愛知教育大学研究報告，58（教育科学編），pp，67～72，March，2009

小学校２年生の算数文章題における意味構造の影響

栗山和広

学校教育講座（教育心理学）

The Effects of Children's Semantic Structure for Solving Arithmetic Word Problems

Kazuhiro KURIYAMA

Department of School Education(Educational Psychology), Aichi University of Education, Kariya 448-8542, Japan

認知心理学の研究から，計数，加算，減算，比例，割合，分数，文章題など子どもの数理解に関して，多くのアプローチがなされてきている（Carpenter, Fennema, & Romberg, 1993; De Corte, Verschaffel, & De Win, 1996; Fuson, 1988; Gelman & Gallistell,1978; Mack, 1990; Murata, 2004; Noelting, 1980; Sacker-Grisvard & Leonard, 1985; Torbeyns, Verschaffel & Ghesquiere, 2005; Verschaffel & De Corte, 1996; Resnick & Singer, 1993; Saxe, Tayler, Mcintosh, & Gearhart, 2005; Smith, 1995)。そうした数の認知心理学の研究の中でも，本研究の目的は文章題の意味構造について検討することにある。

文章題は，小学校算数の中でも子どもが苦手とする領域の一つであり，計算は正しく解けるのに文章題は嫌いという子どもが５割もいるということが報告されている（福永，2008)。文章題は，数（整数，小数，分数，割合の概念）と計算，量と測定，図形，数量関係（記号，関数，グラフ）などに関わるそれぞれの日常の現実世界のテーマを文章で記述して解答を求める問題と位置づけられており，１年生から６年生までの各概念において学習される。

文章題の解決過程について，Mayer（1992）は４つの段階を提案している。第１段階は，変換過程で，問題のそれぞれの文を内的な心的表象に変換する。第２の段階は，統合の過程で，適切な情報を一貫した内的な表象に統合する。第３の段階は，プランニングの段階で，正解を得るための方略を選択し，数式をつくる過程である。第４の段階は，実行の過程で，プランの過程において構成された数式に演算を適用する過程である。これらの段階のうち変換過程と統合過程は，文章題の理解過程で，問題文に記述されている内容に適したスキーマを構成することである。プランニングと実行の過程は，解決過程であり，プラン化過程において構成された数式に計算を適用する過程である。

こうした過程の中でも，子どもにとって文章題の解決を困難にしている要因は，統合過程における意味表象を適切に構成できないことにあると考えられている。Hudson（1983）は，子どもにとって既有知識となっている１対１対応が利用できるような意味の表現に文章題の表現を変えた。その結果，子ども自身のもっている問題スキーマを取りいれることができる問題を与えられた子どもは100%という高い正答率を示した。また，De Corte, Verschaffel, & De Win（1985）も，隠された意味を文章題の表現に示すことにより子どもは高い正答率を得ることを示している。同様な結果が，Cummins（1991）においても示されている。子どもは，基本となる知識をもっていないために問題が解けないのではなく，問題に隠されている意味を適切な表象として示せないことにあると考えられる。

また，文章題の解決の難しさは，未知数の位置と問題のもつ意味構造によることを，Riley, Greeno, & Heller（1983）は述べている。未知数の位置が問題の難しさに大きく影響することについて，小学１年生に未知数が最初か中ごろか最後に出てくるかについて検討した。その結果，未知数が問題の中ごろに述べられる場合の正答率は62%，最初に述べられる場合は34%，未知数が最後に出てくる場合は100%の正答率であった。これらの結果から，未知数が問題の最初に述べられる構造であれば，それは極めて難易度の高い問題になると考えられる。また，文章題の難しさについて，問題がどのような意味的構造になっているかについて，変化，結合，比較，の３つの意味構造について述べている。変化は，数の増減を表す構造である。結合は，２つの数の静的な関連を表す構造である。比較は，2つの数の差を明確にする構造である。これらの中で，比較の文章題は他の意味構造より難しいことが明らかにされている。こうした未知数の位置と問題の持つ意味構造の組み合わせにより，文章題の難易度は異なると考えられる。

