愛知教育大学附属高等学校研究紀要第 51 号
pp.47～56（March, 2024）

数学的帰納法の意味理解を促す指導に関する実証的研究

―　生徒の思考プロセスに着目した指導方略の提案　―

数学科　五味雅貴

本研究は、高等学校数学科における数学的帰納法の指導法の改善を目的として、新たな指導方略を提案し、その効果を実証的に検証した。伝統的なアプローチと異なり、この新たな指導方略は生徒の自然な思考プロセスに着目して、伝導性の概念を先に議論し、その後初期成立性を扱うという順序を採用した。実施された調査から、この新しい指導方略が、特に初期成立性の必要性の理解と伝導性の理解において肯定的な効果があることが示唆された。しかしながら、文字の一般性の理解に関しては改善の余地があり、今後の課題として、広範なデータ収集、文字の一般性理解のための指導方略の検討、実践と検証を通じた数学的帰納法の指導方法の精緻化が挙げられた。

＜キーワード＞　数学的帰納法　意味理解　思考プロセス

1. 本研究の目的と方法

数学の歴史を探ると、紀元前から証明に数学的帰納法が暗黙裡に使用されていた事例が存在する。数学的帰納法が明示的に用いられた最初の例は、パスカルが 1665 年の著作 "Traité du triangle arithmétique" で「パスカルの三角形」の証明に使用したことにある。山口（1987）は、パスカルの他に、フェルマーやベルヌーイも 17 世紀に多用していたため、これら 3 人の数学者を数学的帰納法の発見者と見なしてよいだろうと主張している。また、山口（1987）は、「自然数全体の集合」という概念を規定する「道具としての数学的帰納法」という認識が徐々に広がっていったことも指摘しており、実際に、1895 年にジュゼッペ・ペアノは、数学的帰納法をペアノの公理の第 5 公理として位置づけ、自然数の定義に組み込んでいるのであった。

数学的帰納法は､無限に続く命題を有限の手続きで証明する非常に強力な手法である。高等学校数学科では、数学 B の「数列」という単元で扱われる。教科書や問題集では、表現に多少の違いはあるものの、基本的な構成と配列の順序はどれも同じである（図 1 参照）。なお、本稿では、図 1 に示された（Ⅰ）を「初期成立性」､（Ⅱ）を「伝導性」と呼ぶことにする。

一般に，自然数 n を含む条件 (A) があるとき，
「すべての自然数 n について (A) が成り立つ」
を証明するには，次の（Ⅰ），（Ⅱ）を示せばよい。
（Ⅰ）$n=1$ のとき (A) が成り立つ。
（Ⅱ）$n=k$ のとき (A) が成り立つと仮定すると，
　　$n=k+1$ のときも (A) が成り立つ。

図 1　数学的帰納法の一般的なまとめ方

さて、高校生が数学的帰納法の理解に苦労することは、長きに渡る問題であり、多くの数学教員もこれを共通の課題として認識している。この問題は国内にとどまらず、国際的にも議論されており、困難性を突き止めようとする研究が活発に行われている（例えば、Ernest, 1984；村上, 1990；Stylianides et al, 2007）。現場の教員は、数学的帰納法の意味理解を促進するために様々な教育的アプローチを試行錯誤しているが[注1]、そのどれもが個人の教材研究の範疇に限られ、広く教育現場に浸透しているアイデアの報告は管見の限りない。

そこで本研究は、先行研究で明らかにされた数学的帰納法の困難性をレビューし、新たな指導方略を提案する。そして、新しい指導方略を取り入れたクラスと、伝統的な指導を行ったクラスに対して、数学的帰納法の意味理解を評価する調査問題を実施し、その結果を分析する。これにより、新しい指導方略の効果を検証する。

2. 数学的帰納法の困難性に関する先行研究レビュー

先述したように、数学的帰納法の困難性を捉えようとする研究は国内外で活発に行われている。これらの先行研究は、高校生たちが数学的帰納法の「意味理解」において困難を感じている点に一致している。特に、村上（1990）は、図 2 に示される①②③の理解の不十分さが数学的帰納法の理解の妨げになっていると指摘している。

