愛知教育大学研究報告，59（教育科学編），pp，107～112，March，2010

割合文章題における部分と全体スキーマ
―割合に分数を用いた場合―

栗山和広

学校教育講座（教育心理学）

Children's Part-Whole Schema for Solving Ratio Word Problems

Kazuhiro KURIYAMA

Department of School Education(Educational Psychology), Aichi University of Education, Kariya 448-8542, Japan

学力に関する問題が経済界やマスコミにおいて盛んに議論されている。2006年に実施された国際的な学力調査であるPISA（国立教育政策研究所，2007）によると，日本の小学４年生の数学的リテラシーは，2003年度の国際調査と比較して平均得点が低下しており，世界の参加国の中での順位も６位から10位へと低下している。また，文部科学省（2006）は，数学についての知識・技能を実際の場面で活用する力に課題があることを指摘している。このように，算数の学力低下は大きな関心事となっている。認知心理学からも，加算，減算，割合，分数，文章題などの子どもの数理解について様々なアプローチが行われている（Carpenter, Fennema, & Romberg, 1993; De Corte, Verschaffel, & De Win, 1996; Mack, 1990; Murata, 2004; Noelting, 1980; Torbeyns, Verschaffel & Ghesquiere, 2005; Verschaffel & De Corte, 1996; Resnick & Singer, 1993; Saxe, Tayler, Mcintosh, & Gearhart, 2005; Smith, 1995 ）。本研究では，子どもにとって理解が難しい割合文章題を取り上げて，認知心理学の視点から子どもはどこに困難さをもっているかについて検討することにある。

文章題は，小学校算数の中でも子どもが苦手とする領域の一つであり，計算は正しく解けるのに文章題は嫌いという子どもが５割もいるということが報告されている（福永，2008）。文章題は，数（整数，小数，分数，割合の概念）と計算，量と測定，図形，数量関係（記号，関数，グラフ）などに関わるそれぞれの日常の現実世界のテーマを文章で記述して解答を求める問題と位置づけられており，1年生から６年生までの各概念において学習される。そうした文章題の中でも，割合文章題は子どもが難しさを感じている領域である。

文章題の解決について，Mayer（1992）は４つの段階を提案している。第１段階は，変換過程で，問題のそれぞれの文を内的な心的表象に変換する。第２の段階は，統合の過程で，適切な情報を一貫した内的な表象に統合する。第３の段階は，プランニングの段階で，正解を得るための方略を選択し，数式をつくる過程である．第４の段階は，実行の過程で，プランの過程において構成された数式に演算を適用する過程である。これらの段階のうち変換過程と統合過程は，文章題の理解過程で，問題文に記述されている内容に適したスキーマを構成することである。プランニングと実行の過程は，解決過程であり，プラン化過程において構成された数式に計算を適用する過程である。

こうした過程の中でも，子どもにとって文章題の解決を困難にしている要因は，理解過程における意味表象を適切に構成できないことにあると考えられている。Hudson（1983）は，子どもにとって既有知識となっている１対１対応が利用できるような意味の表現に文章題の表現を変えた。その結果，子ども自身のもっている問題スキーマを取りいれることができる問題を与えられた子どもは100%という高い正答率を示した。また，De Corte, Verschaffel, & De Win（1985）も，隠された意味を文章題の表現に示すことにより子どもは高い正答率を得ることを示している。こうして，子どもは，問題に隠されている意味を適切に表象することに難しさをもっていることが考えられる。

また，Carpenter & Moser（1983）は，低学年の子どもは問題から基本的な知識を引き出して解決しているのではなく，文章で述べられている行為や関係に従って式を立てていると述べている。また，栗山（2009）は，子どもは文章題の意味をそのまま式として示しているかについて検討した。その結果，小学２年生の約２割は，問題の意味構造に基づいて問題を解決することが示された。このように文章題の解決においては，理解過程における意味表象の構成が重要な働きをしていると考えられる。

