Bulletin of Aichi Univ. of Education, 62 (Educational Sciences), pp. 99 − 104, March, 2013

子どもの思考を基にした教授介入：割合概念について

栗山 和広* 吉田 甫**

*学校教育講座（教育心理学）
**立命館大学文学部

Instructional Intervention Based on Children's Thought: The Case of Ratio Concepts

Kazuhiro KURIYAMA* and Hajime YOSHIDA**

*Department of School Education (Educational Psychology), Aichi University of Education, Kariya 448-8542, Japan
**College of Letters, Ritsumeikan University, Kyoto City 603-8577, Japan

最近の数理解に関する認知心理学の研究から，子どもは日常生活をとおしてさまざまな知識を獲得していることが明らかにされつつある（Fuson，1988；Mack，1990；Mack，1993）。こうした知識は，子どもの数の思考や理解において重要な働きをしていることが指摘されている（Leinhardt，1988）。本研究は，日常生活で獲得されている子どもの思考を基にしたカリキュラム開発と教授介入が，子どもの数理解において有効であるかどうかについて検討することにある。

これまでの算数･数学教育におけるカリキュラムは，教科がもつ論理構造からの構成に基づいている。そこには，子どもの知識や思考を基にした「子どもの論理」という視点からのカリキュラム構成による教授介入については，全くといっていいほど検討されていない。「教科の論理」に基づくカリキュラムからの教授で子どもが十分に理解できれば問題はないが，実際はそうなっていない。文部科学省（2006）は，算数・数学についての知識・技術を実際の場面で活用する力に問題があることを指摘している。本研究は，こうした現状について，現在の算数・数学のカリキュラムが教科のもつ論理構造の点から構成されているところに問題があると考える。そこで，新しいカリキュラムを構成する際に，子どもの知識や思考を基にした子どもの論理を取り入れたカリキュラム構成からの教授介入について検討する。

最近，子どもの論理を組み込んだカリキュラム構成からの教授介入が検討されている（Hiebert & Wearne，1996：Moss & Case，1999）。しかし，Moss & Case（1999）の研究では，子どものインフォーマルな知識がどのようなものかについては，ほとんど検討されていない。また，Hiebert & Wearne（1996）の研究では，比較のための統制群が設定されていない。こうした問題点を修正して、子どもの思考を基にしたカリキュラム構成による教授介入を検討することは必要である。

本研究では，子どもの数概念のなかでも有理数としての割合概念について検討する。割合は，小学校の算数の学習において，子どもが理解することの最も困難な概念の一つである（Kiren，1988）。割合がなぜ理解することが困難であるかについては，これまでにも多くの研究が行われている（Hart，1988；Smart，1980；石田・神田，2008；中村，2008；渡辺，2011）。しかし，そうした研究では，行動主義的な理論や実践的な考えを基にしており，認知心理学の理論から検討されたものではない。

最近，認知心理学のアプローチから，割合概念について子どものもつ思考やインフォーマルな知識に関する研究が見られるようになっている（栗山，2011；Lembke & Reys，1994；Numes & Bryant，1995；吉田・河野・横田，2000）。こうした研究は，公的な学習をする以前であっても，子どもは割合の概念について，豊かなインフォーマルな知識を獲得していることを指摘している。例えば，子どもは割合の基本的な意味や量的な大きさについて理解している（栗山，2011；吉田・河野・横田，2000；Lembke & Reys，1994）。また，公的に学習していないにも関わらず，割合の第2用法と呼ばれる計算問題をインフォーマルに解決することができる（栗山，2011；吉田・河野・横田，2000）。こうして，子どもは公的に学習する前から豊かな知識をもっていることは，カリキュラム構成に重要な示唆をあたえるものである。

また，新しい学習にさいして生じる認知的障害に関して，割合の認知的構成要素である基にする量，比べる量，割合を正確に同定できないことが示されている（栗山，2005）。こうした基にする量や比べる量といった用語が，子どもの思考と全くあっていないことが，

