愛知教育大学研究報告，46（教育科学編），pp. 133～138, March, 1997

算数科における教材開発の定義の研究

志 水　　廣
(Hiroshi SHIMIZU)
（数学教室）

0．は じ め に

これまで筆者は，算数科における教材開発論についていろいろな所で発表してきた。その代表的なものをあげよう。

著書としては，①「算数科における楽しい教材開発法」，②「算数科・教材開発のマニュアル」，③「個を生かす算数科発展教材50選」がある。

論文としては，④「算数科・楽しい教材の開発法」，⑤「より進んだ個性のための算数教材の開発」，⑤「より進んだ子どものための算数教材の開発」，⑥「算数教育における電卓の活用教材の開発」がある。

これらをみると，教材開発を実際に筆者自身行ってきて，さらにその方法論についての研究を行ってきた。②の本を発刊してから，今日まで丸5年の月日がたった。その間，算数科教育の教育書をみると，教材開発例は多く発表されている。しかし，日本数学教育学会の論文では数点しかない。まして，教材開発の方法論にいたっては，まとまったのがないのが現状である。

そこで，今回新たに教材開発の方法論の明確化をめざしてみることにした。研究すべき内容は次の2点があるが，本論文では第1の教材開発の定義について述べてみたい。

第1に，算数科における教材開発の実践的体験から教材開発の定義を試みること。

第2に，教材開発の方法論について素材探しと素材の教材化に分けて論じること。

なお，教材開発を論じる上で教材の具体的条件等を明記するべきであるが，それらについては，①，②，④の文献で述べたのでここでは割愛することにする。

ところで，そもそも教材開発とは何であるのか。つまり，教材開発の定義である。筆者自身あいまいであることに気づいた。そこで，多くの参考文献を調べてみると定義は案外述べられていないことに気がついた。

だから，まず定義を明確にするべきであると考えた。

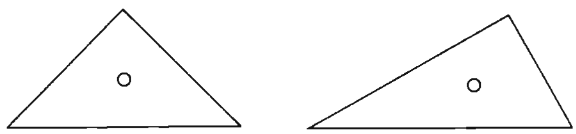
ただ定義を観念的に述べても仕方がない。筆者自身が教材開発をしてきたのだから，筆者の体験から教材開発の過程について考察するべきだと考えた。その結果，今回教材開発の定義を明らかにすることができたのでこれを発表することにする。定義は，本文の i，j，k，l である。その基本は，「集合から集合への写像である」と考えられる。そして，その時に教材のもつ数理的なきまりとそのきまりを生み出す考え方の両輪を保有することが重要となることが分かった。

では述べていこう。

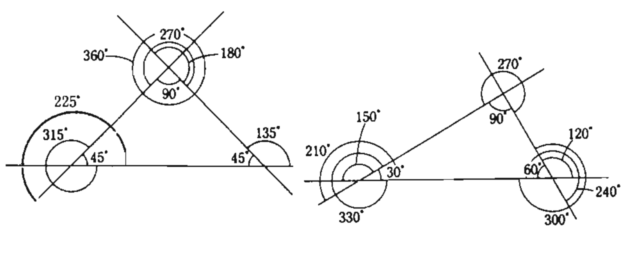
1．教材開発とは何か：実践的体験から

本章では，筆者自身の教材開発例を示し，その実践的体験から教材開発とは何かという定義を試みてみよう。

第一に，三角定規の角の大きさについて教材開発した体験を述べる。



上の図をみてほしい。ごく普通の三角定規である。普通は，この三角形の角の大きさは，45°, 90°, 30°, 60° である。これだけしかないと考えられていた。ところが，いろいろと調べてみるとこの他にもこの三角定規で他の角の大きさもできることが分かった。下の図のようになる。



この教材の面白さは，普段見慣れている三角定規を1枚でも「線を伸ばす」というアイディアによって多くの角の大きさが現れることである。さらに，それら

の角の大きさが45°の倍数，30°の倍数になっていることである。このきまり（ルール）はとても面白い。不思議さ，驚き，発展性がある。

さて，ここで，この教材開発のプロセスを考えてみると教材開発の定義が可能である。　教材には，新しい数学的なきまりが存在することである。しかも，そのきまりは，驚き，不思議さなどを内包する面白いきまりである。このきまりは数学的なルールであるのでRule の頭文字をとってＲと表現することにする。