さて，割合文章題の解決において，理解過程における意味表象の構成の難しさにはどのような要素があるのであろうか。割合は２つの量の関係を示すもので，ある量が基にする量の中で占める度合いを表す概念である。割合は，小学５年生では小数倍や百分率（%）との関係で３用法について学習し，小学６年生では分数や百分率を用いた文章題のなかで，割合の実際的な場面での活用を学習する。こうした割合で用いられる３用法や分数概念の基本的な難しさの要因について，栗山 (2005) や吉田･栗山 (1991) や Yoshida & Kuriyama (1995) は，認知心理学の視点から検討している。栗山 (2005) は，割合の３用法における割合概念の認知的障害について検討した。その結果，子どもは基にする量と比べる量の要素を同定することがかなり困難であることが示された。基にする量は全体であり，比べる量は部分であることから，割合概念において部分と全体スキーマの理解が困難であることが示唆された。また，吉田･栗山（1991）や Yoshida & Kuriyama（1995）は，分数の大小比較から分数の意味的な知識である概念的知識について検討した。その結果，分数の概念的知識の獲得を困難にしている要素として，全体としての１の概念，部分と全体の関係についての知識があることが指摘された。このことから，分数を用いた割合文章題の解決における理解過程においても，全体としての１の概念，部分と全体の関係スキーマを適切に表象することが子どもにとってかなり難しいことが考えられる。

そこで、本研究では，分数を用いた割合文章題の難しさとして，全体としての１の概念，部分と全体の関係の概念的知識を子どもが獲得していないことにあるのではないかについて検討することを目的とする。こうした割合の文章題の内容について検討することは，文部省（2006）が数学についての知識・技能を実際の場面で活用する力に課題があると指摘している点についても，認知心理学からの視点からの示唆が得られると思われる。

方　　法

被験児　M市近郊の公立小学校６年生の４クラスの子ども137名が対象者である。彼らはＭ市近郊の平均的な中流家庭の子どもである。

材料　割合文章題のテスト内容は，割合が分数で表わされた問題であった。問題は以下の通りであった。

問題①「運動公園の面積は，全部で2500㎡ です。全体の１／６が野球場で，野球場の５／８がグランドです。グランドの面積はどれくらいでしょうか。」

問題②「よし子さんの家の庭は100㎡あります。お父さんが庭の畑の２／５を耕しました。耕した畑のうちの１／３にトマトを植えました。トマトの苗の広さは何㎡ですか。」

問題③「たかし君は，弟と畑を耕しました。１日目にたかし君が畑の１/３，弟が１／６を耕しました。この調子で耕していくと畑全体を耕すのに何日かかるでしょうか。」

問題④「良一君のお兄さんが畑を半分耕しました。次の日に良一君が，残りの耕していない畑の１／３を耕しました。まだ，耕していないところは全体の何分の何でしょう」

問題①と問題②は割合の第２用法で解くことができる問題である。問題③と問題④は，全体を１としたときの部分と部分の割合を考える問題である。

文章題と一緒に分数のたし算とひき算の問題がそれぞれ４問，合計８問が出題された。帯分数・仮分数・真分数が含まれている問題であった。

手続き　テストは，2学期が終わる最後の週に，通常の授業時間に算数テストという形式で，分数のたし算とひき算の問題と一緒に実施された。テスト終了後に，一人の子どもごとに方略の推定をおこなった。これらの分析が終了した後，各クラスの担任教師にテストの結果についてフィードバックが与えられた。

６年生での割合の単元は以下のとおりであった。５年生で，小数倍や百分率で表わされた割合の文章題について学習する。６年生では，分数で表わされた割合について分数のかけ算とわり算の単元でも学習するが,「割合をつかって」の単元で日常生活にある事象を取り上げて，分数を用いた割合文章題について学習する。「割合をつかって」という単元では４時間学習する。４時間の内容は，全体を１として部分の割合を考えて解く問題，全体を１として部分の和を考えて解く問題，割合の差を考えて解く問題，割合の積を考えて解く問題である。６年生の割合文章題は，5年生で学習する文章題よりも解決するステップ数が多くなっている。さらに，6年生の割合文章題では，全体は１であるということが明確には示されておらず，部分と部分の割合の和について考えないと解決できない。