割合の認知的障害となっていることが示唆される。

本研究では，先述した認知心理学から明らかにされた結果に基づいて，以下の3つの枠組みで新しいカリキュラムを構成し，それを基にした教授介入について検討する。第1に，子どもがインフォーマルに獲得している割合の量的な概念を強調する。従来のカリキュラムでは，記号としての割合概念と計算に重点がおかれており，量としての割合概念にほとんど関心がもたれていない。そこで，割合の意味と量を記号に関連させていく。そのために，割合の大きさを視覚的に捉えることを可能にする新たな教材として，視覚的モデルを導入する。こうしたことにより，割合の記号の背景にある概念的知識が獲得され，割合の意味的な理解が促進されると考えられる。第2に，割合の公式の3用法のなかで，第2用法を最初に指導する。従来のカリキュラムでは，第1用法を最初に導入し，次にその変形として第2用法と第3用法が指導される。新しいカリキュラムでは，子どもがインフォーマルにある程度は獲得している第2用法を基にして割合概念を理解させる。その後，第1用法，第3用法を指導する。子どもがインフォーマルに獲得している概念から学習することにより，第1用法と第3用法の割合の問題解決が促進されると考えられる。第3に，割合の構成要素としての同定が困難な基にする量や比べる量でなく，既有知識として理解している部分と全体という点から指導する。部分と全体という点から指導することにより，割合の構成要素の同定が容易になり，割合の意味的な理解が促進されると予想される。

本研究では，こうした3つの枠組みに基づいたカリキュラムで構成され指導された群を新カリキュラム群，教科書に基づいて指導された群をテキスト群とした。仮説として，新カリキュラム群がテキスト群より，割合概念の理解が促進されるであろうということについて検討する。

方　法

参加者

中規模の都市の公立小学校の5年生63名が参加した。新カリキュラム群に1クラス34名，テキスト群に1クラス29名が参加した。新カリキュラム群の教師は30歳代半ばの女性教師であり，テキスト群の教師は40歳代前半と60歳前半の男性教師の2人であった。テキスト群は，担任教師と加配の教師が2名で授業を行ったため，1クラスの子どもを半分に分けて指導した。3名の教師とも，教育への情熱は強く，教師としての資質に基本的な差はないと考えられる。

授業

(1) テキスト群

テキスト群は，教師は教科書にしたがって指導した。5年生の割合単元（啓林館）は，合計で14時間である。その構成は，最初に差による比較と倍による比較を通して割合の学習に関心をもたせる。次の3時間で，割合の意味を導入し割合を求める問題の理解を深める。次の1時間で，％の意味と％と小数倍との関係について理解する。その後の2時間で％を使った割合の3用法の問題を解決する。その後1時間で練習問題，続いて割合のグラフが2時間，割合の応用問題が2時間，さらにたしかめと復習が2時間指導されるという単元構成である。

第1時は，割合の意味について，小数倍を基にして教えられた。パン作りの定員が20人で，希望者が45人いるとき，パン作りの希望者は定員の何倍ですかについて指導された。割合は，ある量を基にして，比べる量が基にする量の何倍であるかを表したものであることが，帯図と線分図を用いて指導された。第2時は，割合の第1用法が小数倍として教えられた。問題は，みきさんの学校の工芸体験を選んだ75人のうち，そめ物教室の希望者は45人，エッグアートの教室の希望者は20人でした。それぞれの教室の希望者は何倍かを求めるものであった。問題のどの数が比べる量で，どの数が基にする量であるかを説明した後，公式に代入することで割合が求められることを説明した後，練習問題を行った。第3時は，基にする量と割合を知って，比べる量を求めることができる第2用法について指導された。第4時は，比べる量を使って基にする量を求めることができる第3用法が指導された。第3時，第4時とも，問題を示して公式に当てはめて解決することが指導された。使われた教材は，線分図や関係図であった。第5時は，百分率の意味と小数倍の関係について指導された。小数を百分率に，またその逆にする課題について指導された。第6時は，第1用法と第2用法が百分率を使って指導された。第7時は，割合に関する作問を通して，百分率，比べる量，基にする量についての理解を深めるという指導がされた。小数倍では，3用法が3時間で教えられたが，百分率では3用法が2時間で指導された。第8時は，復習であった。第9時と第10時は，割合のグラフの意味を理解し，グラフを読むことができることが指導された。第11時から第13時までは，割合を使った応用問題が教えられた。第14時は，復習であった。

