愛知教育大学附属高等学校研究紀要第 51 号
pp.41～46（March, 2024）

現実の事象を数学的に探究する活動

―平面図形上に作る塩山の稜線の考察から―

数学科　神谷　良明

現行の学習指導要領において、数学科に関して「現実の世界と数学の世界における問題発見・解決の過程を学習過程に反映させることを意図した数学的活動の一層の充実」を図ることが強調されているものの、高校の授業の中で、現実の事象を数学的に捉え抽象化・定式化する活動を行う機会は少ない。そこで、平面図形を土台とする塩山の稜線を考察し探究的に学んでいく活動を例に、普段の学習過程に現実の事象を数学的に学ぶ過程を反映させた授業実践例を報告する。

＜キーワード＞現実の事象、塩山、モデル化、数学的に探究する

1. はじめに

平成 28 年 12 月の中央教育審議会答申で示された、算数・数学の学習過程のイメージ（図 1 ）は、「事象を数理的に捉え、数学の問題を見いだし、問題を自立的、協働的に解決すること」を目指している。この答申を受け、平成 30 年告示の高等学校学習指導要領解説数学編理数編では、数学科改訂の趣旨として「現実の世界と数学の世界における問題発見・解決の過程を学習過程に反映させることを意図した数学的活動の一層の充実」を図ることを強調し、各単元における現実の事象や数学の事象を、数学的に問題発見・解決する過程を学習過程に反映させることを重視している。