① $P(1)$ の証明の意味
② 「$n=k$ のとき」の意味
③ $P(k) \to P(k+1)$ の証明の意味

図 2　数学的帰納法の困難性（村上，1990）

真野（2016）による解釈に基づき、①②③を再考すると、①では、「なぜ $n=1$ の場合に正しいと示さなければならないのか」、つまり「初期成立性の必要性の理解不足」を指していると思われる。②では、「文字 k が何を指しているか分からない」という「k のもつ一般性の理解不足」が指摘されるだろう。③に関しては、「$\mathrm{P}(k)$ が真であるかどうかわからないのに、なぜ $\mathrm{P}(k+1)$ が真であるといえるか（真といっていいのか）という誤概念」を指していると思われる。この点に関しては、Stylianides et al （2007）は、含意命題 $\mathrm{P}(k) \to \mathrm{P}(k+1)$ ではなく、$\mathrm{P}(k+1)$ の直接証明であると誤解していることが原因であると述べている。私自身の数学的帰納法の指導経験からも、①②③の困難性には同意であり、特に③の理解は、容易に乗り越えられない険しい壁であると感じている。

3. 生徒の思考プロセスに沿った指導方略の提案

第 2 章に触れた困難性の主な原因として、生徒の思考プロセスに合わせた指導が不十分であるという可能性を考えてみたい。実際に、図 1 で示される数学的帰納法の標準的な記述順序に従った指導では、（Ⅰ）初期成立性を先に示し、次に（Ⅱ）伝導性を示すことになる。しかし、この順序は生徒の自然な思考プロセスが反映されていないと考える。実際、（Ⅰ）の初期成立性を最初に確認するのは、証明全体の道筋全体が初めから明確な者にのみ思いつくアプローチであると思う。自然な思考プロセスでは、初めに初期成立性を確認しようとは思えないはずである。我々教員としては、数学的帰納法を指導する際において、ペアノの公理への意識を高めるという特別な意図がない限り、思考プロセスに沿った説明と指導をしていくことが望ましいと考える。したがって、具体的には、「伝導性」について最初に議論し、その後「初期成立性」を検討するという指導方略を提案する（図 3 参照）。

伝統的な指導	提案する指導
（Ⅰ）初期成立性	（Ⅰ）伝導性
↓	↓
（Ⅱ）伝導性	（Ⅱ）初期成立性

図 3　伝統的な指導と提案する指導の比較

ただし、ここで注意しておくが、教科書等における記述方法や順序に異を唱えたいわけではない。数学的帰納法の標準的な記述は、ペアノの公理に基づいていると私は解釈している。ペアノの公理では「0 が自然数全体の集合に含まれる」が第 1 公理であり、「数学的帰納法の考え方」が第 5 公理に位置付けられている[注2]。そのため、数学的帰納法を概念規定する際には、この記述の順序は避けられないと理解できるのである[注3]。

4. 実践と調査

（1）実践

第 3 章で示した指導方略を、実際の授業に適用した。この実践は 2023 年 9 月、国立大学附属高校の第 2 学年の文系クラス 48 人を対象に行われた。生徒たちは、新しい指導方略を取り入れた指導法を受けた X 組 21 人と、伝統的な指導法を受けた Y 組 27 人に分けられた。X 組は本稿著者が、Y 組は非常勤講師の大学院生が授業を担当した。「数列」の授業は全 17 時限行われ、そのうち数学的帰納法に関する授業は 14〜16 時限目に実施され、17 時限目には次節で述べる調査問題に取り組んだ。

X 組と Y 組での授業内容は、Y 組を担当する大学院生と事前に綿密に打ち合わせを行い、新たな指導方略以外の部分では差が出ないよう配慮された。授業構成は、数学的帰納法の原理の説明から始め、その後、例題演習や類題演習を順に行った。特に注意したのは、極力、平板な授業構成にすることで、指導方略の効果が明確になるように努めたことである。扱われた問題、説明の仕方、時間等には違いはなかったが、原理の説明と問題解説に、初期成立性と伝導性をどちらの順序で扱うかという点だけを変えた。使用した教科書は「数研出版 高等学校 数学 B」で、例題や類題は教科書に掲載されているものを用いた（図 4 参照）。