それでは，こうした文章題を，子どもはどのように

して解決しているのであろうか。Carpenter & Moser (1983) は，低学年の子どもは問題から基本的な知識を引き出して解決しているのではなく，文章で述べられている行為や関係に従って式を立てていると述べている。例えば,「太郎はりんごを３つもっています。次郎は太郎にりんごを何こかあげたので，太郎のりんごは８こになりました。次郎は太郎にりんごをいくつあげたのでしょう」の文章題において，子どもは以下のように問題を解いていた。最初に３つのつみきを用意し，そこへ１つづつ加えて合計が８個になれば終わりという方略を約７割の子どもが用いていたのである。この解決方法は，ひき算ではなく，たし算として解決している。子どもは文章題の意味をそのまま式として示したと考えられる . このように，低学年の子どもの場合，問題の構造を引き出して答えを求めるのでなく，問題の言葉から引き出される行為や関係に基づいて問題を解決していることが考えられる。そうであるあるならば，子どもが文章題で示す誤りの中にも，そうした傾向が見られると考えられる。例えば,「あげる」という言葉からは，ある人が他の人に何かをあげるのであるから，あげた人の持っている量は減少することになる。また，逆に「もらう」という言葉からは，ある人が誰かからもらうのであるから，ある人の量は増加することが考えられる。

ところで，低学年の文章題に関する従来の研究では，文章題にでてくる行為や関係を示す言葉が問題解決に影響することは指摘されてきた。しかし，実際に子どもがそうした誤りをもつかについて検討した研究は少ない。そこで，本研究では，文章題の解決過程にみられる誤り分析から，子どもが行為や関係に基づいて式を立て答えを出しているかについて検討する。さらに，こうした方略の他に，どのような誤り方略を子どもは文章題で用いているかについても併せて検討する。

方　法

被験児　M 市近郊の公立小学校２年生の４クラスの子ども163名が対象者である。彼らは M 市近郊の平均的な中流家庭の子どもである。２学期には，4クラス全員の子どもがテストをうけたが，３学期はある事情で１つのクラスの子ども全員が参加できなかった。そのために３学期は135名の子どもが参加した。

材料　文章問題のテスト内容は，以下のとおりであった。変化問題と比較問題が用いられた。変化問題は，数が増えたり減ったりする数の増減を示す問題である。比較問題は，２つの数を比べる２数の静的な関連を示す問題である。変化問題では，変化量が未知の問題が２問，開始量が未知の問題が１問であった。比較問題は，比較量が未知の問題が２問であった。実際に用いられた問題は以下の通りである。

変化問題

問題①「つとむくんは　くぎを56本もっていました。本だなをつくるのに何本かをつかったので　いま36本のこっています。何本のくぎをつかったのでしょう。」

問題②「良子さんのお父さんは　トラックで14こにもつをはこんでいました。とちゅうで　なんこか　のせたのでぜんぶで25こになりました。とちゅうでなんこのせたのでしょう。」

問題③「あきおくんの家では　にわとりをなんわかかっていました。くに子さんの家から　13わもらったので　ぜんぶで28わになりました。はじめなんわのにわとりがいたのでしょう。」

問題④「３人の子どもが　それぞれ６さつのノートをもっています。ぜんぶでなんさつのノートがあるでしょう。」

比較問題

問題⑤「ただしくんのもっている　テープのながさは65cm で　かずおくんのテープより26cm ながいそうです。かずおくんの　テープのながさはなん cm でしょう。」

問題⑥「よしおくんは　きってを16まいあつめましたが　かずおくんより　まだ　７まい　すくないそうです。かずおくんは　なんまい　きってをあつめたでしょう。」

２学期のテストでは変化問題の減算の問題が３問，かけ算の問題が１問の合計４問が用いられ，3学期のテストで加減算の比較問題が２問用いられた。

手続き　テストは，学期が終わる最後の週に，通常の授業時間に算数テストという形式で，たし算とひき算の問題と一緒に実施された。２学期のテストでは，変化の問題が３問，結合の問題が１問であった。３学期のテストでは，比較の問題が２問であった。２学期でテストをうけた同じ子どもが３学期でもテストをうけた。テスト終了後に，一人の子どもごとに方略の推定をおこなった。これらの分析が終了した後，各クラスの担任教師にテストの結果についてフィードバックが与えられた。