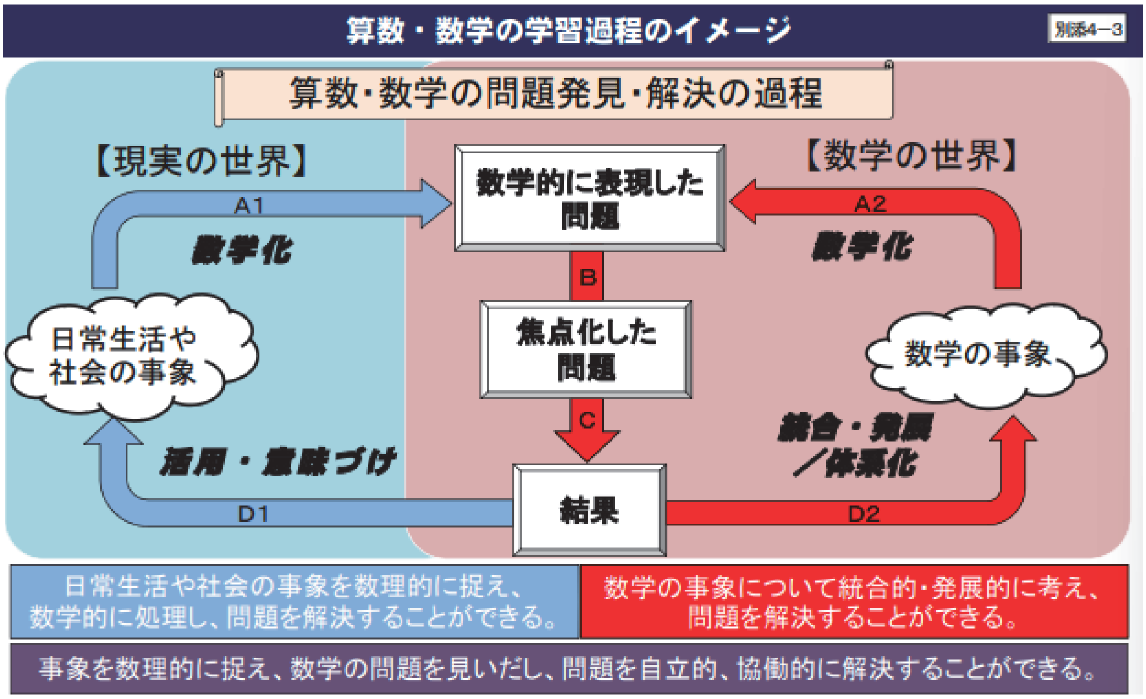


図 1　算数・数学の学習過程のイメージ

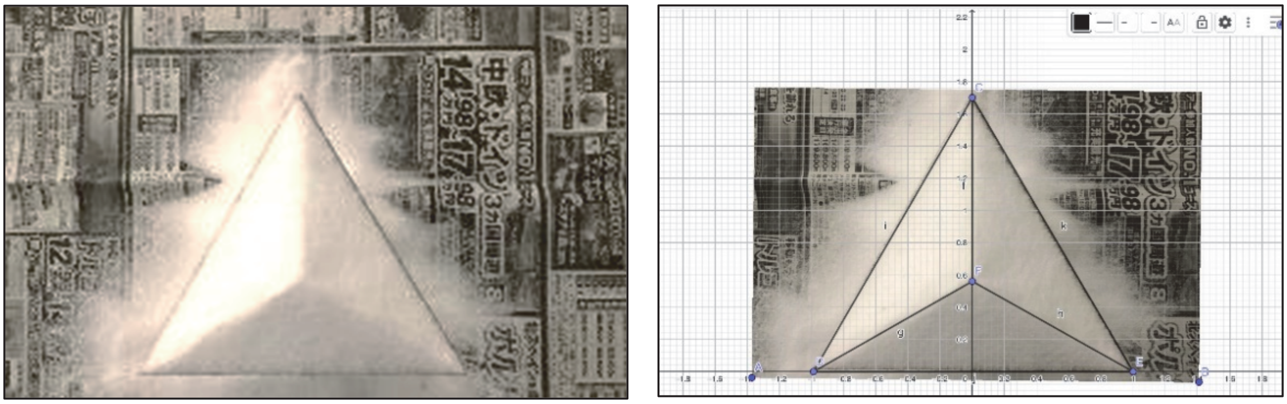
筆者は、現実の世界や数学の世界で起こる事象を数学化する場面あるいは、数学的に表現した問題を焦点化するこの過程の中で、ICT 機器を活用することが問題解決の上で効果的であり、生徒が問いを見

出すきっかけになるのではないかと考えた。スポーツデータは、比較的データ収集が容易なため、プロスポーツ競技の多くは様々な形で分析を行い、戦略・トレーニング・競技力の向上のために活用されている。筆者にとっての身近なスポーツとして、陸上競技について授業実践が行えないかと考え、リレー競技をテーマに、実データを収集し、表計算ソフトを用いてデータを分析するという探究の過程でiPadを効果的に活用し、数理モデルを作る授業実践（神谷、2022）を行った。この実践では、効果的にICT機器を使うことができたものの、「データの分析」という普段の教育課程とは少し外れた「特別な授業」となっていたことは否めない。そこで、普段の学習過程の中に現実の世界や数学の世界における問題発見・解決の過程を反映させることはできないかと考えた。

2. テーマとねらい

（1）テーマの設定

平面図形を土台とする板などの上に、塩や砂などで作る山（以降、この山のことを塩山と呼ぶ）を教材とする活動は、中学校から高校１年にかけて、多角形に関する図形の性質を理解する上でとても有効な教材である。例えば、図２に示すように、土台となる平面図形（図２では正三角形を土台としたとき）の上に形成される塩山の稜線や頂点を、座標平面などに投影した図形を考察し、探究することができる。筆者はこれまでに、１年生を対象として、数学Ａ「図形の性質」の単元において、三角形の五心にかかわる課題学習の一環として、正三角形、正方形、鋭角三角形、一般の四角形の各平面図形上に塩山を形成し、稜線や頂点ができる仕組みとその図形の性質を理解する授業を行っていた。



(a) 正三角形を土台とする塩山　　(b) GeoGebraの関数グラフに描いた稜線

図２　正三角形にできる塩山と稜線平面図

上記のように、中学校から高校への接続として有効な教材であるが、高校段階では、より複雑な平面図形の板を生徒自ら考え、製作し、その上に形成される塩山形状の探究に挑戦できる教材であることを、「高校数学における塩山を用いた数学的活動と授業実践（松永ら、2021）」において、放物線と直線で囲まれた図形や円孔を有する放物線境界を持つ土台などを例に示している。このことから、放物線以外の曲線も扱うことが可能な３年生理系を対象とし、数学Ⅲ「２次曲線」の学習過程における数学的活動の位置づけとして「塩山にできる稜線の性質」をテーマとした探究的な授業実践を考えた。

（2）授業のねらい

本実践では、これまで筆者が行ってきた実践における「塩山にできる稜線や頂点ができる仕組み」から、曲線を含む平面図形上にできる稜線の仕組みに問題を焦点化し、この問題のモデルから問題を解決していく過程を重視し、以下の力を育むことをねらいとして立てた。