実践は大体計画どおり進行した。X 組では、教科書の記述順序と異なることによる生徒の戸惑いを懸念していた。そのため、「教科書や問題集の解答例には、標準的な順序（初期成立性から伝導性）で書かれているが、このクラスでは意図的に逆の順序（伝導性から初期成立性）で教えているんだ」という旨を生徒に何度も強調して伝えた。

指導	提案する指導	伝統的な指導
内容	(Ⅰ) 伝導性 ↓ (Ⅱ) 初期成立性	(Ⅰ) 初期成立性 ↓ (Ⅱ) 伝導性性
対象	第 2 学年　文系	
	X 組 21 名	Y 組 27 名
教員	本稿著者	非常勤講師（大学院生）
授業	数学的帰納法の原理の説明（14 / 17 時限） ↓ 例題・例題解説（15 / 17 時限） ↓ 類題・類題解説（16 / 17 時限）	
問題	例題　数学的帰納法を用いて，次の等式を証明せよ。 $1+2+3+\cdot\cdot\cdot+n=\frac{1}{2}n(n+1)$ 例題　n を 4 以上の自然数とするとき，次の不等式を証明せよ。 $2^n>3n$ ※類題は，数値を変えた程度で 3 題扱った。	

図 4　実践の概要

（2）調査

実践を終え、新たな指導方略の効果を評価するために、17 / 17 時限目に数学的帰納法の意味理解を測定する質問紙調査を実施した（付録参照。この調査は、Stylianides et al（2007）によって提案された「命題と証明のスクリプト」（図 5）と、真野（2016）による「対話のスクリプト」（図 6）を基にして作成された。

図 5 に示した「命題と証明のスクリプト」には、次のような命題「すべての自然数 n に対して，次が成り立つ。$1+3+5+\cdot\cdot\cdot+(2n-1)=n^2+3\quad\cdot\cdot\cdot(*)$ 」が用いられている。しかし、この命題は実際には偽である。伝導性の部分は正確に記述されているが、初期成立性の記述が欠けている。そして、そもそも初期成立性は成立しないため命題は偽と判断される。真野（2016）は、数学的帰納法に関する困難性を分析するのに、この Stylianides et al（2007）による「命題と証明のスクリプト」が適していると判断し、それに「対話のスクリプト」（図 6 参照）を追加した。そして、A 君と C 君の発言については、「正しい」か「正しくない」かを判断させ、その理由を記述させ、B さんと D さんの発言には、「あなたの考えを記述してください」と尋ねる形式をとっていた。

命題：

すべての自然数 n に対して，次が成り立つ。

$$1+3+5+\cdot\cdot\cdot+(2n-1)=n^2+3 \quad \cdot\cdot\cdot \quad (*)$$

証明：

$n=k$ のとき (*) が成り立つと仮定すると，

$$1+3+5+\cdot\cdot\cdot+(2k-1)=k^2+3$$

すると，次のように，$n=k+1$ のとき，(*) が成り立つ。

$$1+3+5+\cdot\cdot\cdot+(2k-1)+(2k+1)$$
$$=(k^2+3)+(2k+1)=k^2+2k+1+3=(k+1)^2+3$$

よって，すべての自然数 n に対して (*) が成り立つ。

図５　命題と証明のスクリプト（Stylianides et al, 2007）

A 君　：この証明は正しくないよ。$n=1$ のときに等式 (*) が成り立つことを示していないから。

B さん：どうして $n=1$ のときを示す必要があるの？

C 君　：この証明は，“ $n=k$ のとき等式 (*) が成り立つならば $n=k+1$ のとき等式 (*) が成り立つ”を示しているね。この部分の証明は正しいと思う。

D さん：数学的帰納法による証明をするときにいつも思うのだけど，真であることを証明しようとしているのに，真であると仮定したのでは，証明が成立しないではないの？

図６　対話のスクリプト（真野，2016）

この先行研究の知見を踏まえ、本研究での質問紙調査にもこれらを採用した。その理由は 2 つある。第 1 に、第 2 章で挙げた数学的帰納法の困難性①②③（図 2 参照）がどれほど克服できているかを、この一連の問題群で一括して評価できるからである。具体的には困難性①「初期成立性の必要性の理解不足」を A 君と B さんの発言への反応で評価し、困難性②「k の一般性の理解不足」を C 君の発言への反応で確認することができる。また、困難性③「$\mathrm{P}(k)$ が真であるかどうかわからないのに、なぜ $\mathrm{P}(k+1)$ が真であるといえるか（真といっていいのか）という誤概念」に関しては、D さんの発言への反応で確認できる。第 2 に、数学的帰納法の「意味理解」を捉える問題としての適正性に優れているからである。一般的な数学的帰納法の問題では、意味理解が不十分でも問題解決できるケースが多い[注4]。しかし、この問題群は、計算の技巧ではなく、数学的帰納法の意味を本質的に理解しているかを直接的に評価できるため、本研究の調査問題として適すると判断した。