２年生の単元内容は以下のとおりであった。一学期に２位数と１位数，２位数どうしの繰り上がりと繰り下がりのあるたし算とひき算の筆算が教えられた。２学期に３位数と２位数，3位数同士のたし算とひき算の筆算が教えられた。かけ算の意味と式が教えられた。

３学期は，３位数どうし，３位数と４位数のたし算とひき算が教えられた。また，文章題が，それぞれの数の計算の領域で，いろいろな事象を数理的にとらえ，筋道をたてて考え生活の実践力をつける目的で教えられた。

結　果

子どもが行為や関係に基づいて答えを出しているかについて検討するために以下の分析を行った。最初に，２年生の２学期に実施された４問の文章題の誤り方略の分析を行った。その結果を Table １に示した。問題②と問題③には，Ｗ１方略，Ｗ２方略が見られた。Ｗ１方略は意味構造からひき算の式をたし算の式として立てた誤りであった。例えば，問題②では「のせた」という変化は増加を意味するのでたし算として計算する誤りであった。問題③では,「もらった」という変化は増加を意味するのでたし算として計算する誤り方略であった。Ｗ２方略は，答えをあらかじめ計算し，それを別の式に組み込んで答えをだした誤りであった。例えば，問題③では，11と正しい答えをだして，式を立てる段階ではこの答えの11を式の中に入れて14+11＝25とし，答えを25と出している。問題④ではＷ３方略が見られた。例えば，Ｗ３方略は「もっている」という変化はたし算を意味するので，正しくはかけ算であるが，たし算として計算する誤りである。その他は，子どもがどうして問題を解いたかが不明な問題を示している。

Table １　各方略者の割合

問題	問題①	問題②	問題③	問題④
正答者	.88(143)	.73(119)	.71(116)	.75(123)
W1方略	0	.14(24)	.16(27)	0
W2方略	0	.05(13)	.04(6)	0
W3方略	0	0	0	.15(24)
その他	.12(20)	.08(13)	.09(14)	.10(16)

(　)内は人数

Table １から，問題①は正答率が88%と他の問題より正答率が高く，Ｗ１方略もＷ２方略も見られなかった。問題②と問題③と問題④は正答率が73%，71%，75%であった。問題②と問題③は，Ｗ１方略がそれぞれ14%，16%で，問題④はＷ３方略が15%であった。問題①の正答率が他の問題より正答率が高いのは，構造から問題を解いても，問題の意味表現から解いても正答になることにあると考えられる。問題①では，つとむがくぎを使うという変化であり，これは減少を意味する。そのため，ひき算として解いたことが考えられる。これは，問題の構造がわかって式を立てても，あるいは意味の表現に従って式を立てても，正答になる。しかし，問題②では，トラックに何個かのせるという変化であり，これは増加を意味し，たし算として解決される。しかし，実際はひき算で解かなければならないので，意味構造に従って解く子どもはひき算で解いてしまい誤りとなる。また，問題③でも同様に，くにこがにわとりをもらうという変化であり，これは増加を意味し，たし算として解決されると考えられる。しかし，実際はひき算で答えを求められなければならず，意味構造で問題を解く子どもの答えは誤りとなる。また，問題④では，もっているという変化であり，意味構造で解く子どもはたし算として解決することが考えられる。しかし，これはかけ算で解かなければならないので誤りとなる。問題②，問題③，問題④では，文章構造から解く場合と，問題の意味表現から解く場合とでは立てる式が異なるために，問題①より正答率が低下していると考えられる。

また，Ｗ２方略が問題②で５%，問題③で４%見られたが，これはＷ１方略，Ｗ３方略とは異なる誤り方略である。文章題の構造から解いているのでもなく，意味表現から解いているのでもない別の方略と考えられる。

