

小・中学校における分数の意味の拡張に関する研究

志水 廣 出馬栄美¹

数学教育講座

A study of system at a fraction on the elementary school and junior high school

Hiroshi SHIMIZU and Emi IZUMA¹

Department of mathematics

1. 研究の目的

小学校において、分数は非常に難しい単元の一つとしてあげられる。¹⁾その背景について、石田は、次のように述べている。

数学教育の視点からは、主に分数概念の意味の多用さ、分数の意味の複雑さ、分数の表記の複雑さといった要因が考えられている。こうした構造的な要因が分数の難しさに影響を与える要因であるとは、十分考えられる。²⁾(石田, 1985, 21-27)

このように分数は、構造的な難しさを抱えていることがわかる。分数を指導面からみると、小学校段階で一応の完結をみる。つまり、中学校段階では分数そのものが取りたてて指導されることはなく、分数表記として用いられるといえる。では、小・中学校で用いられる分数の意味にずれは生じていないのだろうか。

このような視点に立ち、本研究ではまず、子どもの指導に直接関わる、算数・数学の教科書において、分数指導の系統性を調査する。さらに、それらの定量的なデータから、中学校における特徴的な分数使用の場面を抽出し、小学校における分数使用との差異について議論することを目的とする。

2. 研究の方法

〈調査対象〉

新学習指導要領のもとで今年度(平成14年)から使用されている、K社の小・中学校の算数・数学の教科書を選び、分数の意味について調査した。

〈調査範囲〉

分数指導の始まる、小学校4年生~中学校3年生の教科書において、全単元を調べた。

〈調査の手順〉

教科書の全ての問題を解き、問いを解く中で使われ

るもの、また教科書紙面上で使用される全ての分数表記を抽出した。ただし、bar を持たない「3分の1」のように表記されるような分数も含める。次に、これらのデータを7つの分数の意味に分類した。一般に、分数の意味には、分割分数、操作分数、量分数、割合分数、商分数、という5つの意味があるといわれる。筆者は、これらの意味にさらに2つの意味を加えたい。「位を表す分数」と「形式的な分数」(後述)である。これら7つの分数の意味は、互いにつながりがあり、明確に区別することができない。このため、過去の文献などをもとに、本研究での分数の意味を改めて定義し、分類を行った。

3. 分数の意味

分数の意味は、それぞれの関わりが深く、文献により意味に多少の差異がある。このため、それぞれの意味の関係について示す。その上で、本研究における分数の意味を定義する。

〈分数の意味の関係〉

i. 分割分数と操作分数の関係

操作分数は、分割分数から「~の $1/3$ 」の部分が独立したものとみられる³⁾というように、2つの意味の関わりは深い。このため、2つの意味は、1つにまとめられ、分割分数として考えられる場合もある。しかし、操作分数は、演算子としての機能を持つという点で、本研究では分けて考えた。

ii. 割合分数と操作分数の関係

割合分数と操作分数は、いわゆる「の付き分数」(~の3分の1, ~の $\frac{1}{2}$) と呼ばれる場面で非常に近い意味で用いられる。この2つの分数は、「数としての分数」が乗法的に用いられ、乗法的に働くことを前提としたときの名前である。³⁾

1. 愛知教育大学大学院学生

iii. 分割分数と量分数の関係

分割分数と量分数は、大きさを表すという点で、非常に近い意味を持っている。分割分数の場合、いろいろな大きさを1とみるのであるが、量分数の場合には、1とみるものが定まっている。このため、両者の違いを明確にするには、上記の点を積極的に強調する以外にない。²⁾

iv. 全ての分数の意味に含まれる考え方

分数の意味として、①～⑦に分類したが、それぞれを生み出す過程には何らかの形で、分割するという分割分数の考え方が関与している。³⁾

〈本研究における分数の意味の定義〉

① 分割分数

(1) ある大きさ(1にあたる大きさ)をb等分したものをa個集めた大きさ、あるいはb等分したもののa倍した大きさを意味する。¹⁾

(2) 1をb等分したもの($\frac{1}{b}$ を単位として)をいくつか集めたもの³⁾(分数の第一義)