以上を踏まえ、付録にある調査問題を作成した（付録参照）。この調査は、数学的帰納法の一旦の学習終了後に日を改めて行い、実践を受けた X 組と Y 組を対象とし、2023 年 9 月に 2 クラス別日に実施した。調査対象者には「点数化せず、成績に影響しないので、リラックスして自由に記述してください」と伝えたが、生徒同士の相談は禁止し、試験のような雰囲気で実施した。解答時間は 30 分間とした。

5. 分析と考察

(1) 分析

本節では、調査問題の各問題に対する詳細な評価基準を、具体例を交えて説明しようと思う。ただし始めに述べておくが、分析を進める中で、問題 1 と 2 の自由記述の仕方に顕著な違いが見られなかった。さらに、生徒の解答からは、これらの質問の違いが理解できていない様子も伺えた。確かに、問題 1 と 2 はともに「初期成立性の必要性の理解」を測ることを目的としており、内容が酷似していた。このため、本研究の分析では、問題 1 の自由記述部分と問題 2 に関しては統合して、一つの評価項目として扱うことにした。つまり、各生徒の解答において、初期成立性の必要性に言及した記述がどちらかにあればそちらを採用して、もう一方が未記入であっても評価しないという方法を取ることにした。

問題 1 および問題 2

問題 1 では、まず二者択一形式の問題に答えてから、その理由を自由記述する構成である。この二者択一問題の答えは「正しい」である。問題 2 は初期成立性の必要性に関するもので、「どうして $n=1$ のときを示す必要があるの？」に応える問題である。自由記述部分の ABC の 3 段階評価基準は、$n=1$ がすべての自然数で成り立つことを示すための「基準点」「スタート地点」「連鎖の始まり」「初項」「最

初の数」といった表現がある場合、すなわち、帰納的にすべての項で成り立つことを示すための出発点としての認識と、そこから続く項に連鎖していく理解があると判断できる場合は、評価 A とした。

一方、そうした記述がなく初期成立性の必要性について本質的には理解していないが、「$n=1$ を示すことが他の一般項が成り立つか否かに影響を及ぼす」という理解があると判断できれば評価 B とした。

次に、「1 も自然数であり、$n=1$ はすべての自然数で成り立つための一つの場合だ」というような、「$n=1$ の場合が、他の一般項とは独立している項」であるといった誤った理解が見られる解答を評価 C として扱うことにした。つまり、評価 B と評価 C の区別の一つとして、$n=1$ の場合に成り立つことが他の項とは独立した条件と認識しているか否かを採用した。この視点は、評価 A の理解に至るまでの理解レベルに大きな差があると考えられるため、この区別は妥当であると考えた。また、この理解レベルにも満たない解答や無回答も評価 C とした。各評価の具体的な生徒の解答例を図 7 に示す。

評価 A	n=1 のときも成り立つことを示す前までは、 等式(※)のどこかで成り立っているということしか 証明されていないから。 「どこか」ではなく、「ここから」成り立っているという のを証明するために、n=1のときも成り立つことを 示さなければいけない。	1つ基準を決めないといけないから。 (例) 文系か理系かわからない時に、出席番号 1番の人が文系と仮定したら次の番号の人 も文系だということも証明できたら。 まず最初の1番の人が本当に文理か どうか確認する必要がある。 この作業がn=1のとき成り立つか の確認と同じだと思う。
評価 B	n=k がわかれば その次の数字も分かる から。	n=1のときに等式が成り立てば n=k が成り立つときに n=k+1 のとき 等式が成り立つことがいえる
評価 C	“自然数nに対して”と記述してあるため n=1の 1も自然数だから。	n=k+1 の時に n=1 は含まれていない から。そして、n=k になっていて、n=0 は含まれていないから、n=k+1 が1になる ことはないから。