次に，子どもが文章題の構造を考えないで，意味の表現から解いているかを調べるために，以下の分析を行った。問題構造から解決しても意味表現から解決しても立てる式は同じである問題①に正しく答えた子どもが，問題構造から解く場合と意味表現から解く場合とでは立てる式が異なる問題②や問題③でどのように反応したかについて分析した。問題①，問題②，問題③に対する反応パターンごとの人数を Table ２に示した。尚，問題④はかけ算の問題であるのでここでは分析しなかった。

Table １からみられるように，問題①に正答した子どもは143名であった。この143名が問題②と問題③にどのように答えたかをTable ２に示した。Table ２からみられるように，問題②と問題③に正しい式であるひき算とは逆のたし算で答えた子どもは23名であった。問題①では正答しているのに，問題②と問題③では逆の計算をしていた。こうした子どもは，問題の表現に基づいて式をたてていたのである。これらの子どもは問題①で正しく答えた子どもの16%ほど見られた。さらに，問題①では正しく答えた子どもが問題②や問題③で逆の計算をした子どもが７名見られた。こうした子どもも，部分的ではあるが問題の表現に基づいて式をたてていたといえよう。

Table ２　問題に対する反応のパターンごとの人数

問題(正しい式)	反応のパターン									
問題①(－)	(－)	(－)	(－)	(－)	(－)	(－)	(－)	(－)	(－)	(－)
問題②(－)	(－)	(＋)	(＋)	(－)	(＋)	X	X	W2	W2	(－)
問題③(－)	(－)	(＋)	(－)	(＋)	X	(＋)	X	W2	(－)	W2
人数	101人	23人	３人	４人	１人	１人	１人	５人	３人	１人

(－)はひき算　(＋）はたし算　Xは不明　を示す.

次に，問題④で見られた誤り方略Ｗ３がほかの問題でどのように反応したかについて分析した。その結果が Table ３に示されている。問題①で正答した子どもが問題②と問題③でＷ１方略を示し，問題④でＷ３方略を示した子どもが14名見られた。こうした子どもも，問題の表現に基づいて式を立てているのであり，見せかけの正答であると考えられる。また，問題①，問題②，問題③で正答し，問題④でＷ３方略を示した子どもが８名見られた。これは，Ｗ３方略は実際はかけ算で解かなければならないので，問題構造からかけ算で式を立てることの難しさを示していると考えられる。

Table 3　問題④に対する反応パターンの人数

問題（正しい式）	反応のパターン	
問題①（−）	（−）	（−）
問題②（−）	（＋）	（−）
問題③（−）	（＋）	（−）
問題④（X）	（＋）	（＋）
人数	14人	８人

（−）はひき算　（＋）はたし算

次に，2年生の３学期の比較問題のテストについて誤り方略の分析を Table ４に示した。正答率をみると，問題⑤が49%，問題⑥が62%で，Table １の変化問題より比較問題が難しいことが示された。Ｗ１方略は意味構造からひき算の式をたし算の式として立てた誤りであった。「ながい」という変化は増加を意味するのでたし算として計算する誤りである。問題⑤で見られたＷ４方略は，意味構造からたし算の式をひき算の式として立てた誤りである。「すくない」という変化は減少を意味するのでひき算として計算する誤りで問題⑥において17%見られた。また，問題⑤は計算において繰り下がりのある問題であったので繰り下がりの誤りであるＳ１方略が見られた。

Table 4　各方略者の割合

問題	問題⑤	問題⑥
正答者	.49（68）	.62（85）
W1方略	.18（26）	0
W4方略	0	.17（24）
S1方略	.05（7）	0
その他	.08（13）	.12（20）

（　）内は人数

次に，子どもが文章題の構造を考えないで，意味の表現から解いているかを調べるために，以下の分析を行った。問題構造から解く場合と意味表現から解く場合とでは立てる式が異なる問題⑤や問題⑥でどのように反応したかについて分析した。問題⑤と問題⑥に対する反応パターンごとの人数を Table ５に示した。問題⑤と問題⑥で誤った逆の式をたてた子どもが15名見られた。こうした子どもは，問題の表現に基づいて式をたてているのであり，見せかけの正答であるといえよう。Table ２で見られた問題②と③と同じ反応であることが考えられる。