① 操作分数

(1) $\frac{a}{b}$ は、「b等分したものをa個分取る、あるいはa倍する」という操作を意味する。¹⁾

(2) 「～の3分の1」のような「の付き分数」でbarによる表記がされていないもの。

② 量分数

(1) 量の分数表現を意味する。⁴⁾

(2) 単位量に満たないはしが出た時、そのはしたで単位量を測る(一般には、互除法を適用することによって、はしたの分数表現を得ようとする場合に限定して、量分数を用いることを、意味する。⁴⁾

③ 割合分数

(1) $\frac{a}{b}$ は、「bに対するaの割合」を意味する。⁴⁾

(2) 割合分数は $\frac{a}{b}$ 倍を意味する。

⑤ 商分数(分数の第二義)

(整数)÷(整数)の商を表す。³⁾ ($a \div b = \frac{a}{b}$)

⑥ 位を表す分数

「 $\frac{1}{10}$ の位、あるいは $\frac{1}{100}$ の位」のように、位つまり位置を表す分数のことを、位を表す分数とする。一般には、含まれていない分数の意味であるが、調査をする中で、他の意味の中に、位を表す分数は含めることができない。このため、新たに一つの意味として加えた。

⑦ 形式的な分数

(1) 計算で用いられる分数

(2) 文章題における計算過程で用いられる分数(立式のときに用いられる以外は、形式的な分数とする。計算の過程で、分数が意味を持つとは考えがたいからである。)

(3) 有理数としての分数

有理数の解釈には、次の2つの解釈があった。

文献『算数・数学科重要用語300の基礎知識』によると、「小学校算数では、分数を数直線上の任意の表現とみることが、それに該当する」⁴⁾と書かれている。また、文献『考えながら読む数学教本上』によると、「等しい分数を同じものとして取り扱うとき、有理数という用語を用いる。」¹³⁾と書かれている。

本研究において、筆者は有理数を後者の「等しい分数を同じものとして扱うとき」と定義する。

4. 調査の結果と分析

上記の定義に従い、データを以下のように取った。例えば出てきた分数が、計算練習の中に出てくるものに比べ、教科書の説明で使われるものの方が、意味に重きがあると考えた。このため、問題場面による分類の仕方を行い、重きに差が生まれないようにした。1つの問題場面の中で、同じ意味の分数がいくつか登場しても、1つとカウントする。具体的には、以下のようである。

1.

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \frac{7}{12}$$

(K社教科書6年p63⑤)

この計算で使われている分数は、5個ではなく、形式的な分数が、1個としてカウントしている。

2.

