉テストの形式で，1月の授業時間中に実施された。各学級担任が，用紙を配布して学校のテストではなく，単なる調査問題なので，緊張しないで答えるようにと話した後に解答を求めた。解答時間は20分であった。

結　果

1. 3用法の正答率

割合の3用法ごとの正答率をFigure 1に示した。第2用法の正答率が最も高く，次に第1用法で，第3用法が最も低かった。いずれの用法も60％を超えており，3用法の計算問題といった手続き的知識に関しては，6年生になると多くの子どもがある程度は理解しているといえるであろう。

2. 等全体の問題

等全体の正答率は28％であった。7割以上の子どもが，等全体の概念的知識を獲得していないということは極めて深刻な問題であるといえよう。

それでは，等全体の問題を誤答した子どもはどのような誤り方略をもっているのであろうか。誤り方略を分析したところ3つの誤り方略が見られた。部分の重さ方略と全体の重さ方略と未記入方略であった。部分の重さ方略とは，例えば，7月と9月のペットボトルの重さがそれぞれ20kgでどちらも同じである，という方略である。全体重さ方略は，例えば，7月は80kgで9月は100kgであるから9月が重い，という方略である。未記入方略は，何も記入していないもので，これも何かの意味があるとして方略とした。Figure 2に，全問題に占める，それぞれの誤り方略の頻度についての割合を示す利用率について示した。部分の重さ方略が38％と最も多く見られた。全体の重さ方略は5％みられた。これは，部分か全体の重さだけで割合をとらえていることを意味している。

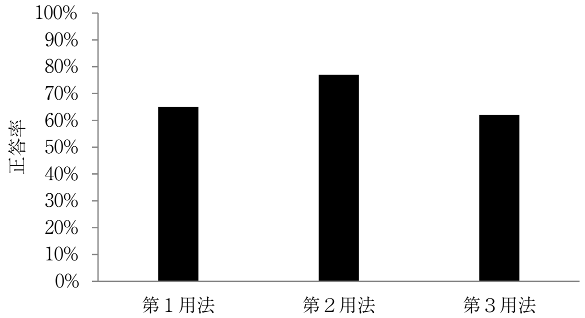


Figure 1　割合の用法毎の正答率

次に，等全体に正答した子どもは，どのような方略で問題を解決したかについて分析した。正答した子どもの方略は，計算方略と推論方略が見られた。計算方略とは，7月と9月の％を計算してその値を比較する方略である。推論方略とは，7月と9月では重さは同じでも，全体の重さが違っており，全体の重さが大きいと割合が小さくなるから7月が大きい，という方略である。Figure 3に，正答に占めるそれぞれの方略の頻度についての割合を示した。Figure 3から見られるように，計算方略の利用率が推論方略よりも多い。

