愛知教育大学研究報告，48（教育科学編），pp. 97～104, March, 1999

年少児における乗除算概念の理解とその発達

坂　本　美　紀
Miki SAKAMOTO
（心理学教室）

1　乗除算の性質と本論文の目的

子どもたちは，学校に入学して算数を習うよりずっと以前に，算数・数学的な考えの現れと見なせる活動に従事している。ものの数を数えたり，計数の方略を用いて簡単な加減算を行ったり，アメを分配したりチョコレートを分割したりする，などの活動である。これらの活動は，小学校で学習する算数を理解するための基礎となっているのではないだろうか。本論文では，これまでにまとまった著作の少ない乗除算概念の理解を対象に，この点について検討する。

乗除算については，加減算の学習後に教えられる演算である，という見方が一般的である。乗算といっても，全く新しい演算ではなく，例えば2×4とは2を4回足すこと（＝2＋2＋2＋2）だというように，加算の繰り返しとして捉えられる。このように，除算も乗算もこれまで学んできた加減算の知識をもとに理解することができると考えられているのである。この見方によれば，乗算や除算を使う状況やその手続きを学ぶために，子どもたちがこれまでの考え方を大きく変える必要はないということになる。

しかしながら Piaget とその共同研究者たちをはじめとする様々な研究者たちが，この見方に疑義を唱え，乗除算の理解は子どもの思考において質的な変化が起こったことの現れであると主張した。ここでは，Vergnaud (1983,1988,1997) に従って，乗除算が加減算とどう違うのかについてみていくことにする。Vergnaud は，乗除算を含む広範な概念領域の構造を明らかにしたが，この理論によれば，加減算と乗除算は異なる概念領域の演算であり，前者は加法的構造を，後者は倍数的構造を持つとされている。倍数的構造の概念領域（multiplicative conceptual field）とは，比・有理数・ベクトル空間などを含む広範なものである。Vergnaud は，倍数的な関係を，4値の関係として捉えた。例えば次のような問題を考えてみよう。「テーブルには脚が4本あります。テーブル5つでは，脚は全部で何本になるでしょう」。この種の問題は，一般的には“脚の数”，“テーブルの数”，“テーブルごとの脚の数”の3値の関係として扱われる。ここでは，テーブルごとの脚の数が4本で，テーブルの数が5，脚の数は全部で？本と考えられる。しかし，Vergnaud の分析では，この問題は測度1（テーブル）と測度2（脚）の2つの基本次元からなるものであり，また各次元は2数を含む。従って，この問題は次のように示される。

テーブル（測度1）	脚（測度2）
1	4
5	?

つまりこれは，テーブル1に対し脚4という比を示してテーブル5に対する脚の数の比を問う問題なのである。Vergnaud はこのような4値の関係を測度の同型（isomorphism of measures）と呼んだ。式で表すと，a：b＝c：d の関係である。乗除算はこの4数のうちの1数の値が1である特殊な場合であり，2つの測度空間の間の正比例関係からなる構造を持つ演算なのである。Vergnaud (1988) は，この考えに基づいて，乗除算の問題を，さらに次のように分類した。

$$\begin{array}{c|c} 1 & f(1) \\ x & f(x) \end{array}$$

という状況において，他の2数が分かっている場合に“f (x)”を求めるのが乗算，同じく他の2数が分かっている場合に“f (1)”を求めるのが等分除，“x”を求めるのが包含除である。除算の問題が，さらに2種類に分類されているのに注意されたい。この点については，後で詳しく述べる。

以上のように，乗除算は，計数の知識を基礎にした加減算とは異なる，新しい概念の演算なのである。従って，「初期の加減算から乗除算へ至る道は，滑らかな一本道ではない」（Hiebert & Behr, 1988, p.8）のだが，残念なことに Vergnaud の研究の主眼は概念領域の分析にあったため，乗除算の概念獲得の様子やその難しさについての示唆は行われていない。

本論文の目的は，乗除算の概念を完全に理解するまでに子どもたちがたどる多くのステップについての諸研究を概観することである。具体的には，乗除算概念の理解の起源と考えられている知識や技能を，就学前

児や学校などで乗除算について学ぶ以前の児童が，どの程度獲得しているのかについて明らかにしていく。

2　乗除算の理解の基礎

乗算や除算には，加算や減算の延長で理解できる側面もあるが，そうでない側面もある。乗除算を理解するためには，新しい数の意味や新しい不変量について学ばなければならない。これらは加減算にはなかったものである。加法の推理が関わるのは，対象物またはその集合が，一緒にされたり分けられたりする状況である。加法の状況における数の意味は，集合の大きさや，対象をまとめたり分けたりする行動に，直接関わるものばかりであった。一方，乗法の推論が関わる状況は，これらとは異なっている。乗法の状況は，主に次の３種類に分けられる。(1)１対多の対応の状況，(2)変数間の関係に関わる状況，(3)分配・除算・分割に関わる状況である。