結　　果

最初に，割合文章題４問の正答率を求めた。問題①は45%，問題②は25%，問題③は36%，問題④は図も式も正答したものは11%という低さであった。いずれの問題も正答率は５割以下というかなり低い正答率であった。割合概念を５年生で学習した後に６年生で割合文章題について学習しても，子どもにとって理解することは依然としてかなり難しいといえよう。問題①と問題②は第２用法で解決できる問題である。第２用法は割合の３用法の中では最も易しい用法である（栗山，2005)。割合の３用法の中では最も易しい用法であるにも関わらず，5割以下の正答率という低さである。問題②に至っては３割にも満たない正答率である。これでは子どもが割合概念を理解しているとはと

てもいえないであろう。多くの小学生が割合文章題の解決に困難さをもったままであるいえよう。

次に，各問題の難しさの要素を分析するために問題解決の誤り方略について分析した。最初に，問題①の文章題の誤り方略について分析したところ，5つの誤り方略が見られた。その結果を Table 1 に示した。S 1方略は，全体×割合として解くところを全体÷割合として解いた誤りであった。S 2方略は，2段階の計算が要求されている問題で，1段階の割合を省略して，2段階の割合を使って正しく計算する誤りであった。例えば，2500㎡×5/8として計算する誤りである。S 3方略は，2段階の計算が要求されている問題で，1段階の割合を省略して，2段階の割合の計算をおこなうが，用いられた演算を割り算で計算している誤りであった。例えば，2500㎡÷5/8と計算する誤りである。S 4方略は，2つの割合の和を計算し，それを1つの割合とみなして計算する誤りであった。例えば，2500㎡×（1/6＋5/8）とする誤りである。S 5方略は，2つの割合同士の積を計算しそれを答えとする誤りであった。その他は，子どもがどうして問題を解いたかが不明，答えがない，ケアレスミスなどの問題を示している。

Table 1　問題①における各方略の割合

	正答	S 1方略	S 2方略	S 3方略	S 4方略	S 5方略	その他
問題①	.44(60)	.07(10)	.04(6)	.03(5)	.06(8)	.07(10)	.28(38)

（　）内は人数

S 1方略やS 4方略から，問題で述べられている何が部分で何が全体かという部分と全体の関係スキーマの知識の獲得が，子どもにとって難しいことが示唆される。S 1方略は，全体×割合として解くところを全体÷割合として解いた誤りである。これは，栗山(2005)で見られた，基にする量（全体）と比べる量（部分）を混同していることにあると考えられる。また，S 4方略は，2つの割合の和を計算し，それを1つの割合とみなして計算する誤りである。このことから，全体の中の部分の部分を求めることが子どもにとって困難であることが示唆される。このように，複雑な構造をもつ割合問題では，部分と全体関係の概念的知識の獲得が，割合問題の解決を困難にさせている要因の1つであると考えられる。その他に，1段階の割合を省略する方略であるS 2方略とS 3方略から見られるように，複雑な構造の問題では問題構造を単純で解決しやすいように構成することが考えられる。これは，子どもは複雑な構造の問題では，より単純で解決しやすい構造の問題として表象することが多いと述べている Kintsch（1986）の見解と一致している。

問題②の誤り方略について分析したとことろ，5つの誤り方略が見られた。その結果を Table 2 に示した。S 1方略，S 2方略，S 4方略，S 5方略，S 6方略が見られた。S 6方略は，問題②で新しく見られた方略であった。2段階の内の1つの割合について計算し，全体からその計算した値を引いて，その値にもう一つの割合をかけて答えとする誤りであった。例えば，100×2/5 =40 100－40=60 60×1/3 =20，答えとする。全体における部分と部分の関係の知識が不足していることによる誤りである。