(2) 新カリキュラム群

新カリキュラム群は，第7時までが新しいカリキュラムで構成されていた。第8時から第14時は，新カリキュラム群も指導書に従って指導されており同じであった。新カリキュラム群で新しく構成された点は，量的な概念の強調，指導系列，割合の構成要素として

部分と全体からの指導の3点である。

子どもの量的な概念を強調するために，割合モデルと名づけた教材を利用して，割合を心的に表象させる指導をおこなった。割合モデルの図では，外側が基にする量で，内側が比べる量を示している。この図では，量としての割合の大きさに応じて内側の図を長くしたり短くすることにより，割合が100％以下でも100％以上でも関係なく表すことができる。比べる量がどのように変化しても，基にする量と比べる量の関係から，子どもは割合に対するおよその見積もりを獲得することができる。割合の大きさを視覚的に捉えることができることにより，心的な表象が獲得できる。

指導の系列は，テキスト群では第1用法，第2用法，第3用法と指導された。新カリキュラム群では，子どもがインフォーマルに既に獲得している第2用法を最初に指導し，次に第1用法，第3用法が教えられた。

第1時は，％を割合モデルの図を用いて表現できることを指導した。そこでは，基にする量と比べる量と割合を，部分と全体という点から指導した。割合を小数倍としてではなく，％として指導した。第2時は，2つの量のどちらを基にした場合でも，残りが比べる量となって割合を示すことができることを，割合モデルから指導した。ここでは，100％以上の％を割合モデルで表すことができることを指導した。第3時は，問題を割合モデルに表して，量としての割合の大きさを見積もり，さらに割合の大きさ比較ができることを指導した。最初の3時間では，割合の公式は全く指導されなかった。割合の意味および量としての割合の大きさが割合モデルを基にして教えられた。

第4時は，割合モデルの図を用いて，％と小数倍との関係について指導された。小数倍については，この時間に初めて教えられた。

第5時は，基にする量と割合を知って比べる量を求める第2用法が指導された。第2用法の公式が教えられ，公式を用いて問題を解く方法が指導された。問題を解いた後，割合モデルを用いて答えが適切であるかを確認できることも教えられた。第6時は，基にする量と比べる量を知って割合を求める第1用法が指導された。公式を用いて問題を解くこと，割合モデルを用いて答えの確認ができることが教えられた。第7時は，比べる量と割合を知って基にする量を求める第3用法が指導された。ここでも，公式による問題解決と割合モデルによる答えの適切性について教えられた。第5時から第7時までは，公式による問題解決と割合モデルの利用による適切性の判断が指導された。第8時は，復習であった。

手続き

(1) 事前テスト

事前テストは，子どもが割合概念を公的に学習する前に獲得しているインフォーマルな知識や思考について，分析することであった。割合の単元開始2ヶ月前に一斉に行われた。事前テストは，割合の意味表象の問題，量的表象問題，第2用法の3種類であった。意味表象の問題は，値引きによる値段の比較（30％と20％のどちらが安いか），全体として1の概念，部分と全体の関係，の3問であった。量的表象の問題では，円の全体の50％，25％，75％，90％に斜線が引かれていてその大きさを表現させる問題であった。第2用法に関する問題では，30人乗りのバスで50％の人数は何人ですか，20人乗りのバスで25％の人数は何人ですか，40人乗りのバスで75％の人数は何人ですか，の3問であった。

(2) 事後テスト

4種類のテストが，単元の学習終了後1週間以内に一斉テストとして実施された。(1) 3用法の問題3問：第1用法，第2用法，第3用法の問題が各用法ごとにそれぞれ1問出題された（例：ちなつさんのクラスは35人で，このうちの7人が宿題をやっていません。宿題をやっていない人は，クラス全体の何％でしょう。）。(2) 変換問題4問：小数を百分率へ，また百分率を小数へ変換する問題（例：7％を小数倍であらわすと）。(3) 関係課題2問：つばさ君の身長は，まさし君の身長の130％です。しんじ君の身長は，まさし君の身長の80％です。身長の高い順に並べましょう。(4) 作図問題1問：A市の今年の人口は，20年前の人口の120％になっています。20年前の人口を下の図のように□で表すと，今年の人口はおよそどのように表せるでしょうか。