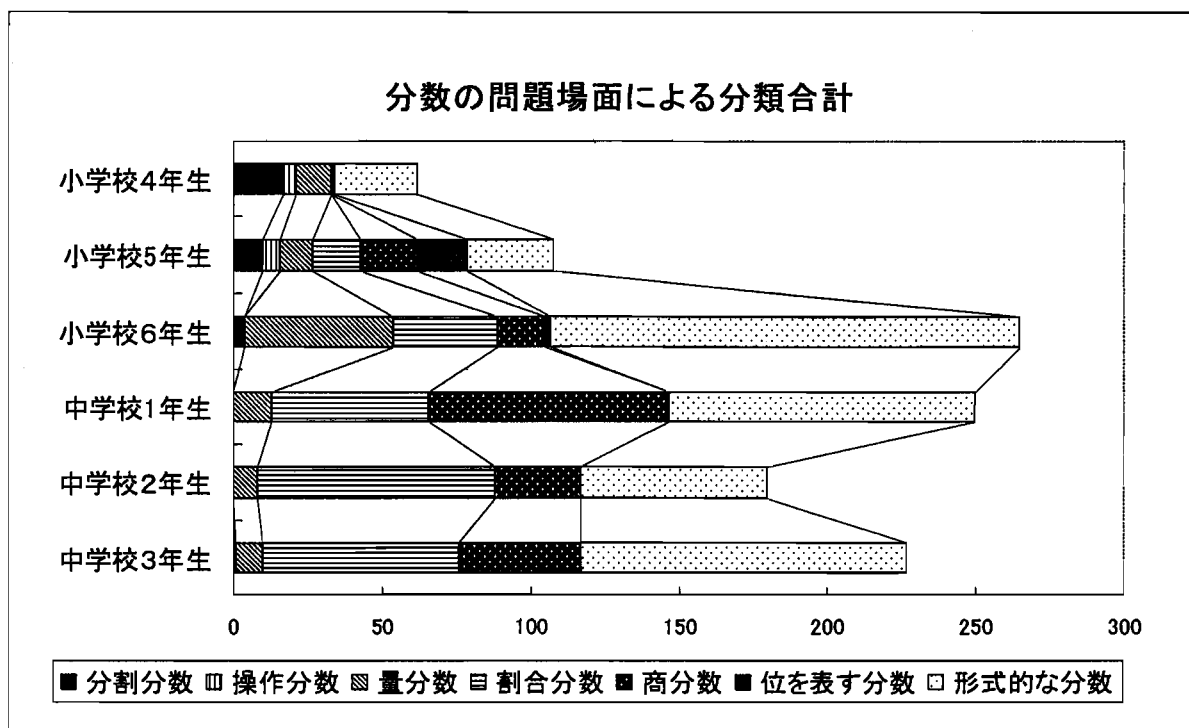
底辺の長さが $\frac{6}{7}$ m、高さ $\frac{2}{3}$ mの平方四辺形の面積

$$\frac{6}{7} \times \frac{2}{3} = \frac{6 \times 2}{7 \times 3} = \frac{4}{7} \quad \frac{4}{7} \text{m}^2$$

(K社教科書6年p20⑦)

この文章問題においては、量分数1個、形式的な分数1個とカウントしている。

このようにして、全ての分数を、意味によって分類を行った。データは、領域別・単元別にまとめ、表にしたものが、p6, 7である。また、全体像を見やすくするため、各学年の分数の意味の出てきた回数をグラフにまとめたものが、p3である。このグラフと表をもとにそれぞれの分数の意味について考えていく。



① 分割分数

上のグラフを見てみると、分割分数の出る個数は、学年を追うごとに減少していくことがわかる。表より、この意味での使用は、ほとんど分数の単元にしかみられない。中学校においては一個のみである。分割分数が4年生で多く用いられる理由は、この分割分数の意味、つまり「等分してできる部分の大きさを表すこと」あるいは「単位分数の幾つ分かで表せること(分数第一義)」を4年生の分数学習のねらいとしているからである。

② 操作分数

操作分数は、小学校4・5年生においてのみ確認できる。表より多く用いられている単元は「分数」と「小数と整数」においてである。「小数と整数」の単元では、十進位取り記数法の拡張として、小数と整数のしくみを学ぶために、操作分数は用いられる。データとして操作分数は、最も少ない値になっている。しかし、上記で述べたように、分割分数あるいは割合分数との関係において、考えていく必要がある。このため、必ずしも操作分数が少ないとはいえない。

③ 量分数

量分数は全学年において、使用される。特に、小学校6年生において多い。6年生で量分数が多用される理由は、小学校の学習のまとめの段階になっているからである。このため、今までに学習した、かさ・距離・面積・重さ・長さ・時間・速さなどの量を使って、文章題が多く出題されることに伴う。表より量分数は、小学校では「数と計算」の領域のみであるが、中学校

では全ての領域において使用がみられる。

④ 割合分数

割合分数は、小学校5年生以降、どの学年段階においても非常に多く使用されている。表を見てみると、領域として「数量関係」や「図形」において割合分数は多い。割合分数が多用される理由は、割合の持つ意味が、全ての領域を通して用いられるからである。このため割合分数は、特に中学校で多く用いられ、分数の意味の中でも、最も注目すべき意味になる。