〔ねらい〕

① 現実の事象を数学化する際に、数学的に表現する過程や問題を焦点化する力を養う

② 数学を活用して、現実の事象を論理的に考察する力を養う

③ 事象の本質や他の事象との関係を認識し統合的・発展的に考察する力を養う

④ 数学的な表現を用いて事象を的確に表現して解決する力を養う

3. 指導計画

対象：３年１組　32 名　および　３年２組（理系選択）12 名

単元：数学Ⅲ「２次曲線」

計画（全２時間構成）

時	目標		学習活動
1	平面図形の上にはどのような形の塩山ができるのか。塩山にできる稜線は、どのような原理でできているのかを考える。	導入	平面上に砂山を作るとき、どのような形ができるのか？ ※大相撲の土俵上にできた砂山は、どのような形をしているのか。
		展開 1	様々な平面図形の上に塩山を作るとき、どのような立体図形ができるか予想しよう。 (1) 円　(2) 正方形
		展開 2	正方形と円を半分に切ることでできる平面図形上に塩山を作ろう。 (1)半円　(2)直角二等辺三角形　(3)長方形
2	半円上にできる塩山の稜線を真上から見たとき、その稜線の図形が何かを予想し、その方程式を求める。	導入	半円上に塩山を作るときにできる稜線は、どのような図形の方程式なのか。
		展開 1	半径１の半円上にできる塩山の稜線を真上から見たとき、この稜線の方程式を求めよ。
		展開 2	＜方針＞を基に、軌跡の方程式を求めよ。

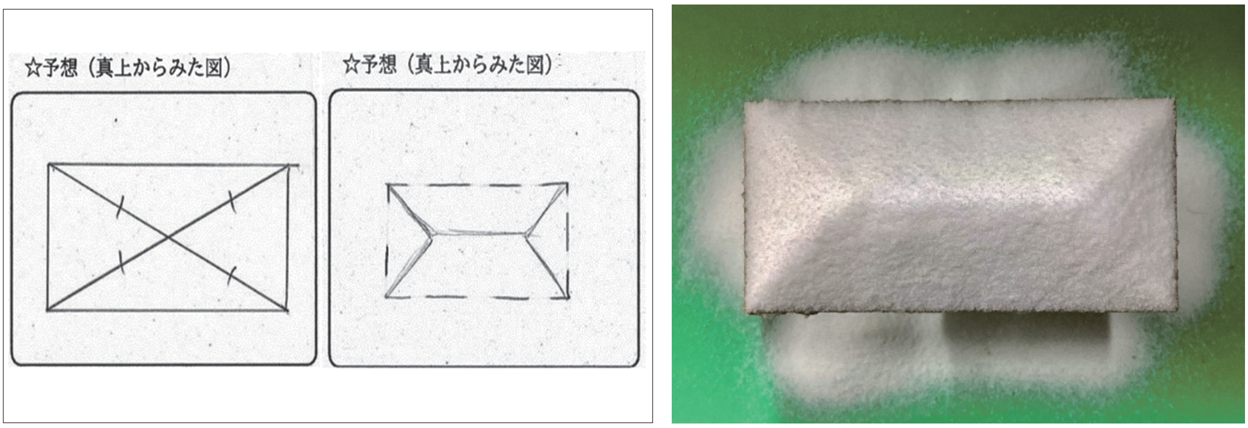
4. 実践概要

（１） １時限目

ここでは、「平面図形上に塩山を作る」という実際におこる現象を体感するとともに、「なぜこのような稜線ができたのか」という原理や仕組みについて考え、数学化していく場面である。探求のサイクルを想定しているため、どのような立体図形とその稜線ができるのかを予想（仮説）し実際に作る（検証する）活動をとっている。また、本実践はグループワークを基本とし、個別でたてた予想をもとに、４人１組のグループで問題に取り組ませた。課題とした円と正方形については、生徒にとって容易に予想することができたことから、活発な活動になるきっかけとなった。

展開２は、「半分に切る」という点で生徒から様々な「半分の形」を引き出すことができる場面であるが、半円・長方形・直角二等辺三角形に図形を絞ることで、ねらいの①および②を意識した授業展開とした。実際に、特に長方形についての予想（図３）が割れることで、生徒の思考が稜線のできる原理に