結　果

1. 事前テスト

割合の意味表象に関するテストでは，新カリキュラム群の正答率は90％，テキスト群は92％であった。量的表象の問題では，新カリキュラム群の正答率は76％，テキスト群は80％であった。第2用法のテストでは，新カリキュラム群の正答率は60％，テキスト群は55％であった。いずれの課題でも，2群間に統計的な差はみられなかった。割合を学習する以前の子どもの知識について，新カリキュラム群とテキスト群に差はないといえる。

2. 事後テスト

(1) 割合の3用法

割合の3用法ごとの正答率と3問全体の正答率をFigure 1に示した。3問全体の正答率について，新カ

リキュラム群とテキスト群の2群間に統計的な差はみられなかった（$t(61)=0.16$，*n.s.*）。

答案用紙には，子どもが問題を解くさいに用いた方略を消さないように指示した。答案用紙から子どもの方略を分析した。子どもが用いた方略には，①計算そのものを書いた方略（計算方略），②図を描いて答えの大きさを推定している方略，答えの大きさを推定して解決すべき計算をしている方略（見積もり方略），③何も記入していない未記入などがあった。Figure 2に，問題ごとに計算，見積もり，未記入のどの方略を用いたかの頻度を求めて，全問題中に占める割合を示した。最も多く用いられた方略は，計算方略であった。テキスト群が新カリキュラム群より多くの計算方略を用いており，統計的に有意であった（$t(61)=4.19$，$p<.01$）。見積もり方略では，新カリキュラム群がテキスト群より多くの見積もり方略を用いており，統計的に有意であった（$t(61)=2.63$，$p<.05$）。未記入においては，統計的な差は見られなかった。

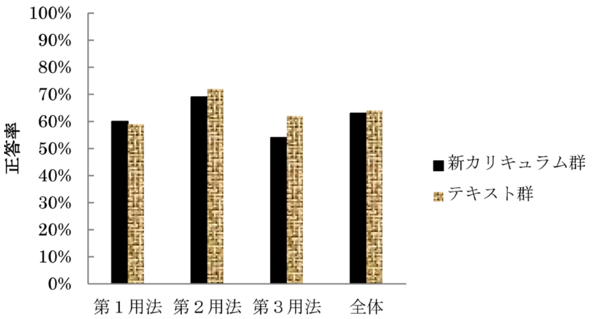

Figure 1　割合の用法毎と全体の正答率

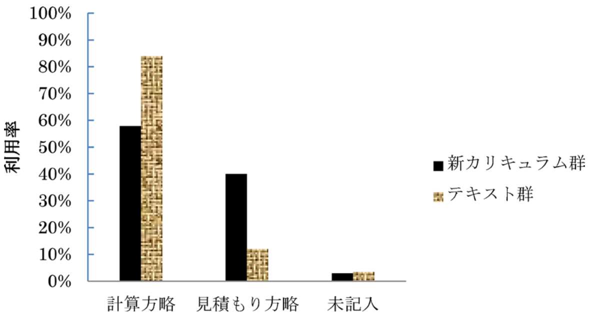

Figure 2　問題解決で用いた方略の利用率

(2) 関係課題

新カリキュラム群とテキスト群の2問全体の正答率の平均をFigure 3に示した。新カリキュラム群は，テキスト群に比べて高い正答率を示しており，統計的に有意であった（$t(61)=2.45$，$p<.05$）。