⑤ 商分数

割合分数と同様、商分数は小学校5年生以降、特に中学校において多用される。表より、特に小学校では「数と計算」、中学校では「数と式」や「数量関係」の領域において商分数の使用が多い。特に文字式が導入される。中学校において式を簡潔に表現するため、また公式や文字式の変形などで、商分数は多用される。見方を変えると、商分数の意味で分数を学ぶことにより、÷の記号の使用が減少していく。高等学校においても、同様に多用されることが予想される。

⑥ 位を表す分数

位を表す分数は、小学校段階においてしか使用がみられない。表をみて見ると、「小数と整数」、「小数のかけ算・わり算」において、位を表す分数が、多く用いられている。中学校段階において、位を表す分数はデータとして認められなかった。

⑦ 形式的な分数

形式的な分数は、グラフより全学年において、平均的に使用されていることがわかる。学年を追うごとに、扱う数も増え、計算も複雑になるため、形式的な分数の使用の増加が納得できる。形式的な分数とは、量という具体的な概念から離れて用いられることになる。つまり、数として分数を扱っていることになる。

このように、子どもの持つ分数意味は学年が進むにつれて、徐々に増え、広がりをもって来る。それと共に、分割・操作といった具体的な量を用いた意味から、割合・商といった抽象的な意味へと変わっていくことがわかる。

5. 考 察

以上の結果より、教材関連上にはずれがあるように思われた。このため、Ⅰ. 割合分数について、Ⅱ. 分数の意味に関するその他の議論を考えていく。

Ⅰ. 割合分数について

分数が使われる場面は、小学校から中学校に移ると、量分数から割合分数へと比重が移動することが、データよりはっきりとわかった。これは関数指導が導入されるためであるが、他の要因を知るため、中学校で用いられる割合分数の使用場面をより細かく見てみると、以下の7つに分けられる。

- ① 変化の割合
- ② 比例定数
- ③ 傾き
- ④ 比の値（相似比を含む）
- ⑤ 確率
- ⑥ 縮小率（あるいは拡大率）
- ⑦ その他

では、上に挙げた7つの意味の中で、“傾き”に注目してみよう。

数学でいう「傾き」という言葉は、日常で使われる意味とは異なっている。辞書を見てみると、

- ①かたむくこと、またその度合。
- ②物事がある方向に、次第に変わっていく様子。
- ③ [数] 平面で、直線がx軸の正の方向となす角。その角を θ とするとき、 $\tan \theta$ をいう。方向係数、勾配

(大辞林)

と書かれている。つまり数学では③の意味、すなわち傾きを角度としては扱わず、2辺の比の値として傾きを捉えていることがわかる。

傾きは、中学校2年生の「一次関数」の単元において初めて登場する。この部分の指導書⁹⁾をみると、

(傾き) = $\frac{\text{高さ}}{\text{水平距離}}$ とある。教科書には、以下のように説明がなされている。

一次関数 $y=ax+b$ で、定数 a, b の値は、それぞれ、グラフ上でどのようなことを示しているか調べてみよう。

直線 $y=2x+3$ 上に、2点

$A(1, 5), B(4, 11)$

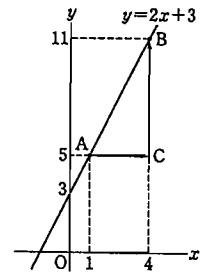
をとると、右の図で、

x軸の正の向きに進む長さ $AC=3$

y軸の正の向きに進む長さ $CB=6$

このとき、 $\frac{CB}{AC}$ の値2は、2点 A, B

を直線上のどこにとっても同じである。

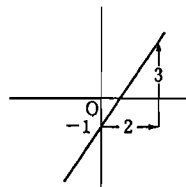


この $\frac{CB}{AC}$ の値2を、直線 $y=2x+3$ の傾き¹⁰⁾という。

(K社の中2の教科書)

つまり、傾き = $\frac{y \text{ 軸の正の向きに進む長さ}}{x \text{ 軸の正の向きに進む長さ}}$ としている。

また、グラフとの関係において、「x軸の正の向きに2進むとy軸の正の向きに3進むから、傾きは $\frac{3}{2}$ である。」(K社の教科書2年)とある。



(K社の中2の教科書)