まず，最もシンプルな乗法の状況は，Fig.１に示すように，ふたつの集合間に１対多の対応がある場合である。例えば，自動車には車輪が４つある（１：４），テーブルには足が６本ある（１：６），などの状況がこれにあたる。これを理解するためには，子どもたちは新しい数字の意味をふたつ獲得しなければならない。集合のサイズが変化しても，数のペアは不変だという割合と，ふたつの集合が一定の割合を保つためには，両者に同じ回数の複製が適用されていなければならない（つまり，車の数が２倍になれば，車輪の数も２倍になる）というスカラー要因のふたつである。

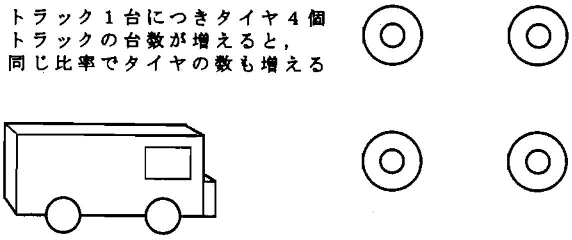

Fig.1　１対多の対応の状況

第２の状況は，２変数が共変する状況である。１キロ1.6フランの砂糖0.5キロでは0.8フランである，20ｇのおもりで15cm延びるばねに10ｇのおもりをつけるとのびは7.5cmになる，などの状況がこれにあたる。共変の状況と１対多の対応の状況とは，次の２点で異なっている。１）数は，集合ではなく，変数がとる値を表していること，２）不変の関係は，比ではなく，キロ当たりの値段などという，２変数をつなぐ第３の変数すなわち内包量（intensive quantity）で表現されることである。従って，この状況を理解するためには，子どもたちは異なった概念を獲得しなければならない。Fig.２は，これらの数の意味を図的に表現したものである。

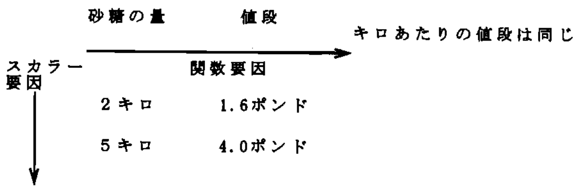

Fig.2　共変の状況における数の意味

第３の状況は，分配活動に関わる状況である。ここでは，子どもたちは３つの集団の関係を理解する必要がある。例えば，アメの総数と子どもの数，一人あたりのアメの数である。子どもの数が同じでアメの総数が増えれば，一人あたりのアメの数も増加する。しかし，アメの総数はそのままで子どもの数が増えれば，一人あたりのアメの数は少なくなり，子どもの数と一人あたりのアメの数とは逆の関係にある。分配や連続分割では，こういった新しい関係が理解されていなければならない。

では，こういった乗法的状況の理解が，年少児においてどのように発生し，発達していくのかについてみてみよう。

3　乗 算 の 理 解

乗法的推理には多くの異なったレベルが存在する。倍数的構造の概念領域に含まれる比の理解などは，形式的操作期にならないと獲得されないが，子どもたちは，乗除算の理解の第一歩を，もっと幼い時期に踏み出している。

3．1　理解の起源

乗算の理解の起源について，Piaget (1965) は，５，６歳の子どもでも初歩的な乗算の概念を持っていることを示した。最初の乗算概念は，対応のシェマの発達に由来するという。子どもはまず１対１対応を理解し，それをもとに１対多の対応を理解するのである。子どもに並べたオハジキを見せ，これと同じ数だけオハジキを並べるよう教示すると，５，６歳であれば，１対１に対応するようにオハジキを並置することができる（ただし，視覚的な対応の布置が崩された場合の１対１対応は，次の発達段階にならないとできないとされている）。Piaget (1965) は，子どもたちに，花瓶と花などの異なる対象物を１対１対応させたり１対多対応させたりする課題を与え，１対２の対応関係の理解が５，６歳で芽生えていることを示した。

また，Frydman and Bryant (1988) は，４，５歳児を対象に，子どもたちの分配能力と数の理解とを，より実験的な手法で検討した。２～４体の人形にアメを等しく分けさせる課題と，分けられたアメの同値性について問う課題を実施したところ，４歳児であっても，１つ目を人形Aに，２つ目を人形Bに，という分

配を繰り返す1対1対応を使って，正しく分配することができた。だが，分配の結果が等しくなることを数えずに認識できていた子どもは，4歳ではそう多くなかった。この年齢では，1対1対応のやり方は知っていても，その原理についてはまだ理解できていないと考えられる。