Table 5　問題④に対する反応パターンの人数

問題（正しい式）	反応のパターン			
問題⑤（−）	（−）	（＋）	（＋）	（−）
問題⑥（＋）	（＋）	（−）	（＋）	（−）
人数	54人	15人	３人	４人

（−）はひき算　（＋）はたし算

考　察

本研究は，文章題の解決過程にみられる誤り分析から，子どもが文章題の表現に示される行為や関係に基づいて答えを出しているかについて検討した。

本研究の誤り分析から，仮説どおりの結果が示された。子どもは文章題を解くのに，文章題の構造を引き出して答えを求めるのではなく，意味の表現から引き出される行為や関係から問題を解いていた。構造から式を立てても意味構造から式を立てても同じ式の問題①では正答した子どもが，問題構造から式を立てたときと意味構造から式を立てたときでは式が異なる問題②や問題③では，逆転の計算の誤りをする子どもが23名も見られた。また，問題①で正答して，問題②か問題③で逆転の誤りをした子どもをあわせると20%も見られた．問題①に９割ほどの子どもが正答しているが，そのうちの子どもの約２割ほどは見せかけの正答であるといえよう。同様に，比較問題のテストの誤り分析においても，見せかけの正答をしている子どもが見られた。

こうした誤りが生じるのは何故なのであろうか。仮説のように，子どもは，意味の表現から引き出される行為や関係から問題をといていることによると考えられる。さらには，そうした誤りを生じさせる要因として，教室の文化が影響していることが考えられる。それは，教室では結果を重視しているために，子どもは表面的な対処法略をとることにある（Sowder, 1988）。これらの方略には，問題の意味に基づいた操作の選択という注意深い意味的分析が欠けている。子どもの操作の選択が数学的推理に基づいていおらず，文章題を解くゲーム感覚に依存していると考えられる。そのため，子どもは文章題の表象プロセスより，結果をだすことに注意している。すなわち，文章題とは，問題に示された内容から適切な表象を形成することではなく，問題の数に基づいて計算をするものとして見ていると考えられる。そこには，正しい答えがよい思考であり，結果を重視するという教師の誤った信念が背景にあることが考えられる。このことは，大学生を対象にした実験でも見られている。Mayer, Lewis, & Hegarty（1992）は，大学生に解決に必要なステップが多い課題を用いたところ，15%ほどの被験者が「安い」

という言葉に反応して，正しくはたし算で式を立てるところを逆のひき算で式をたてるという逆転の誤りをすること見いだした。解決ステップ数が多くなれば，大学生でもこうした表面的な対処法略をとることを示している。

こうした適切な表象を構成することの難しさは，物理学の問題解決においても見いだされている。Chi, Feltovich, & Glaser（1981）は，初心者と熟達者の問題スキーマが異なることを見いだしている。そこでは，初心者は問題の表面的な特徴に基づいて問題を解いているが，熟達者は構造的に理解していることが示されている。本研究で見いだされた逆転の誤りも，子どもはこうした問題スキーマを構造的に理解していないことによるといえよう。

また，問題に示されている文の内容と，子どもが問題の文を変換して表象した内容とが異なっていることが見いだされた。それは，答えをあらかじめ計算し，それを別の式に組み込んで答えをだしたＷ２方略においてみられた。こうした誤りをする子どもに面接をしたところ，質問文を正しく理解していなかった。問題が何を要求しているか理解しておらず，変化量が未知の問題から結果量が未知の問題へと簡単な問題へと変えてしまっていたのである。質問文は，問題解決の方向を示すものであり，子どもは問題が何を求めているかを理解しないで問題を解いているのである。これでは，問題は正しく解くことはできないのは当然であろう。