このように“進む長さ”という表現や上図の矢印が示すように、分母・分子を分けて考え、それぞれが動きを持っている。

このように、分数を動的な見方でとらえることは、初めてである。このため、傾きを表す分数は、新しい分数の意味として、とらえるべきである。ところで、分数がなぜ動的の意味を持つかという点、これは関数概念が、背景になっていると考えられる。関数の考え方は、数量関係を動的にみるということである。このため、ここで扱われる分数の意味にも、動的な見方が必要になるのである。

Ⅱ. 分数の意味に関するその他の議論

その他、この研究に付随して気付いたことを述べたい。

①分数はいつ有理数になるのか。

有理数は「分数を指示する数」であり、分数は「形を意味する数の名前」であるといわれる。本質的には、この数 (number) と数の名前 (numeral) は区別する必要がある。しかし、現実には、伝統的に分数という言葉で分数も有理数も表すようなあいまいな使い方がなっている。だからといって、ここで急激な改め方を行うことは混乱をまねくおそれがある⁹⁾といわれる。

実際小・中学校の段階において、有理数と言う用語は出てこない。しかし、このあいまいな部分に、分数理解の困難さが潜んでいると思われる。

有理数とは、「等しい分数を同じものとして扱うとき、有理数という用語を用いる。」¹³⁾という。このため、等しい分数を学習した5年生の時点で初めて、分数は有理数として扱われているといえる。

見方を変えると、分数を他の整数や小数と同じように演算のできる数として理解するために、等しい分数について学習する場面が非常に重要であるとわかる。

②整数と分数と有理数の関係を、明示してはどうか。

有理数と分数の関係については、初めて高等学校において明記される。ここでいう、分数は、「整数でない分数」の意味で使っている。つまり、「aを整数、bを0でない整数とし、 $a \div b$ の答えが整数にならない時、その答えを記号 $\frac{a}{b}$ で表して、これを分数という」と決

めている。このように考えると、 $a = \frac{a}{1}$ でないという誤解をまねく可能性がある。なぜなら、整数と分数を別々のものと考えているからである。³⁾

具体的に問題になるのは、例えば $y = 2x + 3$ は、傾き2であるから、 $\frac{2}{1}$ とみて「x軸方向に1進むと、y軸方向に2進む」という考え方は上記の考え方に従えば、矛盾が生ずる。この矛盾を解決するためにも、上記のような分数と整数を別のものとする定義は、再考を要すると思われる。

③比と分数の関係を指導するべきではないか。

比は分数の形に、分数は比の形に直すことができる。つまり、 $3 : 5 \leftrightarrow \frac{3}{5}$ ということである。なぜなら、 $\frac{3}{5}$ という分数が、1を5等分したもの、つまり $\frac{1}{5}$ が3個集まったものである。また、3を5で割った数でもある。この後の考え方が、比と同じである。つまり、 $3 \div 5$ というのは5を1と考えたとき3はどれだけになるか(何倍か、何分の1か)という考え方で、比の考え方である¹²⁾とみることができる。

したがって、比と分数の関係は明示する必要がある

のではないと思われる。比の考え方を多用する図形領域において、比を分数と見ることは、必要不可欠といえる。ただし、指導学年は混乱をさけるため、小学校ではなく、中学校において行われるとよいのではないかと思う。

6. 終わりに

小学校の算数と中学校の数学において、分数の意味の認識には、上記に示したようなずれが生じている可能性がある。ここで問題となるのは分数の意味が、暗黙のうちに拡張されていることである。この拡張は、小学校での使われ方と、大いに異なるものであると考えられる。