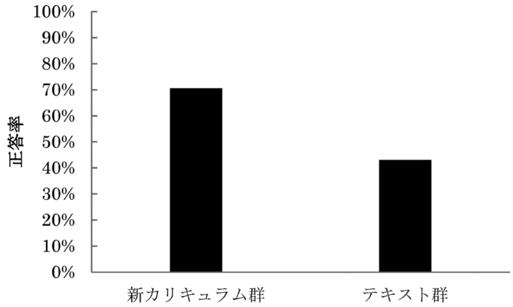

Figure 3　関係課題の正答率

(3) 作図課題

正しく作図できた子どもの正答率をFigure 4に示した。新カリキュラム群の正答率は，テキスト群より2.4倍も高いという結果が得られた。次に，正しく作図できなかった子どもの誤りについて分析した。誤りには，計算で書いている誤り（例:　×1.2=），不適切な図を書いている誤り（例：比べる量と基にする量が逆になっている），問題文中の表現をそのまま書いている誤り（例:わり算，かけ算，20年前の120％，120％の増量），未記入などの誤り方略が見られた。Figure 5に，誤答した問題についてだけ，問題ごとにどの誤り方略を用いたかの頻度を求めて，誤答した全問題中の割合を示した。新カリキュラム群では，不適切な作図の誤りが多く見られたが，テキスト群では，問題文中の表現をそのまま書いているだけの誤りが多く見られた。

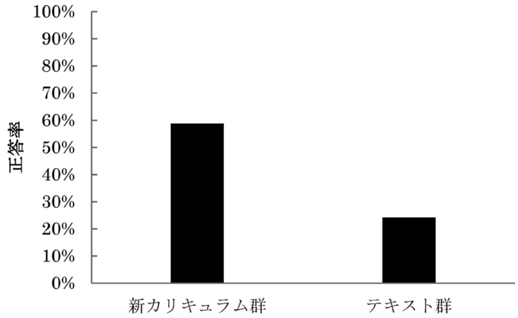

Figure 4　作図課題

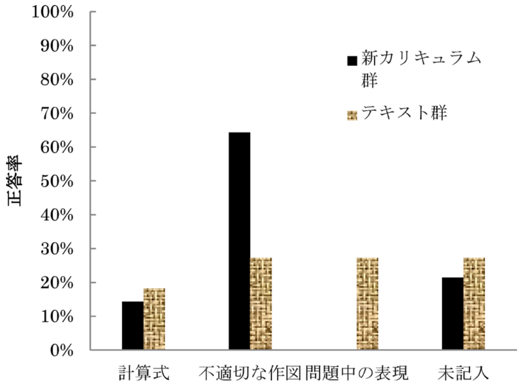

Figure 5　作図課題で利用した方略の割合

(4) 変換課題

新カリキュラム群とテキスト群の4問全体の正答率の平均をFigure 6に示した。Figure 6からも明らかなように，新カリキュラム群は87％，テキスト群は90％と高い正答率を示しており，両群間において統計的な差はみられなかった（$t(61)=0.60$，*n.s.*）。

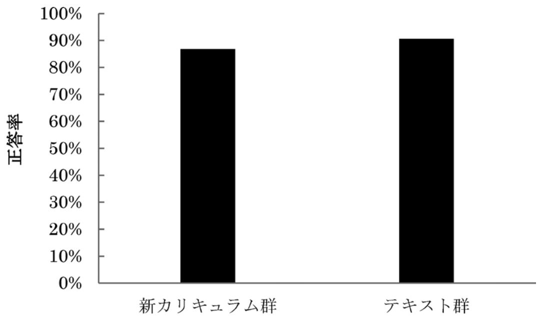

Figure 6　変換課題における正答率

考　察

これまでの割合に関する指導は，教科の論理に基づいたカリキュラムに基づいており，公式を最初に学習し，公式を用いて問題を解決するという指導がとられていた。そこでは，割合の意味的な理解に用いる時間は少なく，ドリル学習を主にした指導であった。本研究では，インフォーマルに獲得している量的な概念を強調し，割合の意味や量としての大きさを主に指導するという概念的な指導を行った。本研究の目的は，こうした子どもの思考を基にしたカリキュラムを構成し，そこでの教授介入の効果を検討することであった。