続いて，一方には2個一組のアメを，他方には1個ずつのアメを与えなければいけないという条件で同様の課題を実施したところ，1個ずつのアメばかりの条件では正しく分配できた子どもたちでも，2体の人形のアメの数を等しくすることに困難を示した。この条件では，2個一組のアメひとつに対して，1個ずつのアメが2個必要になるのだが，4歳児のほとんど全員と5歳児の一部は，ここでも1つ目をAに2つ目をBにという分配方法で両方の人形に同じ組数のアメを与え，結果として一方のアメの個数が他方の2倍になるという誤りを犯したのである。これらの子どもたちは1対多対応ができないのだろうか。それとも，彼らは単に，2個一組のアメが1個ずつのアメ2個に等しいことを，十分に理解していなかったのだろうか。この点を明らかにするために，続く実験では，2個一組のアメを2色で塗り分け，2個分であることを強調した。この課題を体験した4歳児は，その後のポストテストで好成績をおさめ，1対2の対応が理解されていることを示したのである。

その他の1対多対応の理解はどうであろうか。Frydman (1990, Nunes & Bryant (1996) より引用) は，1対2と1対4，1対2と1対3といったより複雑な割合で，同じ数の集合を作れるかどうかを検討した。前者の条件は，比の大きい方の数が小さい方の数の倍数になっているので，例えば2個一組2つに対して4個一組1つを対応させればよく，比較的易しいが，後者の条件では，大きい方の数が倍数ではないので，2個一組3つに対して3個一組2つを対応させる必要があり，加法の推理では解けなくなっている。この対応に気づくためには，2個一組3つで6個になることを計算したり，あるいは2×3と3×2が等しくなるという交換法則を用いたりしなければならないが，それはこの年齢の子どもたちには困難であった。

以上のように，5歳児は，1対多の対応についての様々な問題を解くことができる。例えば，対応に基づく推論を行ったり，数が小さく比の関係が簡単な場合に，等しい数の集合を作ったりすることができる。ただし，関係が複雑になると，6歳児でも対応づけが困難である。

ここで注意しておきたいが，乗算の基礎が理解されることと，乗算の問題が解けるようになることとは同じではない。1対多の対応に関わる数字の問題を解くことは，関係について推理することより困難である。関係についての推理は4，5歳児でもできるが，乗算の計算が要求される問題では，簡単なものでさえ，完全にマスターするのはもっと年齢が上がってからである。

また，2節でも述べたように，乗算にはもうひとつ，2数が共変するという状況があり，これまでみてきた1対多の対応の状況とは異なった数字の意味を獲得することが必要である。内包量の理解は非常に難しく，多くの研究がなされているが，紙幅の関係で本論では扱わない。

3.2 理解の発達

乗算についての数学的特性の理解は，計算の習得よりもさらに後になる。例えば，先程も述べたように，乗算の交換法則の理解は難しい。しかし，問題の状況によっては，交換法則が理解しやすい状況もある。例えば，4個入りのバッグ6つ分のオレンジは，6個入りのバッグ4つ分のオレンジと等しいが，このような1対多対応の状況という文脈での交換法則の理解は，確かに易しくない。しかし，空間的な配列の問題では違ってくる。椅子を長方形に配列する際に，縦4列×横6列に並べる場合と縦6列×横4列に並べる場合とが等しいことは理解しやすいのだ。Nunes and Bryant (1995) は，9—10歳の児童を対象に，2種類の問題状況で，交換法則の理解を比較した。実験1では，34×73と73×34などといったふたつの乗算の状況を提示し，2量が同じであるかどうか判定させた。問題は，暗算では解けないレベルのものであり，交換法則を使わないと答えることが難しい。問題の半数は1対多対応の文脈で，半数は行×列の回転の文脈で提示された。問題の例を Fig. 3 に示す。交換法則が使える問題での正答率は高かったが，交換法則が適用できない問題での正答率がチャンスレベルを下回っていたことから，2量が「同じ」と応えるバイアスがかかっていた可能性があり，9，10歳児では，乗算の交換法則を正しく理解できていないことが明らかになった。ただし，どちらの問題でも，回転問題の正答率が1対多対応問題よりも高くなっており，回転問題では交換法則を利用しやすかったことが示された。

実験2では，b×aの問題を解く際に，a×bの積を利用するかどうかを指標として用いた。まず，劇場の椅子の数を求める，などという問題の状況を説明し，a×bの積を教える。続いて関連する問題について質問し，電卓を利用して答えを求めてもらうが，その際，交換法則が使えるb×a問題では電卓の必要がないことがわかるかどうかで，交換法則の理解を検討した。実験の結果，交換法則問題では計算しなくていいことを理解している様子が示された。特に，回転問題を与えられた群では1対多対応問題を与えられた群よりも多く交換法則が利用され，回転の問題では，交換法則が理解できていることが明らかになった。ただし，交