図 7　問題 1 および 2 の解答例

問題 3

本問は、伝導性についての正しい記述だけ提示されている状況で、その正誤を判断する二者択一問題と、理由を自由に記述させる 2 問で構成されている。

さて、第 2 章で指摘された困難性の一つ、「k の一般性の理解不足」を捉えるために、評価基準を慎重に設定する必要がある。そこで、$n = k$ のときに仮定ではなく、実際に真であると断定しているような記述は大きな減点対象とした。しかし、そもそも提示された伝導性の記述自体には不備がないため、もしかしたら「証明に誤りがないから」という記述も多いかもしれない。あながち間違いではないため、これを平均的な解答と見なし、評価 B とした。したがって、評価 B は「証明自体に問題なし」と判断している場合とし、評価 A は「k の一般性の理解」が明確に示されている場合とする。一方で、伝導性の誤解や、$n = k$ のときに真であると誤解している場合は評価 C とした。

評価 A	A君の方でも述べた通り，この証明は"不十分"。 …… $=(k+1)^2+3$」 ここまでだったら正しい。 しかし，「よって，……」が付くことにより， どこによってなのかが異なってくる。 (ちなみに正しい結びは，先に書いてある「すると，…」のところ) すべての自然数nに対して(*)が成り立つか どうかは， ① その集合の最初の数は成り立つ。 ② 1つ成り立つ数があれば，次の数は成り立つ。 の2つがそろわないと言えない。	
評価 B	n=kとしてkが真ならばkの次のk+1 も真であるを示していてこれは数学的 帰納法にのっとってやっているから正しい。	数学的帰納法においてn=kのときに 成り立つと仮定し，n=k+1のときも 成り立つことを証明する解き方だから。
評価 C	k+1はkの次の数であり，2つの連続する 数がどちらとも成り立つのであれば，全ての場 合に対して成り立つことが証明できるから。	n=k+1をいきなり証明するより n=kから証明した方が，数学が苦手な 私からすると，途中がはぶかれてなく 分かりやすいから。

図 8　問題 3 の解答例

問題 4

「真であるか分からない項を真と仮定して議論を進めてもよいのか」を尋ねる自由記述問題である。この問題の目的は、含意命題 $\mathrm{P}(k) \to \mathrm{P}(k+1)$ というロジックの理解を確認することにある。

評価基準は、評価 A を基準として減点方式を採用する。本問題では「ある項で成立すると仮定したとき、次の項で成立する」という伝導性のロジックが理解できていれば十分なので、例えば、「$n = k$ はどうでもよく、重要なのは $n = k + 1$ の部分だ」や「$n = k$ で真かどうかは、後々、$n = 1$ のときに成立することを確認するから問題ない」といった意味が読み取られれば、評価 A とする。そして、この理解に至っておらず、理解が不十分な解答は評価 B、より理解が不足しているものは評価 C とする。

評価 A	n=1 のときも成り立つことを示す前までは、 等式(オ)のどこかで成り立っているということしか 証明されていないから。 「どこか」ではなく、「ここから」成り立っているという のを証明するために、n=1 のときも成り立つことを 示さなければいけない。	1つ基準を決めないといけないから。 (例) 文系か理系かわからない時に、出席番号 1番の人が文系と仮定したら次の番号の人 も文系だ ということを証明べきたら まず最初の1番の人が本当に文理か どうか確認する必要がある。 この作業が n=1 のとき成り立つか の確認と同じだと思う。
評価 B	n=k がわかれば、その次の数字も分かる から。	n=1 のときに等式が成り立てば n=k が成り立つときに n=k+1 のとき 等式が成り立つことがいえる
評価 C	"自然数nに対して" と記述してあるため n=1 の 1も自然数だから。	n=k+1 の時に n=1 は含まれていない から。そして、n=k になっていて、n に 0 は含まれていないから、n=k+1 が 1 になる ことはないから。

図 9　問題 4 の解答例

(2) 考察

本節では、新たな指導方略の効果を検証する。表 1 と表 2 は、調査問題における各評価の割合がまとめられている。ただし、評価基準は問題ごとに異なるため（問題 m の A と、問題 n の A は同一の理解レベルを示すわけではない)、問題間比較は適切ではない。分析より、4 つの主要な示唆が得られた。