3用法の正答率について，テキスト群と新カリキュラム群において差はみられなかった。テキスト群は，3用法について，計7時間にわたり公式を問題に適用するという指導を行った。しかし，新カリキュラム群では，テキスト群より3時間も少ない時間で指導した。こうした3用法についての指導時間が，テキスト群では新カリキュラム群より多いことから，テキスト群は有利になることが考えられた。さらに，テキスト群は教員加配により1クラスを2つの集団に分けて2名の教員で授業を行った。新カリキュラム群では，クラス全員を担任教師が指導し，加配教員はクラスでの机間巡視をするにとどめ，特別な指導は行わなかった。テキスト群の教師は，ドリル学習が重要と考えており，授業では公式を中心にしたドリル指導が主であった。こうして，3用法の解決においては，テキスト群が有利な状態であることから，テキスト群は新カリキュラム群より優れていることが考えられたが，そうしたことはみられなかった。

新カリキュラム群とテキスト群において，3用法の問題解決で用いられた方略に差がみられた。Figure 2に示されているように，両群とも計算方略を多く用いていたが，テキスト群は新カリキュラム群より多くの計算方略を用いていた。一方，見積もり方略では，新カリキュラム群の子どもは40%も見積もり方略を用いていたが，テキスト群は12％と少なかった。このように，テキスト群の子どもの問題解決は計算方略に依存していたが，新カリキュラム群は，計算方略の他に見積もり方略も多く用いていた。新カリキュラム群において，見積もり方略を使用できることは非常に重要なことである。

多くの研究で，問題解決における見積もり方略の重要性が指摘されている（Mulligan & Mitchelmore, 1997；Sowder，1992)。公式に依存するだけでなく，柔軟に見積もりといった他の方略を用いることができることは，割合概念の心的な表象ができていると考えられる。割合概念の心的表象が構成されていることが，関係課題でもみられた。関係課題では，新カリキュラム群がテキスト群より高い正答率を示した。関係課題は，数が用いられておらず，質的，量的な意味を理解することにより解決することができる課題である（Nunes & Bryant，1996)。割合の意味表象が獲得されて解決することができる問題である。そうした意味において，新カリキュラム群は，割合についての概念的知識を獲得していることが考えられる。

また，作図課題では，新カリキュラム群がテキスト群より2.4倍も高い正答率を示している。基本的には，割合は，ある量が基にする量の中で占める度合いを表す概念である。作図課題は，割合の基本的な意味としての意味表象が獲得されないと正答できない。新カリキュラム群では，こうした割合の意味表象が獲得されているといえよう。作図課題の誤り分析から，テキスト群は問題文中の表現をそのまま書いている誤りがみられた。これは，テキスト群では，割合の意味と量を記号に関連させることができていないことを示していると考えられる。

変換課題では，Figure 6に示されているように，新カリキュラム群とテキスト群において正答率の差はみられなかった。変換課題は，割合概念の意味的な理解を問う課題というより，％が100を基本にし，小数は10を基にしている手続き的な知識を問う問題である。機械的な計算課題であり，指導法による差がみられないことは当然であると考えられる。

本研究では，子どもの思考を基にしたカリキュラム構成による教授介入が，割合の意味表象を獲得させるのに効果的であることが示された。伝統的な公式に基づく指導では，子どもは割合の基本的な意味を十分には学習できないことが示された。知識習得には，ある領域において手続き的知識と概念的知識を習得させることであると主張されている（Hiebert & Carpenter,

1992)。手続き的知識とは，形式的な記号の操作についての知識であり，概念的知識とは，いくつかの事実を相互に関連づけたネットワークを構成した意味的な知識である。新カリキュラム群の子どもは，概念的知識を獲得しているが，テキスト群は手続き的知識だけを獲得していると考えられる。算数・数学についての知識・技術を実際の場面で活用することが弱いことが指摘されている(文部科学省，2006)。子どもの思考を基にしたカリキュラム構成による教授介入は，こうした指摘に対しての効果的な解決策の1つになることが示唆される。

今後の課題としては，それぞれの教材概念における問題点を分析し，それぞれの領域で，子どものもつインフォーマルな知識や思考を具体的に明らかにしていくことが必要である(栗山，2010；Yoshida & Sawano, 2002)。そして，現行の教科の論理に基づいたカリキュラムでなく，子どもの論理をもとにしたカリキュラム構成を行い，その効果を実証することである。そうすることにより，現行のカリキュラムから，子どもの思考を基にしたカリキュラムへと変換できる道が開けると考えられる。

付記

本研究は，平成22～24年度科学研究費補助金，基盤研究（C）（課題番号22530699）の援助を受けて行われた。

引用文献

Carpenter, T.P., Fennema, E., & Romberg, T.A. 1993 Toward a unified discipline of scientific inquiry. In Carpenter, T.P., Fennema, E., & Romberg, T.A. (Eds.), *Rational numbers: An integration of research*. Hillsdale, N.J.: Lawrence.