Table 2　問題②における各方略の割合

	正答	S 1方略	S 2方略	S 4方略	S 5方略	S 6方略	その他
問題②	.26(35)	.08(11)	.12(16)	.13(18)	.13(18)	.10(14)	.19(25)

（　）内は人数

問題②において，S 4方略，S 5方略，S 6方略とも全体における部分と部分の関係についての概念的知識が欠如していることを示している。これらの3つの方略を合計すると36%になる。割合文章題に困難さをもつ子どもの約4割は，全体における部分と部分の関係の知識を表象することが難しいことを示している。

問題③の誤り方略について分析したところ，3つの誤り方略が見られた。その結果を Table 3に示した。先に示したS 4方略とS 5方略の他にS 7方略が見られた。S 7方略は，全体÷割合として出すところを，割合÷全体と逆に計算している誤りであった。全体と部分の関係スキーマが欠如していることが示唆される。

Table 3　問題③における各方略の割合

	正答	S 4方略	S 5方略	S 7方略	その他
問題③	.34(47)	.05(7)	.33(45)	.01(2)	.27(36)

（　）内は人数

問題③において，誤り方略の中ではS 5方略が33%と最も多くみられた。S 5方略は，全体としての1の概念，部分と部分との全体の関係を理解できないことから生じている。割合概念の理解を困難にしている要素として，全体としての1の概念，部分と全体の関係を理解できないことにあることを吉田・栗山（1991）や Yoshida & Kuriyama（1995）は示している。これは，割合の文章題においても，これらの要素を理解することが難しいことを示すものである。

問題④は式と作図を求める問題であった。式と作図の誤り方略について分析し，その結果を Table 4 に示した。式において，3つの誤り方略が見られた。F 1方略は，全体の割合のなかの割合を求める問題であるが，一方の割合を全体と見て，全体から一方の割合を求めている。例えば，1－1/3＝2/3とする。F 2方略は，一方の割合の割合を求めるところを，一方の割合は正しく求めているが，残りのもう一つの割合を全体の中での割合として求めている。例えば，1/2＋1/3＝5/6, 1－5/6とする誤りであった。F 3方略は，全体を1ではなく2としており，部分をそれぞれ1とする誤りであった。例えば，2－（1/2＋1/

３）= とする誤りであった。作図における誤り方略は，一方の割合のみを線分図に描いており，もう１つの割合が示されていない FG １方略が見られた。尚，作図における正答は，線分図に１／２を描き残りの１／２に１／３が描かれているものを正答とみなした。

Table 4　式と作図における各方略の割合

式	作図			
	正答	ＦＧ１方略	その他	合計
正答	.11(15)	0(0)	0(0)	.11(15)
Ｆ１方略	.06(8)	.11(15)	.03(4)	.20(27)
Ｆ２方略	.05(7)	.04(6)	.08(11)	.17(24)
Ｆ３方略	0(0)	.03(4)	.04(6)	.07(10)
その他	.09(12)	.05(7)	.31(42)	.45(61)
合計	.31(42)	.23(32)	.46(63)	1.00(137)

(　) 内は人数

Table 4 から見られるように，Ｆ１方略，Ｆ２方略，Ｆ３方略を合計すると約４割になる。これらの方略は，部分と全体の関係の概念的知識が不足していることを示すものである。また，Ｆ１方略とＦ３方略を合計すると約３割になるが，これは部分と全体の関係の知識と全体としての１の概念の知識を十分に獲得できていないことを示している。作図における FG １方略は，部分を全体として表象していることを示すものである。作図からも，部分を全体としており，全体としての１の概念，全体と部分の関係の知識が欠如していることが示唆される。次に，式と作図の関係について見ると，式で正答しているものは作図でも全員が正答している。Ｆ１方略をもつものは，作図においても部分と全体関係のスキーマが欠如している FG １方略が最も多い。Ｆ１方略とＦ２方略において，正答しているものがそれぞれ８名，7名見られ。これは，式と作図との意味の対応ができていないことを示すものである。式と図の関連づけができないことは，割合文章題に対する概念的知識と手続き的知識の関連付けの難しさを示すものであろう。