表１　二者択一問題の正答率

		X 組（新たな指導を取り入れたクラス）		Y 組（伝統的な指導を行ったクラス）		計
問題 1	正解	19 人	90.5%	25 人	92.6%	46 人
	不正解	2 人	9.5%	2 人	7.4%	4 人
問題 3	正解	19 人	90.5%	16 人	59.3%	35 人
	不正解	2 人	9.5%	11 人	40.7%	13 人
計		21 人	100%	27 人	100%	

表２　自由記述問題の正答率

	評価	X 組（新たな指導を取り入れたクラス）		Y 組（伝統的な指導を行ったクラス）		計
問題 1 問題 2	A	7 人	33.3%	1 人	3.7%	8 人
	B	4 人	19.1%	6 人	22.2%	10 人
	C	10 人	47.6%	20 人	74.1%	30 人
問題 3	A	1 人	4.8%	0 人	0%	1 人
	B	4 人	19.0%	8 人	29.6%	12 人
	C	16 人	76.2%	19 人	70.4%	35 人
問題 4	A	4 人	19.0%	1 人	3.7%	5 人
	B	8 人	38.1%	8 人	29.6%	16 人
	C	9 人	42.9%	18 人	66.7%	27 人
計		21 人	100%	27 人	100%	

1. 初期成立性の必要性の理解促進

表 2 の問題 1 と 2 の結果から、評価 A の割合が Y 組 3.7%に対し、X 組 33.3%という顕著な差が見れる。これは新しい指導方略により、初期成立性の必要性の理解が促されたことを示唆している。おそらく、思考プロセスに沿った指導によって、数学的帰納法の全体像や構成が明確となり、初期成立性の重要性が理解されたのであろう。また授業で、伝導性の記述後に「ある場所が正しかったら、次も正しいとしか言えていないが、すべての自然数で成立することを示すには何が必要？」と発問すると、グループ活動を経て「1 のとき」や「スタート地点」という意見が出た。初期成立性の必要性を構成的に得られた経験は重要であったと思うし、伝統的指導であれば、こうした経験は得られなかったと思う。

2. 伝導性の理解促進

表 1 から、初期成立性に関する問題 1 に大きな差はなかったが、伝導性の記述の理解に関する問題 2 では、Y 組の正答率が 59.3%に対し、X 組は正答率 90.5%だった。これは Y 組の生徒の多くが、そもそも数学的帰納法は初期成立性から書かなくてはならないといった誤解を抱いているか、あるいは、伝導性の記述や計算のプロセスの理解が不足している可能性が示唆されている。

さらに、問題 4 の結果では、評価 A と評価 B の合計が Y 組で 33.3%、X 組が 57.1%であった。また、評価 A においても、Y 組が 3.7%、X 組は 19.0%と差が見られた。これは、含意命題 $\mathrm{P}(k) \to \mathrm{P}(k+1)$ というロジックの理解にも肯定的な影響があったことが示されている。

これらの結果から、新たな指導方略は、伝導性の理解に肯定的な効果をもたらしていると考えられる。

3. 文字の一般性の理解を促す他の代数指導の必要性

表 2 の問題 3 では、評価 A と評価 B の合計が X 組で 23.8%、Y 組では 29.6%であり、ほとんど差が見られなかった。この結果は、第 2 章で指摘された「k の一般性の理解不足」という数学的帰納法の困難性に対して、新たな指導方略が効果を示さなかったことを示唆している。

確かに、文字の持つ一般性の意味理解というのは、数学的帰納法固有の問題ではなく、代数指導全般の課題である。そのため、数学的帰納法の導入において、生徒の思考プロセスに沿った指導をするだけでは不十分だったと推察される。したがって、文字の持つ一般性を理解させるためには、数学的帰納法に固有な指導だけでなく、代数指導全般で適用可能な指導方略の組み込みが必要であることが明らかとなった。