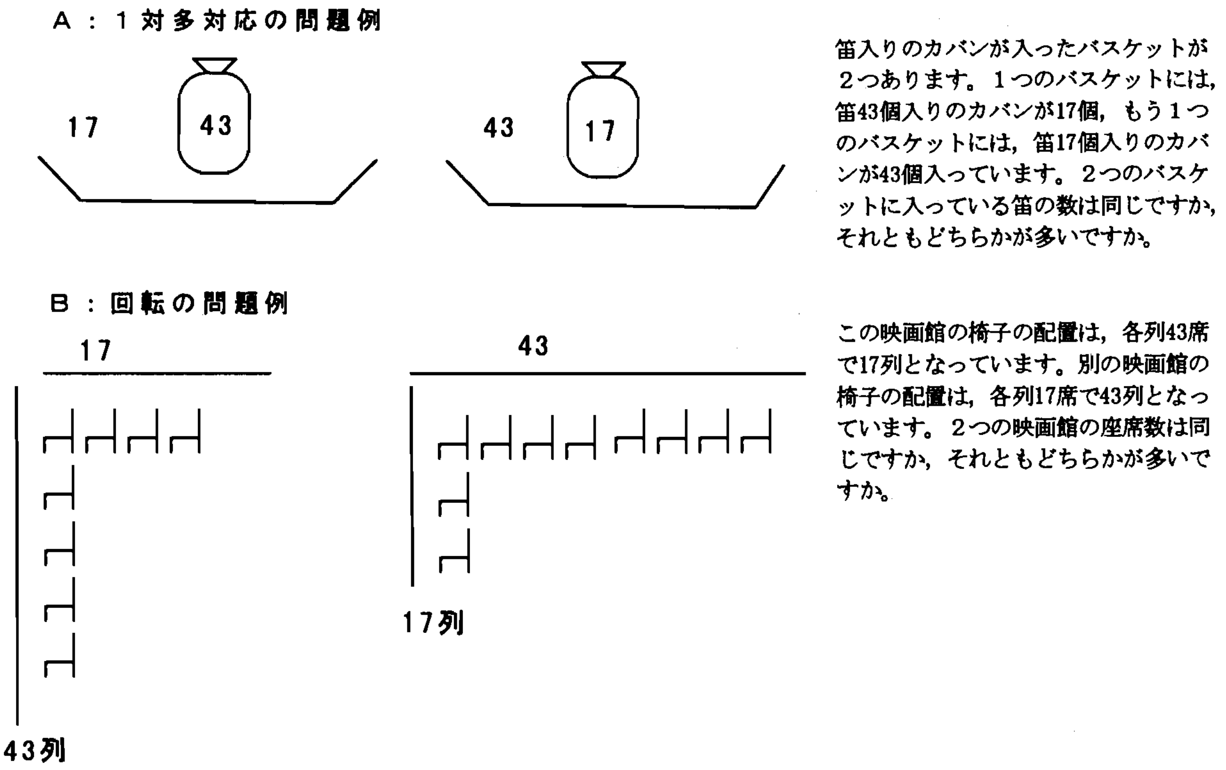

Fig.3　Nunes & Bryant (1995) の実験で使用された課題

換法則が利用される頻度は小さい数の問題を与えられた群の方が高く，大きい数の1対多対応問題では，ほとんど全員の子どもが電卓を使って計算していた。交換法則の利用は，この年齢の子どもたちにはまだ難しいようだった。

以上の結果から Nunes らは，交換法則のような数学的特性の理解は，問題の状況によって異なり，1対多対応の問題は，解くのは易しいが交換法則を理解するのに最適な文脈ではないと結論した。交換法則の理解がどうやって起こるのかについて，Nunes らは次のような仮説を立てた。子どもたちはまず，空間的な回転についてのインフォーマルな経験に助けられて，回転問題で交換法則を理解する。さらに，乗算の指導を受けることによって，または異なった文脈に同じ演算を適用する経験を通して，子どもたちは最終的に回転問題と1対多対応の問題が同じ乗算の問題であることを理解し，1対多対応の問題にも交換法則を適用するようになるのである。子どもたちが，日常生活での回転問題の文脈において原則を把握しているにもかかわらず，交換法則を理解するのに学校教育が重要であるのはこういった理由だと Nunes らは述べた。彼らの仮説の検証は今後の研究を待たねばならないが，この実験の結果から導き出される教育実践に対する示唆は次のようなものである。それは，教師は，子どもの持つ数学的理解が，日常経験に根ざしていること，従って，ある数学概念は他のものよりも理解しやすいことに注意すべきだということである。

4　除算の理解

子どもたちは，数値のみの除算の問題が解けるのに先立って，分離量や連続量の除算に関わる関係を理解する。本節では，除算を学習する以前の子どもたちが持つ除算概念について検討した研究を紹介する。

4.1　集合を分ける

除算の理解の起源は分配の理解にあるという主張がしばしばなされる。分配に関する研究からは，就学前の子どもでも，分割量の性質について直観的に理解していることが示されている (e.g. Frydman & Bryant, 1988)。5歳児であっても，対象物がなくなるまで「ひとつはあなたに，ひとつは私に」という分配手続きを繰り返して，集合を等しい量に正しく分けることができるし，同じやり方で分配結果について推論を行うこともできる。しかしながら，演算としての除算は，分配と同じものではない。分配においては，各人に等しい量が与えられたかどうかだけを考慮すればよいが，除算では，割る数と割られる数と商の3つの項の関係が関わってくる。つまり，割られる数が一定の時，商の値は割る数によって決まり，逆の関係にあるということが理解されている必要がある。子どもたちは，この関係を理解しているのだろうか？