次に，分数のたし算とひき算の問題がテストに含まれていたので，たし算とひき算について，それぞれの全問題数に占める正答数の割合である正答率を求めた。たし算の正答率は75％，ひき算の正答率は70％であった。７割の子どもが正答していることから，この程度の理解であれば，たし算とひき算についてはある程度満足してよいと考えられる。

考　　察

本研究は，分数を用いた割合文章題の解決において，子どもが全体としての１の概念，部分と全体の関係スキーマを適切に表象して解決しているかについて検討した。

その結果，方略分析から，問題②では約４割の子どもが，問題③では約４割の子どもが，問題④では約５割の子どもが，全体としての１の概念，部分の部分と全体の関係の適切な知識を獲得していないことが見られた。これは，栗山(2005)が割合概念において，吉田・栗山（1991）や Yoshida & Kuriyama（1995）が分数概念において指摘したことと同一のことが割合文章題においても示されているといえる。４年生や５年生で見られた割合概念や分数概念において欠如していた概念的知識は，6年生の文章題でも同じように欠如しているといえよう。このことから，全体としての１の概念，部分と全体関係の概念的知識の欠如が，分数を用いた割合文章題の解決を困難にしている重要な要素の１つであると考えられる。

ところで，文章題をうまく解決できない要因として，言語的な表現に慣れておらずそこでの意味を適切に解釈できないことによるという言語発達の見解が Cummins（1991）により示されている。この見解では，問題を適切に表象できないのは，言語的な表現に対して誤った解釈をすることにあると考えられている。そして，子どもは部分と全体の関係を暗黙的に理解しており，問題の解決に失敗するのは部分と全体の関係の概念的知識が欠如していることではないと考えている。文章題の難しさは，問題文の表現への誤った解釈から生じており， 誤った理解は問題の表現を部分と全体の知識にうまく適合させることができなかった結果にあるとしている。Cummins（1991）は小学１年生に整数の文章題を解かせているが，本研究は小学６年生を対象に分数を用いた割合文章題を解決させている。こうした被験児と用いられた材料の違いが，本研究の結果と Cummins（1991）の結果の違いを反映している可能性がある。しかし，割合文章題が子どもにとって難しい要因は，言語表現の誤った解釈によるのか，部分と全体の論理数学的な見解かのどちらかという意味で説明することは難しい。そのどちらもが関連していることにより，割合文章題は子どもにとって難しいと考えるのが妥当であろう。

分数のたし算とひき算の正答率が約７割であることから，手続き的知識について獲得できる子どもでも，割合文章題の概念的知識の獲得はかなり難しいといえる。割合概念や分数概念の概念的知識が不足していることは，4年生や５年生の学習段階で既に指摘されていることである（吉田・栗山, 1991; Yoshida & Kuriyama, 1995; 栗山，2005）。しかし，啓林館（2005）の６年生の指導書には「小数で表わされた割合や百分率などは５年から，分数で表わされた割合は６年の10の単元で学習しているので，ここでは，これらのことも随時ふれながら，児童から考えを引き出すようにしたい」と述べられている。こうした指導は，4年生や５年生で割合の概念的知識がある程度獲得されていることを前提にしていると考えられる。しかし，4年生や５年生で獲得すべき割合の概念的知識は不足したまま