直角二等辺三角形の三角定規		もう一つのの三角定規
Ｒ：45°の倍数	→	Ｒ′：30°の倍数

上の２つの三角定規と角の大きさの関係は，上のように表現できる。

ご覧のように，２つの集合の対応を示している。直角二等辺三角形の三角定規のきまりが発見されると，もう一つの三角定規でも「同じきまりが成り立つのではないか」という仮説が立てられそれを調べて検証する。すると，もう一つの三角定規でも似たようなきまりが発見された。この過程が教材開発のプロセスなのである。

したがって，あえて誤解を恐れないで定義すれば，

定義ｉ「教材開発とは，集合Ａから集合Ｂへの写像である」となる。

そこで，上の写像の図をよく見てみると，教材開発の条件が明らかになる。

条件１：まず，ある教材の集合に数学的なきまりＲが存在することである。

この条件１から，次の系が生まれる。

条件１の系：ある教材の集合を考察して数学的なきまりＲを発見することである。

条件２：そのきまりＲが他の集合でも成り立つのがどうかを調べ，その集合を見つけることである。

条件３：他の集合を調べるときには，素材の教材化のアレンジの方法としては，次の10項目が役に立つ。（文献②より）

(1)　問題の条件をゆるめたり，きつくしたりする
(2)　数値の範囲を整数から分数に広げる
(3)　別の単元の考え方と組み合わせる
(4)　ある数値を□のように未知数にして扱う
(5)　答えをオープンエンドにする
(6)　発展的に考えてみる
(7)　ゲーム化する
(8)　場面の連続性を図る
(9)　逆の構成を考えてみる
(10)　問題の場面を工夫してみる

なお，この10項目についての検証はここでは行わない。

したがって，条件１から３までを考慮してみると，上の定義ｉの言い換えをすると次のようになろう。

定義ｊ「教材開発とは，集合Ａで成り立つきまりＲがあり，そのきまりＲが成り立つ新しい集合Ｂを探すことである」

２．上の定義と条件についての検証：具体的な事例から

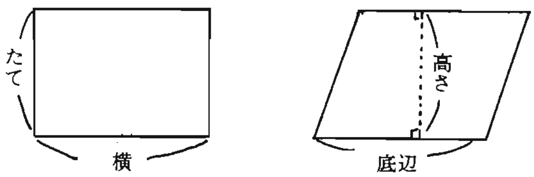
これらの定義や条件を基に，教材開発の例を見ていこう。

事例①：四角形の面積を求める問題について考えてみよう。この教材は従来からあり別に教材開発という新鮮味はないが，教材開発のプロセスを考えていく上で簡単明瞭で分かりやすい事例なのでとりあげる。

この問題の元の問題は，長方形の面積を求める問題であ。平行四辺形の面積を求めることの教材開発は，下のような写像で表される。

長方形の面積	⇨	平行四辺形の面積
Ｒ：たて×横	→	Ｒ′：底辺×高さ

図



ここで，集合Ａにあたるのは長方形であり，集合Ｂにあたるのは平行四辺形である。長方形には面積がある。そのときの数学的なきまりＲは，たて×横で表される。このきまりＲが保存される，またはＲ′に当たる数学的なきまりが存在するかどうかを調べてみることである。長方形から他の四角形へ目を転じてみて平行四辺形ではどうなるかと調べてみる。すると，平行四辺形では，Ｒ′が底辺×高さに相当するのである。もちろん，底辺×高さのきまりを生み出すには，等積変形が必要となるが。

このあと，四角形の面積は，台形，ひし形の面積へと続き，これらが集合Ｂにあたることになる。ここでの教材開発は，「形を変える」という集合の枠組みを変えてみることにほかならない。