Correa, Nunes, & Bryant (1998) は，5～7歳児を対象に，除算の3つの項の関係の理解について検討した。実験課題では，ピンクと青の2グループのウサ

ギに一定量のアメを分け与えてみせ，各ウサギの分け前がピンクと青とで等しいかどうかを質問した。回答にあわせてその理由も述べさせた。ウサギの背中には箱がついていて，アメはそこに入れられて見えなくなるので，子どもは分割結果について推論しなければ答えられない。実験課題は6試行からなり，割る数が同じである課題と異なる課題とがそれぞれ3試行ずつ含まれていた。

全体として，割る数が異なる課題は同じ課題よりもずっと難しかったが，課題の成績は年齢とともに向上し，割る数の大きさと商の大きさとの逆の関係を理解している者の割合は，5歳児で30%，6歳児で55%，7歳児になると85%であった。これより，6歳児の約半数とほとんどの7歳児は，除算の仕方は知らなくても，割る数と商の逆の関係について推論できることが明らかになった。また，子どもの誤答のタイプの分析からは，7歳児では，少ない誤答の大多数が，人数の多いグループのウサギが多くのアメを得るというタイプのもので，これらの子どもたちが，「割る数が大きくなると商も大きくなる」という誤った概念を持っていることが示された。

さらに，子どもたちが行った理由づけにおいても，年齢差が見られた。5歳児においてはほとんどが，理由づけができないか，関連する数学的事実に言及しない理由づけ(例えば，「みんな同じ数だよ。公平だからケンカしないよ」)しかできなかった。それに対して7歳児では，理由づけの大多数が課題への論理数学的アプローチを示すものであり，割る数と商の正しい関係を反映した理由づけをすることができた。6歳児は，そのような関係をちょうど理解し始めた時期で，関連する情報を使わない判断が減り，より精緻化された判断が増えてきていた。7歳児では，レベルの低い理由づけによる誤答は少なく，「どちらもアメは12個だから等しい」「ウサギが同じ数だけいるから等しくなる」などと，数学的な事実に着目するがその情報を正しくないやり方で使用したことによる誤答であった。

これより，エラーの多くは，偶然に生じているのではなく，子どもが量に関する分配や加法的関係の経験を一般化しすぎたことによると考えられる。Correa et al. (1998) は，子どもたちが行った理由づけプロトコルをもとに，エラーを引き起こしている原理を次のように考察した。まず，受取手の数が違うにもかかわらず，両グループのウサギが同数のアメを得ると答え，それを「どちらもアメは12個だから等しい」などど分配の一側面だけに言及して説明した場合，子どもたちは主として，分けられる量が等しいことに着目している。両グループがそれぞれ同じ数のアメを分けたのであれば，それは公平なわり算であり，全てのウサギが等しい量を得られると考えるのである。そのため，子どもたちは受取手の数がグループで異なることを考慮に入れ（られ）ないのだ。また，人数の多いグループのウサギが多くのアメを得ると答え，それを「ウサギが多いからこちら（のグループ）が多くなる」と説明した場合，子どもたちは主として，各グループのウサギの数に着目している。「ウサギの数が多ければ，アメがたくさん必要であり，アメが多くなれば，得られるアメの数も多くなる」と考えたのだ。これはおそらく，子どもたちが加法的関係を過度に一般化し，割る数と商との間に正の関係があると結論してしまったためであろう。

同様の研究に Sophian (1997) がある。ここでは，ピザモンスターが一口ピザを分けるという設定で，量の分配における部分の数と各部分のサイズとの関係についての，5～7歳児の理解を検討した。実験で使用された課題の例を，Fig. 4 に示す。まず，受取手の数が同じでピザの総数が増えれば，一人あたりの分け前が増加することは，どの年齢でもよく理解されていた。しかし，ピザの総数はそのままで受取手が増えれば，一人あたりの分け前が減ることの理解は難しいようで，このタイプの問題では，誤答数が正答数を上回る子どもが多かったが，一貫して誤答した子どもは少なく，受取手が多い場合と少ない場合のどちらが多くなるのか確信が持てないでいる様子がうかがわれた。しかしこの実験では，総量が操作される場合と受取手の数が操作される場合との2タイプの問題が取り混ぜて課されており，このことが子どもたちの遂行を低下させた可能性がある。従って次の実験では，受取手の数を操作する問題のみを出題したところ，7歳児が好成績をおさめた。5歳児でも，分配結果の比較を取り入れた試行を導入すると，後の方の問題では遂行が急激に向上した。しかし，与えられた情報を思い出して答えたのか，量の関係を理解してそれに基づいて答えたのかは，この実験からではははっきりしない。従って，分配結果を見る経験に実験的統制を加え，フィードバックからの学習の一般化について検討した。訓練実験の結果，5歳児は，わずかな訓練を受けただけで，分配数と分配された量との関係を理解できるようになることが明らかになった。これより，分配についての直観的な知識には，さまざまな分配の経験だけではなくて，分配の結果を比較する経験が重要であることが示された。