4．本質的な理解を追究しようとする信念の形成

自由記述の評価時に、興味深い傾向が見られた。Y 組では「このように教わったから」「教科書にこう記述されているから」「$n = k$ で真であると仮定した方が説明しやすいから」といった記述が目立った（図 10 参照）。実際、Y 組の半数程度が、全 4 問中少なくとも 1 問でこのような記述をしていた。これは、数学的帰納法の意味理解を追究しようとせず、「$n = 1$ を示した後に、$n = k$ が成り立つと仮定して、$n = k + 1$ が正しいことを示すもの」と本質的理解を伴わず、丸暗記する傾向が強いことを示している。

数学問題において、値を変えて出題すると解けなくなる、条件と答えを入れ替えて出題すると解けなくなるという現象は、操作的理解への過度な偏重が原因だと解釈しているが、今回のケースも同様だと思われる。本質的な理解を目指すことの重要性は明らかであり、新しい指導方略は数学学習に対する望ましい信念を形成する上で、有用であることが確認された。

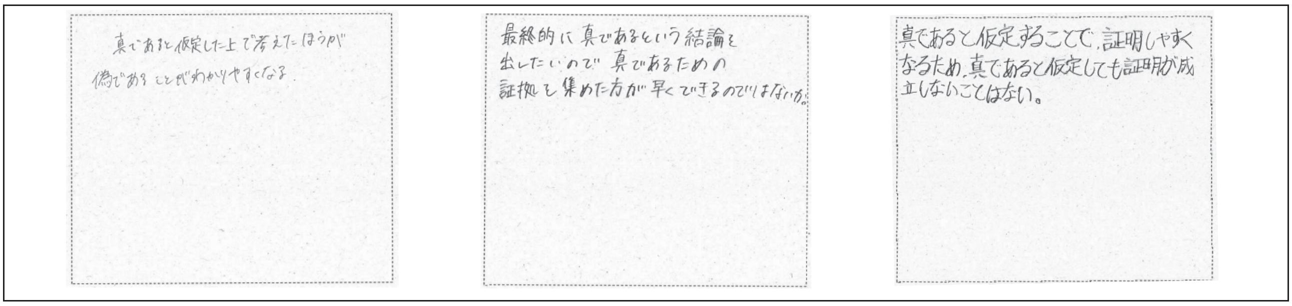

図 10　Y 組に見られた解答例

以上に述べた 4 つの示唆のとおり、第 2 章で挙げた 3 つの困難性のうち、2 つに対しては肯定的な効果があったことが明らかになった。文字の一般性の理解不足に対しては、効果が見られなかったものの、否定的な影響は確認されていない。そのため、新たな指導方略は、今後の指導改善に向けて前向きに捉えられるだろう。さらに、副次的ながら、数学的帰納法の意味理解だけではなく、数学学習に対する望ましい信念にも肯定的な影響を与える可能性があることが明らかとなったことは成果として大きい。

6．まとめと今後の課題

本研究では数学的帰納法の理解を促す新たな指導方略を提案し、その効果を実証的に検証した。第 1 章では数学的帰納法の歴史的背景を紐解くとともに、その指導の蓄積が個人研究レベルに終始している現状を指摘した。第 2 章では、数学的帰納法の理解の困難性に関する先行研究をレビューし、数学的帰納法の 3 つの困難性を示した。第 3 章では、これらの困難性に基づき、生徒の思考プロセスを大切にする指導方略を開発した。第 4 章ではこの指導方略を実際の授業に適用し、その成果を検証するための調査を行い、第 5 章では、調査結果の分析と考察を通じて、新たな指導方略による効果を明らかにした。主要な成果としては、初期成立性の必要性と伝導性の理解に関して、新たな指導方略を受けたクラスは、顕著に肯定的な効果が見出された。しかし、「k の一般性の理解不足」という困難性に対しては、効果は見られなかった。また、付随的ではあるが、新しい指導方略によって、本質的な理解を目指そうとする、数学学習に対する望ましい信念を形成する効果も確認された。

今後の課題は以下の 3 点が挙げられる。1 点目は、本研究でのデータ収集が 48 人分に限られていたことである。より広範なデータを基にした再分析と再考察が望まれる。2 点目は、「文字の一般性の理解」を促すような代数指導の検討が必要である。3 点目は、得られた成果に基づき、学習指導案を作成し、実践と検証を重ねて、より効果的な指導の開発に努めることが必要である。