ところで，上のＲの公式は，長方形の面積を求める数学上の結果を表すものである。ところが，この結果はどのようにして生まれてきたのであろうか。その際の数学的な道のりを述べよう。第１に，長方形には１㎠の単位正方形がいくつ並ぶかを考える。第２に，た

てが何個の何列分で求めることが分かる。第３に，長方形全体に一般化する。

このような，３つの考え方に支えられていることが分かる。すると，これらの３つの考え方も数学を探究する上での道具（頭文字のＤで示す）ということができる。だから，集合Ａから集合Ｂへの写像を考える場合には，数学を探究する考え方も対応していくことになる。長方形の面積の問題の探究には，第１から第３まであり，それぞれＤ１（１㎠の単位正方形がいくつ分），Ｄ２（何個の何列分），Ｄ３（一般化）する。

ここで，定義ｋを追加しよう。

定義ｋ「教材開発には，数学上のきまりＲを探究・発見するための数学的な道具Ｄも対応づけられている。もしくは，新しい道具Ｄが追加される。」

長方形の面積	⇨⇨	平行四辺形の面積
Ｄ１，Ｄ２，Ｄ３	⇢	Ｄ１，Ｄ２，Ｄ３ Ｄ４（たて×横） Ｄ５（等積変形）
Ｒ：たて×横	⟶	Ｒ′：底辺×高さ

そこで，Ｄ１，Ｄ２，Ｄ３の道具は，平行四辺形でももちろん対応するのであるが，実は，長方形の面積の公式が既習事項となるので，これが新たな道具として加えられることになる。また，平行四辺形の面積をもとめる場合は等積変形という考え方も必要である。よって，新たな道具の追加ということもありうるのである。

先に示した，三角定規の角の問題では，探究道具は，Ｄ１（線を伸ばす），Ｄ２（外角の考え，$360^\circ-\alpha$），Ｄ３（補角の考え，$180^\circ\pm\alpha$）となる。

この教材開発の写像では，道具Ｄは集合Ｂでもそのまま使われている。新しい道具は必要ない。下の図となる。

直角二等辺三角形	⇨	もう一つの三角定規
Ｄ１，Ｄ２，Ｄ３	⇢	Ｄ１，Ｄ２，Ｄ３
Ｒ：45° の倍数	→	Ｒ′：30° の倍数

ここで，なぜ，探究する道具にこだわるのかについて述べよう。その最大の理由は，数学上のきまりＲを生み出す考え方が大事となるからである。これを意識させることが重要である。別の言葉でいうと，メタ認知に係わることであると筆者は思うからである。

杉岡司馬は，文献⑯で「知識とその獲得法の同時達成の重要性」を強調されており，筆者の言うきまりＲを生み出す考え方と同じであるとみなすことができよう。その部分を引用しよう。

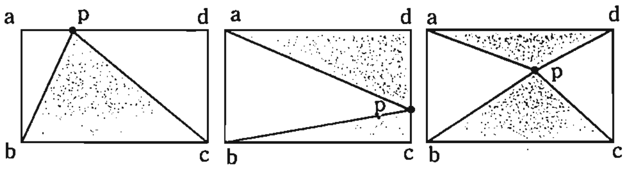
「課題の解決段階では，最小限二つの目標の同時達成が重要である。第一は，知識と技能の習得，第二は，その知識・技能の生み出し方・使い方などで，これを簡単のため「知識の獲得法」というのなら，それを教えることである。……
深層目標の知識獲得法こそ，質のよい伸びのある学力の最大の源泉なのである。」