ついて焦点化していく活動につながった。まとめの段階で、直角二等辺三角形にできる稜線について、生徒から「角の二等分線になっている」という発言が生まれた。２辺（直線）から等距離の点の集合として角の二等分線ができるという視点から、半円上にできる塩山の稜線について、どのように考えていけばよいかという２時間目の活動へと移行した。



(a) 生徒が予想（サンプル 1，2）　　**(b) 実際にできる塩山**

図 3　長方形を土台とした塩山の稜線

（2） ２時間目

この時間では、特に予想（仮説）の部分に重点をおいた。多角形に生まれる稜線が角の二等分線であることから、直線と円弧（半円上）の土台から生まれる稜線は、実際に作った塩山（現実の事象）から全員が「曲線である」という認識のもと、それが「どのような原理でできた曲線であるのか」ということから考えさせた。また、その予想が正しいまたは正しくないということを数学的に表現することを目標とした。前述の松永らの研究における「塩山は境界が存在する平面図形の土台上に塩を盛ることで、円錐が重なり合いながら連続して形成され、頂点を結んだ稜線が現れる」（図４）という数学的な見方や、生徒の発言にあった、「塩山を真上から見たときの稜線は、土台となる平面図形にできる角の二等分線である」という考え方から、どのような曲線の軌跡なのかを個別に予想させた。

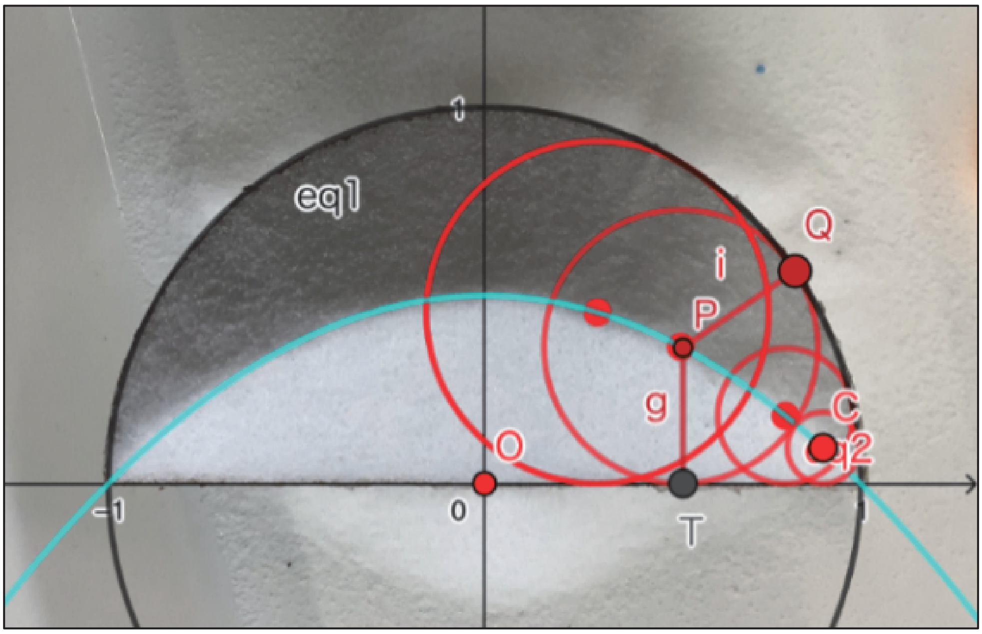


図 4　半円上に形成される円錐と稜線

この予想段階では、表１に示す通り、放物線の一部と答える生徒が最も多く、次いで楕円の一部、円の一部となった。ここから、それぞれのグループで予想を１つに絞り、半円上にできる塩山の稜線がどのような図形の方程式であるかについて考えさせた。

活動自体は活発に行えていたものの、現実の事象を定式化する経験が浅いことなどから、いずれの予想についても、抽象化することや定式化することに苦労している様子であった。そのため、次の方針を示した。

表１　半円上に形成される稜線の予想

	１組	２組	計
放物線の一部	９	８	１７
楕円の一部	１１	１	１２
円の一部	６	０	６
曲線	１	０	１
楕円または放物線	０	２	２
未回答（欠席含む）	５	１	６
計	３２	１２	４４

＜方針＞（図５）

半円Ｏ上の点Ｑにおける法線を考える。線分ＯＱ上の点Ｐから x 軸上に垂線ＰＴを引いたとき
ＰＴ=ＰＱ となる点Ｐの軌跡の方程式を求めよ。

しかし、放物線の方程式までたどり着く生徒は想定より少なく４名であった。（図６）また、円や楕円の一部と予想した生徒は、立式はするものの、うまく媒介変数が消えないなど定式化できず、ほとんどの生徒の手が止まってしまった。