De Corte, E., Greer, B., & Verschaffel, L. 1996 Mathematics learning and teaching. In D. Berliner & R. Calfee (Eds.), *Handbook of Educational Psychology*, Macmillan, New York.

Fuson, K. 1988 *Children’s counting and concepts of number*. New York: Springer-Verlag.

Hart K. 1988 Ratio and proportion. In J. Hiebert & M. J, Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle graders* (pp. 198–219). Hillsdale, NJ: Lawrence.

Hiebert, j., & Carpenter, T.P. 1992 Learning and teaching with understanding. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65–97). New York. Macmillan.

Hiebert, J., & Wearne, D. 1996 Instruction, understanding and skill in multidigt addition and subtraction. *Cognition and Instruction*, **14**, 251–283.

石田淳一・神田恵子　2008　5学年「割合」単元における関係図や線分図をかいたり，よんだりする指導に関する研究，科学教育研究，**32**(**3**)，153-163.

Kiren 1988 Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. In J. Hibert & M. J. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle graders* (Pp. 162–181). Hillsdle, NJ: Lawrence.

栗山和広　2005　割合概念における認知的障害　九州保健福祉大学研究紀要，**6**，35-40.

栗山和広　2006　割合の問題解決における方略分析　九州保健福祉大学研究紀要，**7**，87-92.

栗山和広　2010　子どもはどう考えるか　おうふう

栗山和広　2011　割合の学習以前に子どもがもつインフォーマルな知識，愛知教育大学研究報告，第**61**，83-88.

Leinhardt G. 1988 Getting to know: Tracing student's mathematical knowledge from intuition to competence. *Educational Psychologist*, **23**, 170–193.

Lembke, L.O., & Reys, B.J. 1994 The development and interaction between intuitive and school-taught ideas about percent. *Journal for Research in Mathematics Education*, **25**, 237–259.

Mack, N.K., 1990 Learning fractions with understanding: Building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, **21**, 16–32.

Mack, N.K., 1993 Learning rational numbers with understanding: The case of informal knowledge. In T.P. Carpenter, E. Fennema, & T.A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research*. (pp. 85–106). Hillsdale, NJ: Lawrence.

文部科学省　2006　文部科学白書

Moss. J.,& Case, R. 1999 Development children's understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, **30**, 122–147. 1999.

Mulligan, J.T., & Mitchelmore, M. C. 1997 Young children’s intuitive models of multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, **30**, 122–147.

中村亨史　2008　割合概念の理解における児童の思考の様相：ノート記述の分析をとおして　日本数学教育学会誌，**90**(**4**)，2-10.

Numes, T., & Bryant, P. *Children doing mathematics*. Blackwell: London.

Smart, J. R. 1980 The teaching of percent problems. *School Science and Mathematics*, **80**, 187–192.

Sowder, J.T. 1992 Making sense of numbers in school mathematics. In Leinhardt, G., Putman, R., & Hartrup. R. A. (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (pp. 1–52). Hillsdale, NJ: Lawrence.

Streefland, L. 1993 Fractions: A realistic approach. In Carpenter, T.P., Fennema., E., & Romberg, T.A. (Eds.), *Rational numbers: An integration of research*. Hillsdale, NJ:LEA

渡辺敏　2011　児童が潜在的に持っている割合の見方を生かした導入についての研究，日本数学教育学会誌，**93**(**2**)，11-21.

吉田甫・河野康男・横田浩　2000　割合概念の解決におけるインフォーマルな知識の利用と解決方略の分析，宮崎大学教育文化学部紀要，**2**，123-133.

Yoshida H. & Sawano, K. 2002 Overcoming cognitive obstacles in learning fractions: Equal partitioning and equal-whole. *Japanese Psychological Reasearch*, **44**, 183–195.

（2012年9月5日受理）