4.2 連続量を分ける

分数をはじめとする有理数の理解の起源は，除算の状況にある。特に，前節で検討した分離量ではなく，連続量の分割を考えると，そのつながりは明らかである。チョコレートバーのような連続量を分割すると，その結果は分数で表されるものになる。分割において新しい数が得られる時，そこにはふたつの関係が存在する。全体と比べる数との関係，そして分割数と比べ

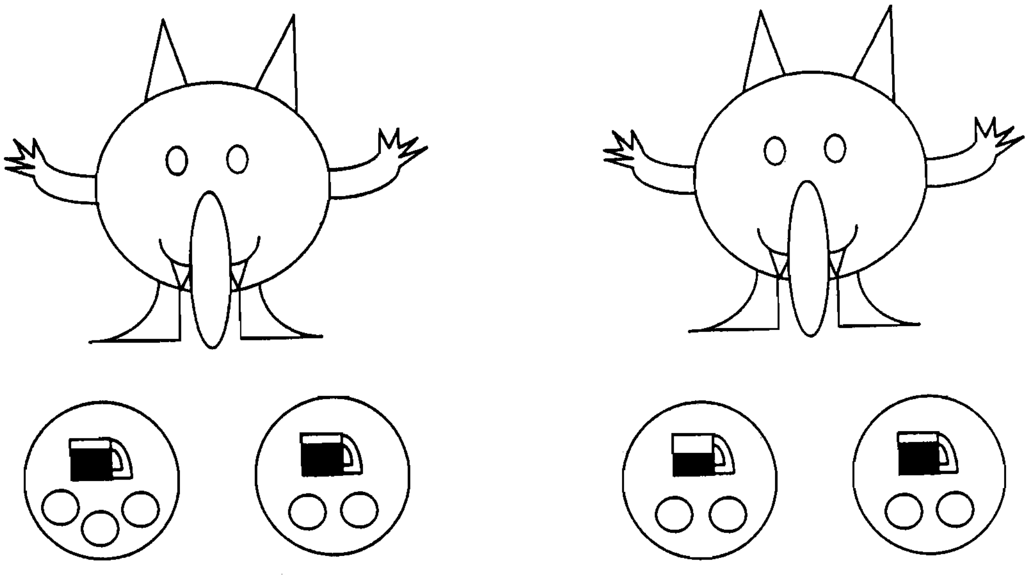

Fig.4　Sophian (1997) の実験で使用された課題
左図はピザの総数はそのままで受取手が変化する問題で，右図は受取手の数が同じでピザの総数が変化する問題である。

る数すなわち商との関係である。連続量であるチョコレートバーを分配する状況においても，子どもたちは，分離量であるアメの分割の場合と同様に，分割数と商との逆の関係を理解できるのだろうか。

この問題に関する研究はほとんどなく，特に分離量と連続量とで子どもの除算概念を比較した研究は皆無である。しかし，他の目的で行われた研究だが，その中でこの問題に対する最初の答えを提供しているものがある。Desli (1994, Nunes & Bryant (1996) より引用)は，前述の Correa et al. (1998) と同じ問題状況においてチョコレートバーを分けるという設定で，6－8歳児の調査を行った。チョコレートの数か受取手の子どもの数を変化させた際に，受け取るチョコレートの量が2グループで等しいかどうかを判断させたところ，正答率は，6歳児75%，7歳児85%，8歳児では95%に達していた。これらの子どもたちは，分離量での結果と同様，割る数の大きさと商の大きさとの逆の関係を理解しているといえる。また，先行研究と同様に，ウサギの数が多いグループの方が多くのチョコレートを得られるという誤答をした子どもの数を調べたところ，6歳児よりも7歳児でこのような誤答が多いことがわかった。この年齢では，チョコレートの数と子どもの数というふたつの変数を考慮して推論を行うことは難しく，割る数と商との逆の関係を，正の関係として取り扱ってしまう子どもがでてくることが再度確認された。

また，対象年齢は少し上になるが，分数を教室で学習する以前の小学3年生に，分数の基礎となる概念についてテストした研究がある（吉田・栗山，1991)。ここでは，例えば［1本のチョコレートを3人で分けるときと5人で分けるときでは，1人分はどちらが多いでしょう］などといった課題が与えられた。こうした課題に正しく答えた子どもは，3年生全体の86%にも達していた。5人の方が大きいと誤って答えたのは，わずか7%の子どものみであった。8～9歳になると，ほとんどの子どもが分数の大きさを量として適切に捉える基礎を持っているといえる。

連続量における逆の関係の理解については，今後の研究が待たれるが，分数の理解や計算手続きの習得に先立って，7歳児では大多数が，6歳児でもかなりの数の子どもが，この関係を理解していることがじゅうぶん予想される。