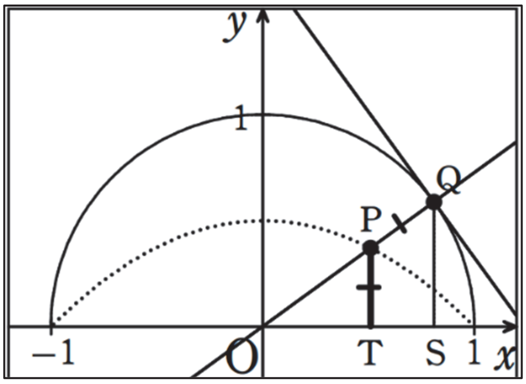


図 5　生徒に示した方針

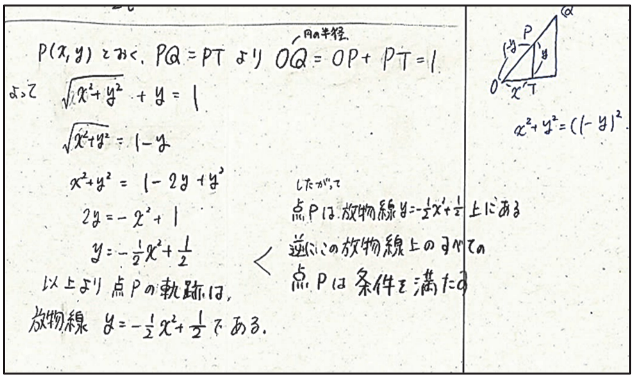


図 6　生徒の解答例

授業の終盤では、円や楕円が「正しくない」ことをどのように示せばよいかの解説をするとともに、円錐曲線に触れることで、学習過程の流れから、生徒に納得感を持たせることができた。

5. まとめと今後の課題

活動を通じ、生徒が終始活発に活動し、主体的に問題解決に向かう様子は、こちらが想定していた以上のものがあった。特に、稜線の原理に迫っていく過程では、徐々に問題が焦点化されていくことで本教材への深い理解につながり、主体的に学ぶことができた要因の一つではないかと考える。このことは、図１にある「事象を数理的に捉え、数学の問題を見いだし、問題を自立的、協働的に解決すること」を勘案すると、有効な実践であり、筆者のねらいとした①、②は十分にできたのではないかと考える。一方で、ねらいの③、④については、生徒自身が現実の事象を抽象化・定式化する経験が少ないことに加え、軌跡の問題に苦手意識をもつ生徒が非常に多かったこともあり、十分な活動とはならなかったことは、普段の授業の中に課題とすべき点（知識・技能はもちろん、思考力・判断力・表現力を補う授業な

ど）が多くあったと感じた。

また、今後抱える課題としては、現実の事象から数学的な問題を見出すという「テーマ設定」にあると考える。探究的な活動に欠かせないテーマについては、そのテーマを設定すること自体に苦労をする場面も多い。高等学校の教育課程を考えたとき、どうしてもその単元との結びつきを考えてしまうが、単元にとらわれず、日常の疑問を数学化していき、それを単元と結び付けていくような活動を増やし ICT 活用やモデル化に関する授業実践を行っていきたい。

6. 謝辞

本実践を行うにあたり、教材の着想から授業設計についてご指導・ご助言いただきました、愛知教育大学数学教育講座の飯島康之先生にお礼申し上げます。

引用・参考文献

文部科学省（2018）.『高等学校学習指導要領解説　数学編　理数編』.

中央教育審議会答申（2016）.「幼稚園、小学校、中学校、高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善及び必要な方策等について（答申）　別添資料　（2／3)」. https://www.mext.go.jp/component/b_menu/shingi/toushin/__icsFiles/afieldfile/2017/01/10/1380902_3_2.pdf

神谷良明（2022).『スポーツデータを用いた探究的な活動 -「モデル化」のためのタブレットの効果的な活用 -』. 愛知教育大学付属高等学校研究紀要　第 50 号　pp.13-22

松永泰弘、守屋 太雅、松永 元輝（2021）.『高校数学における塩山を用いた数学的活動と授業実践』. 日本産業技術教育学会誌 第 63 巻 第 2 号　pp.229-237