だからこそ，筆者の言うきまりＲを生み出す考え方を大事にしたい。

よって，教材開発には，①集合から集合への対応，②きまりＲの対応，③Ｒを生み出す考え方Ｄの３点セットを考えねばならない。

事例②：もう少し新鮮な教材開発例を示す。

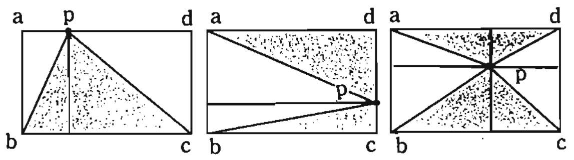
Ｋ社の教科書に５年の面積教材がある。



ア　　イ　　ウ

長方形のアでは，点ｐがａｄ上のとき，三角形ｂｐｃは長方形ａｂｃｄの面積の半分になっている。つまり，ここでのきまりＲは,，「長方形の面積の半分」ということである。このときの数学探究の道具は，補助線を引くこと（Ｄ１）である。たてに１本の補助線によって面積の等しい部分を見つけることができる。（下の図を参照）つぎに，イをみよう。これは，点ｐをｃｄ上に移動させたとき，三角形ａｐｄを長方形ａｂｃｄから除いた面積はどうなっているかという問題である。これも，「長方形の面積の半分」になっている。つまりきまりＲは保存されている。この場合の道具Ｄも補助線を引くことである。ただし，アと異なるところは，横に補助線を引くところである。ここで，集合から集合への枠組みの変化は，どちらも長方形なので「形の変化」ではない。点ｐの位置の移動である。

とすると，集合Ａは，「点ｐが長方形の辺ａｄ上を動くとき」と規定できよう。集合Ｂは，「点ｐが長方形の辺のｃｄ上を動くとき」と規定できる。さらに，ウの場合について考えてみよう。ウの場合での集合Ｃは，「点ｐが長方形の内部の任意の点を動くとき」と規定できる。ウの場合のＲも「長方形の面積の半分」となる。道具Ｄは，「補助線をたてと横の２本引くこと」である。