4.3　もうひとつの分配　―包含除

本論文の冒頭でも述べたように，除算には，これまで検討してきた等しい分配に関わる等分除の問題の他に，等しい数ずつ分配するという包含除の問題がある。包含除でも，等分除と同様，割る数と商とが逆の関係になっている。しかし，ふたつの問題は，少なくとも低い年齢においては，心理学的に異なる概念であると考えられている。子どもたちが，具体物を用いて2種類の問題を解くやり方を考えてみれば，両者の違いが明確になる。等分除の問題では，子どもたちは，1対1対応の方法でアメを分け，分け前を数えれば受取手一人分のアメの数を知ることができる。それに対して包含除の問題では，子どもたちは，アメを4個取って，また別の4個を取って…と，各割り当てを次々につくっていき，割り当て分と受取手のウサギとを1対1対応させる必要がある。包含除の問題は，何分割かした結果を求める通常の分割の逆だと捉えられる。分割結果が与えられていて，それが何分割によるものかを答える問題なのだ。従って，包含除の問題では，割る数と商との逆の関係は，等分除の場合よりも後にならないと理解されないことが予想される。

Correa et al.（1998）は，実験2で包含除における割る数と商との関係の理解を検討し，前節で述べた等分除での理解との比較を行った。実験の設定や対象年齢は等分除の場合と同じであった。問題は，ピンクと青の2グループのウサギがそれぞれパーティを催すのだが，各グループはお客を何人呼べるだろうか，という形式で出題された。その際，両グループでアメの総数は等しいのだが，例えば，ピンクのウサギはひとり当たりアメを3個ずつ，青いウサギはひとり当たりアメを4個ずつ配るとしたら，両グループが呼べる客の数は等しいだろうか，という質問であった。実験課題は6試行からなり，割当数が同じである課題と異なる課題とがそれぞれ3試行ずつ含まれていた。

全体として，割当数が異なる課題は同じである課題よりずっと難しく，同じ課題がほとんど正解であったのに対して，異なる課題での正答率は，5歳児15%，6歳児38%，7歳児でも40%と，チャンスレベルを下回っていた。これは等分除の場合に比べてずっと低い成績である。等分除の場合は，7歳児のほとんどがチャンスレベル以上の遂行を見せたのに対し，包含除の場合は，そのような子どもは7歳児でも半分以下しかいなかった。これより，分割数を求める包含除の問題では，分割数がわかっている等分除の場合よりも，割る数と商の関係の理解が難しいことが明らかになった。

等分除と包含除との違いは，関係理解のしやすさだけでなく，数字の問題を解く場合の成績にも見られる。Correa（1995, Nunes & Bryant（1996）より引用）は，5，6歳児を対象に，具体物を用いて除算の問題を解く能力を調べた。ただし，受取手であるウサギのぬいぐるみは目の前に積み上げられているので，子どもたちはウサギとアメとを1対1対応させることはできない。このような条件のもとで，ウサギにアメを分ける等分除と包含除の問題が出された。実験の結果，5歳児は等分除の問題をいくつか解くことができたけれども，包含除の問題では困難を示した。6歳になると，包含除の問題も解けるようになるが，等分除と包含除の差は依然として残った。子どもたちが用いた解決方略の分析からは，5歳児が正答しやすかった等分除の問題は，ウサギが2匹だけである場合が多かった。このような問題では，子どもたちは，1つは自分に1つは相手にという対応づけの方略を使い，できた下位集合のアメの数を数えたのである。しかしこの状況でも，下位集合ではなく全部のアメの数を数えてしまって誤答する子どももいた。これに対して6歳児では，大多数が等分除と包含除とで異なる方略を利用した。等分除の問題では，テーブル上の異なった位置に指定された数のウサギが居るつもりで，それぞれのウサギに1個ずつ与える形でアメの分配を繰り返し，下位集合のアメの数を数えた。包含除の問題では，分け前分のアメを繰り返し取り去っていき，その後でグループがいくつ作られたかを数える方略が好まれた。しかし包含除では，状況を正しくモデル化できていても，できた集合の数ではなくひとつの集合のアメの数を答えとしてしまう子どもたちがおり，具体物があっても包含除は難しいことが示された。

冒頭で紹介したVergnaudに加え，Fischbein, Deri, Nello, & Marino（1985）も等分除と包含除とを区別している。彼らはまた，これら2種類の除算概念は異なった起源を持つと主張している。彼らによれば，等分除は分配という行為スキーマがもとになっているが，包含除は後の除算についての指導を通して獲得される概念である。しかしCorrea et al.（1998）の実験では，6歳児でも，包含除の推論でチャンスレベルを超えた子どもがかなりいたことから，除算についての直接指導は，除算の概念の発達には必ずしも必要ではない可能性もある。では，包含除の理解のルーツは何なのだろうか。Correa et al.（1998）が立てた仮説は，包含除には分配の状況も関連するが，包含除の問題で正答するためには，等分除に関わる経験と引き算に関わる経験とを統合する必要があるというものであった。この仮説は今後の研究で検討されるべきである。子どもの除算概念の発達について，現時点で確実に言えることは，分配の行為スキーマは除算理解の起源だが，除算概念と同じではないこと，割る数と割られる数・商との関係は，まずは等分除だけで理解されることの2点である。