であり，それでは6年生で分数を用いた割合文章題を学習しても問題を解決することは困難であると考えられる。

それではどうしたら分数を用いた割合文章題における概念的知識を獲得させせられるのであろうか。教師が，子どもに教える際に必要な知識とは，数学的知識・教育的知識・学習者の認知についての3つの知識が区別されるべきである（De Corte et al.， 1996）。この3つの知識の中で，数学を子どもに教える際に最も欠けている知識が学習者の認知である。本研究で見られたように，子どもにとって難しい割合文章題の概念的知識について教師は十分に認識しているとは思われない。実際の教師の指導について見ると，全体としての1の概念や部分と全体の関係についての指導はある程度なされている。しかし，それは当たり前の基礎的な知識として考えられており，軽く触れられるだけの場合が多い。多くの教師は，子どもがそれらの知識をいかに獲得することが困難であるかについて意識していないように思われる。こうした知識の獲得への意識をもった教師の指導を行うことが重要となるであろう。そうすることにより，子どもは数の性質に惑わされずに割合文章題を解決することが解けるようになると考えられる。

文部科学省（2006）は， 数学についての知識･技能を実際の場面で活用する力に課題があることを指摘している。また，長崎・西村・五十嵐・牛場・久保・松本（2004）は，日本において数学と日常生活との結びつきについての意識が低いだけでなく，数学を日常の中で活用する能力が身についていないと述べている。これは，本研究で示唆された子どもにとって理解が困難な要素は何かを明らかにした概念的知識を獲得させる指導とも関連があると考えられる。子どもにとって欠如している基本的な知識は何かを明らかにした指導があって，数学と日常生活で活用する役立つ知識になると考えられる。

現在の数概念の教授におけるカリキュラムは「教科の論理」に基づいたものであり，そこには子どものインフォーマルな知識や思考を重視した「子どもの論理」が全く組み込まれていない。しかし，最近の認知心理学の研究は，数の教授・学習の領域において，子どものインフォーマルな知識や思考を基にした指導が効果的であるという主張がなされている（Carpenter, et al., 1993; De Corte et al.， 1996; 栗山，2001 ）。割合を用いた文章題の解決において，全体としての1の概念，部分―全体スキーマの理解という問題構造の理解は子どもにとってかなり困難であることが明らかにされた。教授・学習において，子どものインフォーマルな知識を取り入れた指導やカリキュラム構成について，今後検討することの重要性を本研究は示している。

今後の課題として，数理解における子どもの知識や思考について，さらに検討していくことが必要である。子どもの数の知識や思考については，加算，減算，分数，小数，割合などで明らかにされつつあるが，まだかけ算，わり算，おおよその数，比例など十分に明らかにされていない領域が多い。そうした領域の子どもの知識を明らかにすることは，「子どもの論理」に基づいたカリキュラム構成や指導方法には欠くことのできないものである。今後の課題として，そうした領域でのさらなる検討が必要である。また，こうした子どもの思考過程を基にした認知心理学の理論の応用は，教育実践へ有効であるばかりでなく，認知心理学の理論化においても重要であると考えられる（Bruer, 1993; 栗山，2001；栗山，2002）。

引用文献

Bruer, J.T. 1993 Schools for thought: A science of learning in the classroom. Cambridge, MA: The MIT Press.（松田・森　1997 授業がかわる：認知心理学と教育実践が手を結ぶとき　北大路書房）

Carpenter, T.P. & Moser, J.M. 1983 The acquisition of addition and subtraction problems. In R. Lesh & Landau（Eds）, *Acquisition of Mathematical Concepts and Processes*. Academic Press.

Carpenter, T.P., Fennema, E., & Romberg, T.A. 1993 Toward a unified discipline of scientific inquiry. In Carpenter, T. P., Fennema, E., & Romberg, T. A.（Eds.）, *Rational numbers: An integration of research*. Hillsdale, N. J.: Lawrence.

Cummins, D. D. 1991 Children’s interpretations of arithmetic word problems. *Cognition and Instruction*. **8**, 261-289.

De Corte, E., Verschaffel, V., & De Win, L. 1985 Influences of rewording verbal problems on children’s problem representation and solutions. *Journal of Educational psychology*, **77**, 460-470.