3. 値引き問題

割引券を使って値引きされる金額が大きい品物を選ぶ課題である。値引きについての割合の問題を正しく

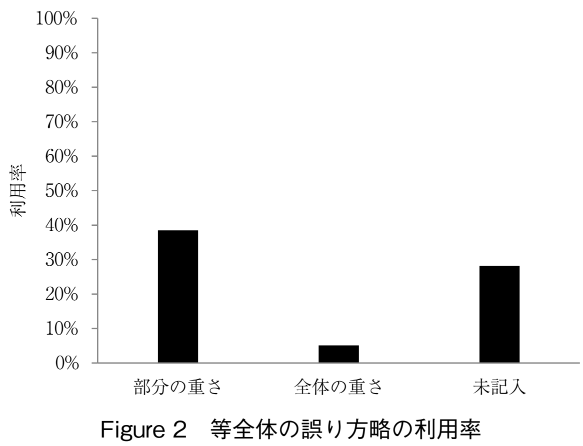


Figure 2　等全体の誤り方略の利用率

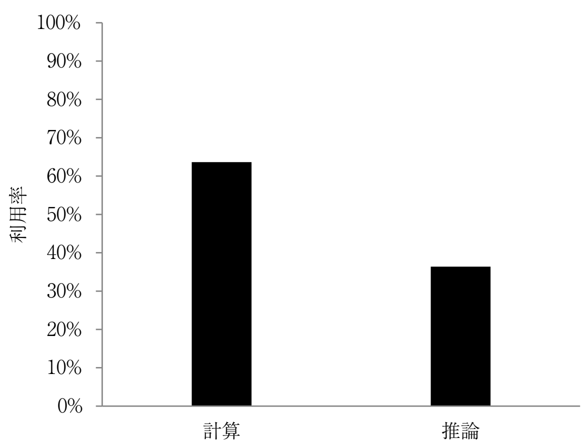


Figure 3　等全体の正答者の方略

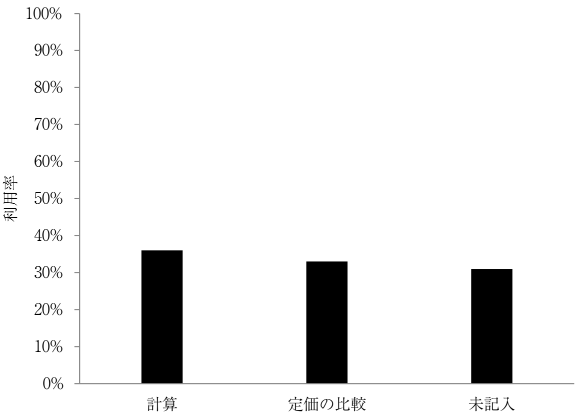


Figure 4　値引き問題の誤り方略

解いた子どもは68％であった。この問題の正答率からすると，ある程度の子どもが割合を日常生活で使える概念的知識を獲得しているように考えられる。

次に，値引き問題でどのような方略を用いて解決したかについて，全問題に占めるそれぞれの方略の頻度の割合である利用率を，Figure 4に示した。方略には，計算方略と定価の比較方略と未記入方略が見られた。計算方略とは，例えば，2300 × 0.2 = 460，3900 × 0.2 = 780，5800 × 0.2 = 1160で，割引金額が大きいのはくつです，と答える方略。定価の比較方略は，例えば，定価の値段が高いほど値引きになる値段が大きくなる，という方略。未記入方略は，何も記入していないもので，これも何かの意味があるとして方略とした。Figure 4から見られるように，計算方略と定価の比較方略の利用率に違いは見られない。

ところで，値引き問題では，7割の子どもが正答しているにも関わらず，等全体では，7割以上の子どもが誤答している。そこで，値引き問題で正答した子どもが真に割合概念を理解しているかという疑問が生じる。そこで，値引き問題で正答した子どもが，等全体でも正答しているかについてパターンごとに分析した。その結果が，Table 1に示されている。Table 1から見られるように，値引き問題で正答して等全体問題でも正答しているパターンの子どもは22人である。このパターンの子どもは，割合概念についての概念的知識を獲得していると考えられる。しかし，値引き問題で正答しても，等全体で誤りや未記入を示した子どもは31人も見られる。このパターンの子どもは，割合概念を理解しているようにみえるが，等全体については理解していないことから，見せかけの正答といえよう。

Table 1　値引き問題と等全体のパターンごとの人数

値引き	○	○	○	?
等全体	○	×	?	?
人数	22人	29人	2人	25人

考　察

本研究は，割合概念の認知的障害の中でも，等全体の認知的障害について検討することが目的であった。さらに，等全体の認知的障害と，割合の3用法の問題や割合値引き問題との関連についても検討した。

最初に，割合の3用法の問題の正答率について考察する。第1用法が65％，第2用法が77％，第3用法が63％と，子どもはある程度理解していることが示された。第2用法については，8割近い子どもが正答している。割合の3用法について，授業のドリル学習のなかで「もくわ」の指導が行われていた。「もくわ」とは，「も」が基にする量，「く」が比べる量，「わ」が割合と，図で公式を説明する方法であり，教師により使われる指導方法である。さらに，1クラスを2つに分けて，2人の先生が指導するという加配授業が行われていた。こうしたことが，割合の3用法についての正答率を高めるのに効果があったと考えられる。6年生の3学期になると，手続き的知識については，6割程度の子どもが理解していると考えられる。

次に，割合概念における認知的障害としての等全体について考察する。正答率はわずかに28％と驚くほど低かった。割合で比較すべき2つか3つの全体は全て等しいという等全体は，最も基本的な概念である。大人にとっては，当然の概念であると考えられている。しかしながら，子どもは全くといっていいほど等全体について獲得していないのである。このことは，大変に驚くべきことである。この等全体の理解の困難さが，割合概念の理解を妨害している認知的障害の要因の1つであると考えられる。