5 結　　論

はじめに述べたように，乗法的推理は子どもたちにとって手ごわい問題である。しかし，これまで見てきたように，学校教育において乗除算を学習していない年少児であっても，乗除算についてかなりのレベルの知識を持っている。子どもたちは1対1対応をよく理解しており，その方略が使いやすい問題状況であれば，乗算の問題を解くこともある。また，年少児には難しいとされる除算においても，同様のことが示されている。除算についてのきちんとした指導を受ける以前の7歳頃に，分割に関わる関係性，例えば割る数と商の大きさとに逆の関係があることが理解される。それより年少の子どもでは，この関係は理解されておらず，多くの子どもが割る数が大きくなると商も大きくなると考えている。子どもたちは，正式な指導を受ける前に，正しい逆の関係を獲得していくのである。

もちろん，子どもたちが持つ初期の乗除算の理解は，しばしば断片的な，限られたものである。例えば，ごく年少の子どもでも，「1つをあなたに，1つを私に」という方法で分配を行うことはできるけれども，できた集合間の数を比較することは，かなり後にならないとできない。また，子どもや除算の仕方を学習する前に，割る数と商の関係についての初歩的な概念を持っ

ているが，この理解はかなり特定的で，等分除の問題には簡単に適用できるが，包含除の問題では使えない。乗算の交換法則でも，適用できる文脈とそうでない文脈があるという，同様の現象が生じている。

このように，最初に理解されるのは基本的な関係であって，概念の一部に過ぎない。しかし，子どもたちが数学的概念に関わる関係について何らかの理解を持った上で，その理解を論理的に適用していることは事実である。こういった初期の概念は，子どもたちがより数学的な概念について学ぶ際の基礎になると考えられる。教師は，子どもたちが理解している内容をベースとして，理解されにくい他の数学的内容を教えていくことが可能である。残念ながら現在のカリキュラムは，子どもたちのインフォーマルな知識をどのようにして発展させるかについては考慮しているとはいえない。よりよい指導のために，教師たちはまず，子どもたちがどのような理解を持っているのかについて詳しく知っておくべきである。

文　　献

Correa, J. 1995 *Young children's understanding of the division concept.* University of Oxford: unpublish D. Phil. thesis.

Correa, J., Nunes, T., & Bryant,P. 1998 Young children's understanding of division: The relationship between division terms on a noncomputational task. *Journal of Educational Psychology,* **90,** 321-329.

Desli, D. 1994 *Proportional reasoning: The concept of half in part-part and part-whole.* University of London: unpublish MSc thesis, department of child development and education.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., & Marino, M. S. 1985 The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education,* **16,** 3-17.

Frydman, O. 1990 *The role of correspondence in the development of number based strategies in young children.* University of Oxford: unpublish D. Phil. thesis.

Frydman, O. & Bryant, P. 1988 Sharing and understanding of number equivalence by young children. *Cognitive Development,* **3,** 323-339.

Hiebert, J. & Behr, M. 1988 Introduction:Capturing the major themes. In J. Hiebert & M. Behr(Eds.) *Number concepts and operations in the middle grade.* Lawrence Erlbaum Associates and National Council of Teachers of mathematics. Pp.1-18.

Nunes, T. & Bryant, P. 1995 Do problem situation influence children's understanding of the commutativity of multiplication? *Mathematical Cognition,* **1,** 245-260.

Nunes, T. & Bryant, P. 1996 *Children doing mathematics.* Oxford, England: Blackwell.

Sophian, C., Garyantes, D., & Chang, C. 1997 When three is less than two: Early developments in children's understanding of fractional quantities. *Developmental Psychology,* **33,** 731-744.

Piaget, J. 1965 *The child's conception to number.* New York: Norton.

Vergnaud, G. 1983 Multiplicative structures. In R. Lesh, & M. Landau(eds.) *Acquisition of Mathematics Concepts and processes.* Academic Press. Pp.127-174.

Vergnaud, G. 1988 Multiplicative structures. In J. Hiebert & M. Behr(Eds.) *Number concepts and operations in the middle grade.* Lawrence Erlbaum Associates and National Council of Teachers of mathematics. Pp.141-161.

Vergnaud, G. 1997 The nature of mathematical concepts. In T. Nunes & P. Bryant(Eds.) *Learning and teaching Mathematics: An International Perspective. Psychology Press.* Pp.5-28.

吉田甫・栗山和広　1991　分数概念の習得過程に関する発達的研究　教育心理学研究，**39,** 382-391.

（平成10年８月25日受理）