ア　　イ　　ウ

事例③：不思議なひき算

元の問題：２けたの数がある。その数の十の位の数字と一の位の数字を取り替えてひき算をする。するとどんな面白いきまりがあるでしょう。

6 3	8 1	7 5
－3 6	－1 8	－5 7
2 7	6 3	1 8

きまりとしては，

Ｒ１「十の位の数字と一の位の数字の合計が９」になっている」，

Ｒ２「答えの27，63，18は９のだんの九九の答えになっている」，

Ｒ３「十の位の数字と一の位の数字の差に９をかけると答えになる。例えば，63だと差は３である。３×９＝27となり，ひき算の答えになっている」

がある。

さて，元の問題から教材開発することを考えてみよう。２けたの数の集合を３けたの数の集合への写像を考えてみる。

新問題：３けたの数がある。その数の百の位，十の位，一の位の数字を反対に取り替えてひき算をする。するとどんな面白いきまりがあるでしょう。

6 5 1	7 3 5	9 6 2
－1 5 6	－5 3 7	－2 6 9
4 9 5	1 9 8	6 3 9

すると，このとき，Ｒ１～Ｒ３に対応するきまりはあるのかを考えてみることになる。

Ｒ１′に当たるものは「百の位の数字と一の位の数字の合計が９」と考えてもいい。あるいは，百，十，一の位の数字の合計が18」と考えてもいいだろう。

Ｒ２′に当たるものは「答えの495，198，639は99のだんの答えになっている」と言える。

Ｒ３′に当たるものは「百の位の数字と一の位の数字の差に99をかけるとひき算の答えになる。」

ここで探究の道具Ｄは，Ｄ１「位の数字の和を考えてみる」，Ｄ２「位の数字の差を考えてみる」，Ｄ３「かけ算を考える」ということになるだろう。

２けたの不思議なひき算		３けたの不思議なひき算
Ｄ１，Ｄ２，Ｄ３	⇨⇨ ------→	Ｄ１，Ｄ２，Ｄ３
Ｒ１，Ｒ２，Ｒ３	——→	Ｒ１′，Ｒ２′，Ｒ３′

以上見てきたように，教材開発の３点セットが上の問題でも証明された。

３．指導要領にある内容の教材開発について

先の事例②～③はトピック教材である。だから，教材開発の方法論では特殊なものではないかという議論があろう。しかし，そうではないことをこれから示していこう。

小学校２年のかけ算のの導入教材について考えてみよう。

教材開発の３点セットで見ていく。よって，教材開発には，①集合から集合への対応，②きまりＲの対応，③Ｒを生み出す考え方Ｄの３点セットを考えねばならない。

まず，かけ算の教材ではどんな集合を考えればよいか。これは，整数の集合である。

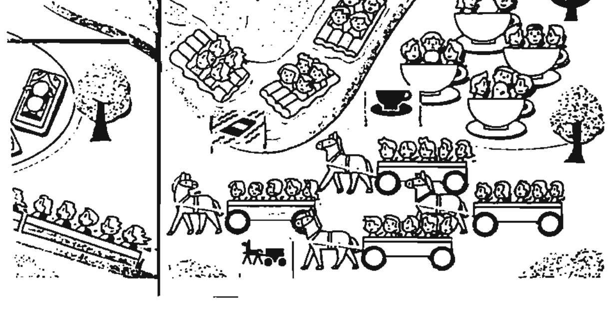
つぎにかけ算にはどんなきまりＲがあるのか。これは，「基準量のいくつ分」という考え方である。この考え方を生み出すには，同じ数のものがたくさんあると合計を求めるには，一つの演算としてまとめると便利であるという考え方である。思考の合理性とでもいえるだろう。

整数
Ｄ１：同じ数をまとめる
Ｒ：基準量のいくつ分

かけ算とは左のような集合を形成しているそこで，かけ算の教材開発をするためには，きまりＲが内包するような問題場面があるかどうかを探していくことである。また，Ｄ１も内包さている場面である。

そこで，現実的に教科書の教材から新しい教材開発をすることを意識して写像で表してみよう。Ｋ社の遊園地の場面について考えてみよう。

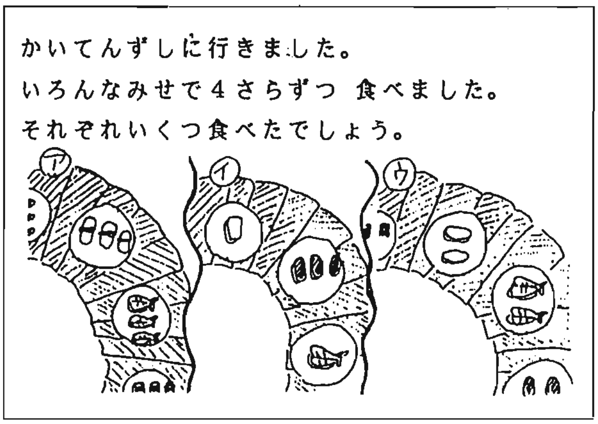
遊園地のさし絵



遊園地	⇨⇨	集合B
D1：2こずつまとめる	······→	D1：2こずつまとめる
D2：3こずつまとめる		D2：3こずつまとめる
R：基準量のいくつ分	——→	R：基準量のいくつ分

上の図をみると，かけ算の教材開発とは，きまりRには変更なく，場面の変化を意識すればいい。例えば，下のような回転寿司の場面を考えてみよう。おさらの上には，2こずつならんでいるもの，3こずつならんでいるのとがある。まさに基準量のいくつ分が登場している。

回転寿司のさし絵



この教材開発の事例から分かることは，教科書にもりこまれている普通の指導内容では，数学上のきまりRは明確であるということだ。だから，教師はこのRをまずしっかりと把握する必要がある。ただし，指導要領では文章表現なので，具体的な教材のイメージが湧きにくいので，実際の教科書をみるとよい。そこから，問題場面の変更を考えていくとよい。

さて，ここで，かけ算の教材場面ではもう一つの場面が登場している。前ページの縮版をよくみてほしい。遊園地の場面では，実は，コーヒーカップの場面には，同じ数ずつになっていないのである。ここは，意味深いことである。同じ数ずつの場面とそうでない場面との比較を出しているのだ。この2つの対立は，概念形成のためである。つまり，概念形成のためには，「似て否なる場面を見せること」が必要だからである。

そうすると，「教材開発には，問題場面に目標とするきまりRの存在だけでは不十分で，Rがきちんと意識され理解されるための手だてが必要となってくる。」これを定義1としよう。