今後の研究ではこの点に着目し、現在の小学校での指導を踏まえた上でも、中学校の分数の意味理解に困難が生じるのかどうかについて調べていきたい。

<参考・引用文献>

- 1) 平岡 忠編 2001. 小学校算数科指導の研究, 建帛社
- 2) 石田忠男 1985. 分数小数の意味理解はなぜむずかしいか, 教育科学 算数No. 327, pp.21-27
- 3) 川口延 他編 1969. 算数教育現代科全書(3) 数と計算—分数・小数編, 金子書房
- 4) 中原忠男編 2000. 算数・数学科重要用語300の基礎知識, 明治図書
- 5) 福森信夫他 2002. 啓林館, 数学2年
- 6) 福森信夫他 2002. 啓林館, 指導書 新訂 数学2年 第二部 詳説
- 7) 飯島康男編 1993. 算数数学教育 実践的研究の進め方, 東洋館, pp.187-197
- 8) 加藤国雄 1964. 関数教材について, 日本数学教育学会誌 第46巻 第5号
- 9) 磯田正美他 1990. 関数の活用の仕方と表現技法の発達に関する調査研究—小・中・高にわたる発達と変容, 日本数学教育学会 第72巻 第1号 数学教育44-1
- 10) 畦森宣信 1995. 一次関数の指導のポイント 中学校数学科教育実践講座刊行会編, CRECER中学校数学科教育実践講座 第8巻 関数, ニチブン 第2版, pp. 227-231
- 11) 東京教育大学初等数学教育研究会編著 1956. 算数と生活の辞典, 小峰書店
- 12) 志賀浩二 1992. 数の誕生 数学が生まれる物語 I, 岩波新書
- 13) 彌永昌吉 1991. 考えながら読む 数学教本上, 朝倉書店, pp.90

(平成14年9月2日受理)

★分数の問題場面による意味の分類

○学年別総合計

学年	意味							合計
	分割分数	操作分数	量分数	割合分数	商分数	位を表す分数	形式的な分数	
小学校4年生	17	4	12	0	0	1	28	62
小学校5年生	10	6	11	16	19	17	29	108
小学校6年生	4	0	50	35	16	2	158	265
中学校1年生	0	0	13	53	81	0	103	250
中学校2年生	0	0	8	80	29	0	63	180
中学校3年生	1	0	9	66	41	0	110	227
合計	32	10	103	250	186	20	491	1092

○学年別の分類の詳細

小学校4年生

領域	単元	意味							合計
		分割分数	操作分数	量分数	割合分数	商分数	位を表す分数	形式的な分数	
数と計算	大きな数	0	0	0	0	0	0	0	0
	割り算	0	0	0	0	0	0	0	0
	小数	0	0	0	0	0	0	0	0
	わり算	0	0	0	0	0	0	0	0
	分数	14	4	12	0	0	1	23	54
量と測定	面積	0	0	0	0	0	0	0	0
	角の大きさ	0	0	0	0	0	0	0	0
図形	円と球	0	0	0	0	0	0	0	0
	三角形	0	0	0	0	0	0	0	0
数量関係	折れ線グラフ	0	0	0	0	0	0	0	0
	式と計算	0	0	0	0	0	0	0	0
	変わり方	0	0	0	0	0	0	0	0
	調べ方と整理のしかた	0	0	0	0	0	0	0	0
	何倍でしょう	0	0	0	0	0	0	0	0
	いろいろな分度器づくり	0	0	0	0	0	0	0	0
	算数と生活	0	0	0	0	0	0	0	0
もうすぐ5年生	1	0	0	0	0	0	1	2	
算数のまど	2	0	0	0	0	0	4	6	
合計		17	4	12	0	0	1	28	62