De Corte, E., Greer, B., & Verschaffel, L. 1996 Mathematics learning and teaching, In D. Berliner & R.Calfee（Eds.）, *Handbook of Educational Psychology*, Macmillan, New York.

福永靖彦　2008　小学校算数における小数を含むかけ算・わり算文章題の解決過程に関する研究　兵庫教育大学学位論文

Hudson, T. 1983 Correspondences and numerical differences between disjoint sets. *Child Developmen*t. **54**, 84-90.

Kintsch, W. 1986 Learning from Text. *Cognition and Instruction*, **3**, 87-108.

啓林館　2005　指導書算数6年下第2部詳説朱駐と解説

国立教育政策研究所　2007　PISA2006年調査評価の枠組み―OECD生徒の学習到達度調査　ぎょうせい

栗山和広 2001　教授･学習の研究―認知心理学から教育の実践化へ，そして教育実践から認知心理学の理論化に向けて―　教育心理学年報，**40**，102-111.

栗山和広 2002　幼児･児童における数表象の構造　北大路書房

栗山和広　2005　割合概念における認知的障害　九州保健福祉大学研究紀要，**6**，35-40.

栗山和広　2009　小学2年生の算数文章題における意味構造の影響　愛知教育大学研究報告，**58**，67-72.

Mack, N. K., 1990 Learning fractions with understanding: Building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, **21**, 16-32.

Mayer, R. E. 1992 *Thinking, problem solving, cognition*. Second edition. New York: W.H. Freeman.

Mayer, R. E., Lewis, A.B., & Hegarty, M. 1992 Mathematical misunderstanding: Qualitative reasoning about quantitative problems. In J. I. D. Cambell（Ed.）*The nature and origins of mathematical skills*. Elsevier Scinece Publishers.

文部科学省 2006 小学校・中学校・高等学校数学指導資料 PISA 2003及び TIMSS 2003 結果の分析と指導改善の方向

Murata, A. 2004 Paths to learning ten-structured understanding of teen sums: addition solution methods of Japanese grade 1 students. *Cognition and Instruction*, **22**, 185-218.

長崎榮三・國宗進・太田伸也・長尾篤志・吉田成夫・五十嵐一博・他13名 2006 現在の学問や職業で使われている算数・数学―「数学教育に関する研究者調査」の分析― 日本数学教育学会誌，**88**（3），29-43.

Noelting, G. 1980 The development of proportional reasoning and the ratio concept: Part 1 differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics*. **11**, 217-253.

Resnick, L.B. & Singer, J.A. 1993 Protoquantitative origins of ratio reasoning. In T.P. Carpenter, E., Fennema, & T.A. Romberg（Eds）, *Rational numbers: An integration of research*. Hillsdale, NJ: LEA. Pp. 107-130.

Saxe, G.B., Tayler, E,V., McIntosh, C., & Gearhart, I. 2005 Representing fractions with standard notation: A developmental analysis. *Journal for Research Mathematics Education*. **36**, 137-157.

Smith J.P. 1995 Competent reasoning with rational numbers. *Cognition and Instruction*, **13**, 3 -50.

Torbeyns, J., Verschaffel, L., & Ghesquiere, P. 2005 Simple addition strategies in a first-grade class with multiple strategy instruction. *Cognition and Instruction*, **23**, 1 -21.

Verschaffel, L., & De Corte, E. 1996 Number and arithmetic. In A. Bishop（Ed.）, *International Handbook of Mathematics Education*. ordrecht, The Netherlands: Kluwer. Pp.1-44.

吉田甫・栗山和広 1991 分数概念の習得過程に関する発達的研究 教育心理学研究，**39**，382-391.

Yoshida, H., & Kuriyama, K. 1995 Linking meaning of Symbols of fractions to problem situations. *Japanese Psychological Research*, **37**, 229-239.

（2009年 9 月16日受理）