また，等全体の誤り分析から，子どもは割合を部分か全体としてだけとらえており，それも整数的知識で考えていることが見出された。Figure 2の誤り方略の分析から，部分重さ方略と全体重さ方略を用いている子どもを合計すると，43％もみられた。割合概念は，基本的には部分が全体に占める程度である。4割の子どもが，割合概念を部分か全体のどちらかかだけで理解している。それも，整数的知識でとらえてようとしていると考えられる。吉田・栗山（1991）は，分数概念の習得過程において，整数系の知識を用いて，分数の大小判断をする子どもが2割程度いること見出している。このことから考えると，割合概念においても，整数系の知識から脱却できていないことを示唆するものであろう。

次に，等全体に正答した子どもが用いた計算方略と推論方略について考えてみる。Chi et al（1982）は，物理の問題解決において，初心者と熟達者の問題スキーマを分析している。そこでは，初心者の問題スキーマは表面的な特徴で分類されていた。一方，熟達者の問題スキーマは意味や構造で分類されており，推論を

行っていることが示された。このことからすると，計算的方略は初心者の方略であり，推論方略は熟達者の方略であると考えられる。大人であれば，等全体の問題を解くのに計算することなく，全体は等しくなければならないと考えて推論して解決することができる。等全体の問題を正答した子どもには，計算方略が推論方略の約2倍近くみられた。このことは，初心者の問題スキーマで割合概念をとらえている子どもの多いことが考えられる。

ところで，値引き問題という日常生活でしばしば使われる課題について検討したところ，7割程度の子どもが正答した。このことから，子どもは割合の概念的知識を獲得しているように思われた。しかし，この問題は，値引きされる金額が大きいものを選ぶ問題であり，定価が大きい品物を選べば正答になるものであった。そのため，割合概念の知識を獲得していなくても，定価の大きいものを選択しても正答したことが考えられる。定価の価格という整数の知識だけで十分に解決することができたと考えられる。そのことが，Table 1から示唆される。値引き問題では，正答しているにも関わらず，等全体問題では，誤答した子どもが4割もいたのである。このことから，一見して理解しているように見えても，それは表面的な見せかけの理解であり，割合概念の概念的知識を獲得していないことが示唆される。

本研究の結果から，手続き的知識としての割合の3用法については，ある程度理解していることが示された。しかし，割合の概念的知識の中でも，等全体については，ほとんどの子どもが理解していないことが明らかになった。等全体の理解の困難さが，割合概念の理解を妨害しており，認知的障害の大きな要因になっていることが示唆される。これまでの割合概念の理解の困難さについては，栗山(2007)が，割合の公式で用いられる用語としての比べる量や基にする量の同定が極めて困難であることを指摘している。本研究では，新たに割合の認知的障害として，等全体の理解の困難さが明らかにされた。

それでは，割合概念の認知的障害を克服するための指導としては，どのようなことが考えられるのであろうか。そうした対応としては，「教科の論理」に基づく指導ではなく，「子どもの論理」に基づく指導へ移行することが大きな効果をもつと考えられる。「教科の論理」に基づく指導とは，算数や数学の巨大な論理体系を，子どもが分かりやすいように短くまとめた内容で構成されたカリキュラムによる指導である。それに対して，「子どもの論理」に基づく指導とは，子どもがインフォーマルに獲得している知識や，新しい概念を学習する際に生じる認知的障害を考慮して，それを組み込んだ新しいカリキュラム構成を行い，指導することである。Yoshida & Sawano (2002) は，分数概念において，「子どもの論理」に基づく教授介入を行い，分数の概念的知識を獲得することの効果を明らかにしている。また，栗山（2013）は，割合のインフォーマルな知識と割合の構成要素の同定を組み込んだカリキュラム構成に基づく教授介入により，割合の概念的知識を獲得させることを示している。こうしたことから，本研究で明らかにされた等全体の認知的障害を，積極的に組み込んだ新しいカリキュラム構成について検討することは，大きく割合の概念的知識を獲得させると考えられる。