それでは，こうした文章題の表現に示される行為や関係に基づいて答えを出す子どもへの指導はどうしたらよいのだろうか。学校では教師が問題をしっかり見なさいという指導が多くなされている。しかし，子どもは問題に隠されている意味を適切に表象することが困難であるので，問題をしっかり読みなさいという指導だけでは十分な効果はあげないことは明らかである。それではどのような指導が考えられるだろうか。一つには，部分ー全体の関係といった問題の意味から引き出される構造を理解させる指導が重要であろう。というのは，分数概念，割合，たし算やひき算において，部分と全体の知識を子どもは十分に理解してないことが指摘されている（栗山 , 2005；栗山 , 2008; 栗山 , 2002; 吉田･栗山 , 1991; Yoshida & kuriyama , 1995）. 小学４年生で学習する割合の文章題においても，最も基礎的な知識である部分ー全体の知識を子どもは理解していないことが指摘されている（栗山, 2005)。問題で述べられている内容の中で何が全体であり，何が部分であるかという最も基礎的な構造を理解させる必要がある。そうした中で，どの要素が既知数でどの要素が未知数であるかを知ることが重要となる。こうした部分と全体の知識を理解すれば，正しく問題をとくことが容易になると考えられる。実際の教師の指導を見ていると，部分と全体の関係についてのある程度の押さえはしているが，それはほとんど簡単なまとめでしかない場合がかなり多い。学校では，子どもにとって理解が難しい部分と全体の関係の意味をしっかりと指導していないのである。部分と全体の知識が安定したものになれば，文章題の表現に示される行為や関係に基づいて答えを出す誤りは減少していくと考えられる。

さらに，文章題への指導として，本研究で見られた質問文を正しく理解していないことへの指導が考えられる。低学年の子どもでは，何を求めなければならないか理解していない子どもがみられる。何を求めなければならないかを知らないのでは問題を正しく解けないのは当然であろう。問題で何を求めなければならないかを子どもに常に意識させる指導も必要である。

現在の数概念の教授におけるカリキュラムは「教科の論理」に基づいたものであり，そこには子どものインフォーマルな知識や思考を重視した「子どもの論理」が全く組み込まれていない。しかし，最近の認知心理学の研究は，数の教授・学習の領域において，子どものインフォーマルな知識や思考を考えた指導が効果的であるという主張がなされている（Carpenter, et al., 1993; De Corte et al., 1996; 栗山, 2001)。本研究における，文章題の解決において，部分ー全体スキーマの理解という問題構造の理解の困難さが明らかにされた。子どものインフォーマルな知識を取り入れた指導やカリキュラム構成について，今後検討することの重要性を本研究は示している。

今後の課題として，数理解における子どもの知識や思考について，さらに検討していくことが必要である。子どもの数の知識や思考については，分数，小数，加算，減算などで明らかにされつつあるが，まだ割合やかけ算，わり算，おおよその数，など十分に明らかにされていない領域が多い。そうした領域の子どもの知識を明らかにすることは，「子どもの論理」に基づいたカリキュラム構成や指導方法には欠くことのできないものである。今後の課題として，そうした領域でのさらなる検討が必要である。また，こうした子どもの思考過程を基にした認知心理学の理論の応用は，教育実践へ有効であるばかりでなく，認知心理学の理論化も促進することが考えられる（Bruer, 1993; 栗山 , 2001; 栗山, 2002)。

引用文献

Bruer, J. T. 1993 Schools for thought: A science of learning in the classroom. Cambridge, MA: The MIT Press.（松田・森　1997 授業がかわる：認知心理学と教育実践が手を結ぶとき　北大路書房）

Carpenter, T. P., Moser, J. M., & Romberg, T. A. 1982 *Addition and subtraction: A cognitive perspective. Hillsdale*. NJ: Lawrence Erlbaum.

Carpenter, T. P., Fennema, E., & Romberg, T. A. 1993 Toward a unified discipline of scientific inquiry. In Carpenter, T.P., Fennema, E., & Romberg, T. A.（Eds.）, *Rational numbers: An integration of research*. Hillsdale, N.J.: Lawrence.

Chi, M. T., Feltovich, P. J., & Chaser, R. 1981 Categorization and representation of physics problems by experts and novices. *Cognitive Science*, **5**, 121-152.

Cummins, D. D., 1991 Children’s interpretations of arithmetic word problems. *Cognition and Instruction*. **8**, 261-289.

De Corte, E., Verschaffel, V., & De Win, L. 1985 Influences of rewording verbal problems on children’s problem representation and solutions. *Journal of Educational psychology*, **77**, 460-470.