小学校5年生

領域	単元	意味							合計
		分割分数	操作分数	量分数	割合分数	商分数	位を表す分数	形式的な分数	
数と計算	小数と整数	0	5	0	8	0	3	1	17
	小数のかけ算とわり算(1)	0	0	0	0	0	4	0	4
	計算の見積もり	0	0	0	0	0	0	0	0
	小数のかけ算とわり算(2)	0	1	0	3	0	3	0	7
	分数	9	0	10	0	15	2	21	57
量と測定	面積	0	0	0	0	0	0	0	0
	垂直と平行	0	0	0	0	0	0	0	0
図形	四角形	0	0	0	0	0	0	0	0
	円	0	0	0	1	0	1	0	2
数量関係	変わり方のきまり	0	0	0	0	0	0	0	0
	式と計算	0	0	0	0	0	0	0	0
	同じものに目をつけて	0	0	0	0	0	0	0	0
	割合	0	0	0	1	0	1	0	2
	数字ならべ	0	0	0	0	0	0	0	0
	折り紙遊び	0	0	0	0	0	0	0	0
	算数と生活	0	0	0	0	0	0	0	0
もうすぐ6年生	0	0	0	0	1	0	2	3	
算数のまど	0	0	0	2	1	0	3	6	
復習	1	0	1	1	2	3	2	10	
合計		10	6	11	16	19	17	29	108

小学校6年生

領域	単元	意味						合計	
		分割分数	操作分数	量分数	割合分数	商分数	位を表す分数		形式的な分数
数と計算	整数	0	0	3	0	1	0	27	31
	分数のたし算・ひき算	0	0	3	0	1	0	28	32
	計算の見積もり	0	0	0	0	0	0	0	0
	分数のかけ算	2	0	16	6	2	0	28	54
量と測定	分数のわり算	0	0	15	11	3	0	20	49
	単位量あたり	0	0	0	0	0	0	0	0
	体積	0	0	0	0	0	0	0	0
図形	割合を使って	1	0	0	8	1	0	8	18
	立体	0	0	0	0	0	0	0	0
数量関係	平均とその利用	0	0	0	0	0	0	0	0
	比例	0	0	0	0	0	0	0	0
	変わり方を調べて	0	0	0	0	0	0	0	0
	比とその利用	0	0	0	0	0	0	0	0
算数と生活	どんな形ができるかな	0	0	0	0	0	0	0	0
	1000cmの箱づくり	0	0	0	0	0	0	0	0
	算数と生活	0	0	2	2	2	0	3	9
	6年のまとめ	1	0	4	4	5	2	17	33
	算数のまど	0	0	3	2	0	0	12	17
	復習	0	0	4	2	1	0	15	22
	合計	4	0	50	35	16	2	158	265

中学校1年生

領域	単元	意味						合計	
		分割分数	操作分数	量分数	割合分数	商分数	位を表す分数		形式的な分数
数と式	正の数・負の数	0	0	0	0	4	0	36	40
	文字の式	0	0	7	1	28	0	19	55
	方程式	0	0	1	0	9	0	15	25
数量関係	比例と反比例	0	0	0	14	30	0	8	52
図形	平面図形	0	0	3	17	0	0	9	29
	空間図形	0	0	0	14	0	0	2	16
算数と生活	一年の復習	0	0	2	7	10	0	14	33
合計	合計	0	0	13	53	81	0	103	250

中学校2年生

領域	単元	単元						合計	
		分割分数	操作分数	量分数	割合分数	商分数	位を表す分数		形式的な分数
数と式	式と計算	0	0	0	1	15	0	18	34
	連立方程式	0	0	2	10	3	0	10	25
図形	図形と合同	0	0	0	4	0	0	0	4
数量関係	一次関数	0	0	4	31	8	0	17	60
	確率	0	0	0	24	0	0	8	32
算数と生活	自由研究	0	0	0	1	0	0	1	2
	2年生の復習	0	0	2	9	3	0	9	23
合計	合計	0	0	8	80	29	0	63	180

中学校3年生

領域	単元	単元						合計	
		分割分数	操作分数	量分数	割合分数	商分数	位を表す分数		形式的な分数
数と式	式と計算	0	0	2	0	5	0	11	18
	平方根	0	0	0	0	5	0	35	40
	二次方程式	0	0	0	0	8	0	5	13
図形	図形と相似	1	0	1	18	7	0	16	43
	三平方の定理	0	0	3	8	0	0	6	17
数量関係	関数 $y=ax^2$	0	0	1	20	5	0	13	39
	生活と数学	0	0	0	3	0	0	1	4
	中学3年生の復習	0	0	2	17	11	0	23	53
合計	合計	1	0	9	66	41	0	110	227