さらに，今後の課題としては，割合概念の認知的障害だけでなく，比例や比率など，他の多くの概念の認知的障害について検討することは，子どもの概念的理解を深化させるためには重要である。

付記

本研究は，平成22～24年度科学教育研究費補助金，基盤（C）（課題番号22530699）の補助を受けて行われた。

引用文献

Chi, M. T. H., Glasser R., & Rees, E. (1982). Expertise in problem solving. In R. J. Sternberg (Ed.), *Advances in the psychology of human intelligence.* (Vol. 1, pp. 7–75). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Hart, K. (1988). Ratio and proportion. In J. Hiebert & M. J. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle graders* (pp. 198–219). Hillsdale, NJ: Lawrence.

Hiebert, J. & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65–97). New York. Macmillan.

石田淳一・神田恵子（2008）．5学年「割合」単元における関係図や線分図をかいたり，よんだりする指導に関する研究，科学教育研究，**32**（**3**），153-163.

Jitendra, A. K., Star, J., Starosta, K., Leh, J., Sood, S., Caskie, G., Hughes, C., & Mack, T. (2009). Improving students’ learning of ratio and proportion problem solving: The role of schema-based instruction. *Contemporary Educational Psychology,* **34(3)**. 250–264.

Jitendra, A. K., Star, J. R., & Rodriguez, M., Lindell, M. & Someki, F. (2011). Improving students' proportional thinking using schema-based instruction. *Learning and Instruction,* **21**, 731–745.

栗山和広・吉田甫（2000）．小数概念の習得過程に関する発達的研究，九州保健福祉大学研究紀要，**1**，75-83.

栗山和広（2011）．割合の学習以前に子どもがもつインフォーマルな知識，愛知教育大学研究報告，**61**，83-88.

栗山和広・吉田甫（2007）．割合概念における構成要素の同定，九州保健福祉大学研究紀要，8，9-14.

栗山和広（2013）．科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

国立教育政策研究所（2009）．平成21年度全国学力・学習状況・調査問題

国立教育政策研究所（2010）．平成22年度全国学力・学習状況・

調査問題
Lembke, L. O. & Reys, B. J. (1994). The development and interaction between intuitive and school-taught ideas about percent. *Journal for Research in Mathematics Education,* **25**, 237–259.
中村亨史（2008）．割合概念の理解における児童の思考の様相：ノート記述の分析をとおして　日本数学教育学会誌，**90**（**4**），2-10.
Numes, T., & Bryant, P. (1995). *Children doing mathematics.* Blackwell: London.
PISA（2006）．国立教育調査研究所
Olive, J., & Vomvoridi, E. (2006). Making sense of instruction on fractions when a student lacks necessary fractional schemes: The case of Tim. *Journal of Mathematical Behavior,* **25**, 18–45.
Resnick, L.B., Nesher, P., Leonard, F., Magone, M., Omanson, S., & Peled, I. (1989). Conceptual bases of arithmetic errors: The case for decimal fractions. *Journal for Research in Mathematics Education,* **20(1)**, 8–27.
Singer, J., & Resnick, L. (1992). Representations of proportional relationships: Are children part-part or part-whole reasoners? *Educational studies in Mathematics,* **23**, 231–246.
Smart, J. R. (1980). The teaching of percent problems. *School Science and Mathematics,* **80**, 187–192.
Smith, J. P. (1995). Competent reasoning with rational numbers. *Cognition & Instruction,* **13**, 3–50.
渡辺敏（2011）．児童が潜在的に持っている割合の見方を生かした導入についての研究，日本数学教育学会誌，**93**（**2**），11-21.
吉田甫・栗山和広（1991）．数概念の習得過程に関する発達的研究 教育心理学研究，**39**，382-391.
吉田甫・河野康男・横田浩（2000）．割合概念の解決におけるインフォーマルな知識の利用と解決方略の分析，宮崎大学教育文化学部紀要，**2**，123-133.
Yoshida, H. & Kuriyama, K. (1995). Linking meaning of symbols of fractions to problem situations. *Japanese Psychological Research,* **37**, 229–239.
Yoshida, H. & Sawano, K. (2002). Overcoming cognitive obstacles in learning fractions: Equal partitioning and equal-whole. *Japanese Psychological Reasearch,* **44**, 183–195.

（2013年9月19日受理）