注

1. 例えば「生徒が一列に並び、前の人が挙手したら続く人も挙手し、全員が挙手するのに必要な条件を考える授業」や「敷き詰めの規則を探究するような、幾何的な規則の発見を目指す授業」等がある。
2. つまり、紙面上に学習者の思考プロセスまで取り込む必要がないだろうという意味である。
3. ペアノは、集合 N と定数 0 と関数 S と命題 E に関する 5 つの公理（ｉ）～（ｖ）を用いて自然数を内包的に定義した。
4. ここで言う「問題解決」とは、「意味や本質を理解せず、計算操作や記述をして、一旦の答えは出せてしまう状態」を指す。

（ｉ） $0 \in \mathrm{N}$
（ⅱ） 任意の $\mathrm{n} \in \mathrm{N}$ について $\mathrm{S(n)} \in \mathrm{N}$
（ⅲ） 任意の $\mathrm{n} \in \mathrm{N}$ について $\mathrm{S(n)} \neq 0$
（ⅳ） 任意の $\mathrm{n, m} \in \mathrm{N}$ について
$\mathrm{n} \neq \mathrm{m}$ ならば $\mathrm{S(n)} \neq \mathrm{S(m)}$
（ｖ） 任意の $\mathrm{E} \subset \mathrm{N}$ について
$0 \in \mathrm{E}$ かつ任意の $\mathrm{n} \in \mathrm{N}$ について
$\mathrm{n} \in \mathrm{E} \rightarrow \mathrm{S(n)} \in \mathrm{E}$ ならば $\mathrm{E=N}$

引用・参考文献

真野祐輔（2016).「証明読解の水準からみた数学的帰納法に関する困難性の特徴づけ：大学生 19 名を対象とした質問紙調査を通して」. 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, 第 22 巻, 第 2 号, pp.123-132.

戸瀬信之ほか(2022).『高等学校数学 B』.数研出版.

村上一三（1990).「数学的帰納法の理解の困難点について：証明の仕組みを視点として」. 日本数学教育学会誌『数学教育』, 第 72 巻, 第 11 号, pp.38-46.

山口格（1987).「数学的帰納法について：数学教育の立場からの考察」. 北海道大学大学院教育学研究院教育方法学研究室『教授学の探究』, 第 5 号, pp.105-116.

Ernest, P. (1984). Mathematical induction: a pedagogical discussion, Educational Studies in Mathematics, vol.15. 173-189.

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Philippou, G. N. (2007). Preservice teachers' knowledge of proof by mathematical induction, Journal of Mathematics Teacher Education, 10, 145-166.

付録（調査問題）

問題
すべての自然数 n に対して，次が成り立つことを証明せよ。
$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2+3 \cdots (*)$
証明
$n=k$ のとき $(*)$ が成り立つと仮定すると，
$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2+3$
すると，次のように，$n=k+1$ のとき，$(*)$ が成り立つ。
$1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)$
$=(k^2+3)+(2k+1)$
$=k^2+2k+1+3$
$=(k+1)^2+3$
よって，すべての自然数 n に対して $(*)$ が成り立つ。

上に示した証明問題について，A君，Bさん，C君，Dさんが以下のように対話しています。

A君　：この証明は正しくないよ。$n=1$ のときに等式 $(*)$ が成り立つことを示していないから。
Bさん：どうして $n=1$ のときを示す必要があるの？
C君　：この証明は，"$n=k$ のとき等式 $(*)$ が成り立つならば $n=k+1$ のとき等式 $(*)$ が成り立つ" を示しているね。この部分の証明は正しいと思う。
Dさん：数学的帰納法による証明をするときにいつも思うことなのだけど，真であることをこれから証明しようとしているのに，真であると仮定したのでは，証明が成立しないのではないの？

以上を踏まえて，次の問いに答えてください。

問題1. A君の発言は正しいでしょうか。正しいと思う方に丸を付けて下さいまた，そう考える理由を記述して下さい。

正しい　・　正しくない

理由

問題2. Bさんの発言に関して，あなたの考えを記述して下さい。

問題3. C君の発言は正しいでしょうか。正しいと思う方に丸を付けて下さいまた，そう考える理由を記述して下さい。

正しい　・　正しくない

理由

問題4. Dさんの発言に関して，あなたの考えを記述して下さい。