ところで，回転寿司の場面では，3つの異なるお店を想定して教材を提示している。はじめのお店は2こずつ，つぎのお店は3こずつ，最後のお店ではばらばらの数のネタがのっていると想定していた。似て非なる場面の提示が上手だと思った。

なお，この教材の開発は広島県の加藤幸代教諭が考えたものである。なかなか素晴らしいと言える。実際のこの授業をみたが，この教材の提示で子どもたちの興味が高まり基準量に注目していった。とても新鮮な教材開発であった。

何度も言うが，教材開発で大切となるきまりRを十分に意識化したからこそできたものと言えよう。

以上，iから1の定義に到った。

4．文献からの定義の根拠づけ

この作業は困難をきわめた。というのは，そもそも教材開発の定義に関するものは調べた限りなかったからである。「問題の持つべき条件」「教材の開発の仕方」に関してはいくつかあるのだが，「教材を作ること」「新しい問題を作ること」の定義がなかったからである。ようやく，一つ見つかった。それは，栗田稔のもの（文献⑦）である。

「以上のような立場から，新しい問題を作ることを考えていく。

新しいことを見つける場合に，基本となることの1つは，

(1) いろいろやってみる

(2) そこからある法則を予想する

(3) 予想したことを証明する」

栗田の言う(2)の法則の予想は，筆者で言えば「きまりR」を見つけることである。また，(1)のいろいろやってみるというのは，筆者の集合の枠組みを変えることと探究の道具Dを変えることと対応づけられるのではないかと思われる。

5．まとめと今後の研究の課題

本研究では教材開発の定義についてまとめてみた。定義が明らかになれば，実際の教材開発のときに何を考えればよいのかが明確になると思われる。

次に研究すべきことは，集合の枠組みの変化のさせ方と探究の道具Dの方法である。それが，冒頭で述べた第2の研究「教材開発の方法論について素材探しと素材の教材化に分けて論じる」に当たることになる。幸いにも，論文末にあげたように近年この面の文献が多く出てきたので研究の道筋は明るいように思える。今後さらに努力したい。

——引用参考文献——

① 抄著 1990 「算数科における楽しい教材開発法」図書文化社

② 抄著 1991 「算数科・教材開発のマニュアル」明治図書

③ 志水廣・守屋義彦編著 1995 「個を生かす算数科発展教材50選」明治図書
④ 拙稿 1990 「算数科・楽しい教材の開発法」日本数学教育学会『算数教育』第72巻第12号ＰＰ10～17
⑤ 拙稿 1994 「より進んだ子どものための算数教材の開発」日本数学教育学会『算数教育』第76巻第２号ＰＰ20～25
⑥ 拙稿 1995 「算数教育における電卓の活用教材の開発」愛知教育大学研究報告第44輯 『教育科学』ＰＰ265～277
⑦ 栗田稔著 1985 「問題はどう作られるか」東京出版 ＰＰ１～２
⑧ 片桐重男著 1975 「算数・数学 新しい問題の開発とその指導」東洋館 Ｐ15～16
⑨ R.チャールズ／F.レスター著 中島健三訳 1983「算数の問題解決の指導」 金子書房
⑩ 西崎道喜編著 1985 「算数科の学習課題・ゲームの開発」東洋館
⑪ 本宮テイ著 1985 「学ぶ力を育てる算数指導」 明治図書
⑫ 石田忠男・川嵜昭三編著 1987 「算数科問題解決指導の教材開発」明治図書
⑬ 島田 功編著 1990 「学習意欲を高める導入問題の工夫」新算数教育研究会編 東洋館
⑭ 坪田耕三・中田文雄著 1991「子どもにうける算数科教材集」算数教材開発研究会 国土社 1991
⑮ 清水清海編著 1994「小学校 算数科学習課題づくりの授業事例」明治図書
⑯ 杉岡司馬著 1988 「算数科／教科書をどう使いこなすか」筑波大学附属小学校初等教育研究会 『教育研究』1988年７月号ＰＰ10～13
⑰ 能田伸彦 1992 「良い問題を作る方法」算数指導実践研究会 第13巻 『授業を支える指導技術』啓林館

（平成８年９月10日受理）