De Corte, E., Greer, B., & Verschaffel, L.1996 Mathematics learning and teaching, In D. Berliner & R.Calfee（Eds.）, *Handbook of Educational Psychology*, Macmillan, New York.

福永靖彦　2008　小学校算数における小数を含むかけ算・わり算文章題の解決過程に関する研究　兵庫教育大学学位論文

Fuson, K. 1988 *Children’s counting and concepts of number*. New York: Springer-verlag.

Gelman, R., & Gallistel, C.R. 1978 *The child’s understanding of number*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Hudson, T. 1983 Correspondences and numerical differences between disjoint sets. *Child Development*, **54**, 84-90.

栗山和広　2001　教授・学習の研究　－認知心理学から教育の実践化へ，そして教育実践から認知心理学の理論化に向けて－　教育心理学年報，**40**，102-111.

栗山和広　2002　幼児・児童における数表象の構造　北大路書房

栗山和広　2005　割合概念における認知的障害　九州保健福祉大学研究紀要，**6**，35-40.

栗山和広　2008　たし算・ひき算の理解に関する発達的研究　九州保健福祉大学研究紀要，**9**，9-15.

Mack, N. K., 1990 Learning fractions with understanding: Building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, **21**, 16-32.

Mayer, R. E. 1992 *Thinking, problem solving, cognition*. Second edition. New York: W.H. Freeman.

Mayer, R. E., Lewis, A. B., & Hegarty, M. 1992 Mathematical misunderstanding: Qualitative reasoning about quantitative problems. In J. I. D. Cambell（Ed.） *The nature and origins of mathematical skills*. Elsevier Scinece Publishers.

Murata, A. 2004 Paths to learning ten-structured understanding of teen sums: addition solution methods of Japanese grade 1 students. *Cognition and Instruction*, **22**, 185-218.

Noelting, G. 1980 The development of proportional reasoning and the ratio concept: Part 1 differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics*, **11**, 217-253.

Resnick, L. B. & Singer,J.A. 1993 Protoquantitative origins of ratio reasoning. In T. P. Carpenter, E., Fennema, & T. A. Romberg（Eds）, *Rational numbers: An integration of research*. Hillsdale, NJ: LEA. Pp. 107-130.

Riley, M. S., Greeno, J. G., & Heller, J.I. 1983 Development of children’s problem-solving ability in arithmetic. In H. P. Ginsburg（Ed.） *The development of mathematical thinking*. New York: Academic Press. pp.153-196.

Sacker-Grisvard, C. & Leonard, F. 1985 Intermediate cognitive organization in the process of learning a mathematical concept: The order of positive decimal numbers. *Cognition and Instruction*, **2**, 157-174.

Saxe, G. B., Tayler, E,V., McIntosh, C., & Gearhart, I. 2005 Representing fractions with standard notation: A developmental analysis. *Journal for Research Mathematics Education*, **36**, 137-157.

Smith J. P. 1995 Competent reasoning with rational numbers. *Cognition and Instruction*, **13**，3-50.

Sowder, J.T. 1988 Mental computation and number comparison: Their roles in the development of number sence and computational estimation. In J. Hibert & M. Behr（Eds.）. *Research agenda for mathematics education: Number concepts and operations in the middle grades*（pp.182-197）. Hillsdale, NJ: Erlbaum, and Reston. VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Torbeyns, J., Verschaffel, L., & Ghesquiere, P. 2005 Simple addition strategies in a first-grade class with multiple strategy instruction. *Cognition and Instruction*, **23**，1-21.

Verschaffel, L., & De Corte, E. 1996 Number and arithmetic. In A. Bishop（Ed.）, *International Handbook of Mathematics Education*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer. Pp.1-44.

吉田甫・栗山和広　1991　分数概念の習得過程に関する発達的研究　教育心理学研究，**39**，382-391.

Yoshida, H., & Kuriyama, K. 1995 Linking meaning of Symbols of fractions to problem situations. *Japanese Psychological Research*, **37**, 229-239.

（2008年９月17日受理）