イプシロン　2023. Vol.65, 1 − 10

「ボタンを押して簡単な数学実験」のコンセプトと具体例 ータブレットを使った数学的探究を広げていくための試みー

愛知教育大学　**飯　島　康　之**

0.はじめに

これからの算数・数学教育は,「タブレット・WiFi・クラウド」をインフラとして使いこなすことを前提として研究・実践を開発していくことが必要だと思う（飯島,2023)。教員研修等で先生方の話題や反応を伺っていると，変化の速さを実感する。夏にはあまり話題にならなかった「定期テストの採点の支援」は，秋にはかなり話題になっていた。テレビ広告などを見ると，子どもの習熟の様子を把握し，適切な問題を出すための AI 活用が進展し，商品化されていることも実感する。子どもの習得型の学びの様子の把握やその支援は短期間に進展し，先生方が果たす役割も変わっていくのかもしれない。

算数・数学教育で習得型の学びが重要であることは明らかだが，ICT 活用が習得型の学びの支援のみに限定されるのは，極端に旧来的な学力の強化のみに算数・数学教育を矮小化してしまうのではないかと思う。GIGA 端末に自由にアプリを入れることはできないとしても，ブラウザ上でさまざまな web アプリケーションを使うことはできるし，ブラウザ経由で，いろいろなデータを得ることもできる。また，カメラなどさまざまなデバイスやセンサを使うこともできる。算数・数学的探究を広げていくための道具としての可能性にも注目し，理論的研究・実践的開発研究をすることも必要と考えられる。

本稿では,「ボタンを押して簡単な数学実験」という名称で開発している web ページ群（http://www.auemath.aichi-edu.ac.jp/teacher/iijima/html5/index_01a.htm）について，その背景・コンセプトそしてそれを使った数学的探究の具体例を紹介することにしたい。

1. 「ボタンを押して簡単な数学実験」の背景

1.1 豊富な数学的現象の観察を可能にする

伝統的な道具，たとえば紙や鉛筆などを使った計算等で接することができる数学的現象の範囲をさらに広げるための道具として ICT を使いたい。これがもっとも基本的な背景だ。現実の数学教育の中での ICT 利用がそれほど広がっていないのは，数学教育での適切な ICT 利用は決して簡単ではないことも意味している。しかしそれ以上に，ICT によって今まで私たちが観察していた数学的現象がどう広がり，どういう数学的探究が可能になるのかを体験することを共有することを，まず重視すべきのではないかと考える。

1.2 インストールなどの作業なしに使えるようにする

これまでも，様々な数学用ソフトは開発され，利用されてきた。mathematica などがもっ

とも代表的なものといえる。一方，学校教育での気軽な利用を可能にし，裾野を広げていく上では，学校などで管理されている機器でも使えること，つまりインストールなどの作業をしなくても使えるものを拡充していくのが，GIGA 時代では必要なことではないかと考える。そのような意味で，「ボタンを押して簡単な数学実験」はブラウザで表示されるホームページとして実現している。

1.3 他のソフト等との連携的な利用

一つのソフトで完結する必要はない。ブラウザを介してさまざまなデータを取得することも，他の web アプリと連携することもできるし，Excel など機器にインストールされているソフトと連携することもできる。逆にいえば，Excel などを単体で使うときの限界を広げていくものとして位置づけるのも現実的だ。

1.4 シームレスに次のステージのプログラミングにつなげていく

ICT 利用はそれまでの限界を広げてくれるとともに「新しく生まれる限界」を意識させてくれる。これまで素数として現実的に扱えるのが 10000 以下程度だったとしたらそれを 1000000 くらいまで広げてくれるのは素晴らしいと思えると共に，「もっと先まで扱えるようにするにはどうしたらいいのだろうか」という限界を実感したりする。アルゴリズムを改変できる余地もある。言語を変えたりライブラリを選択する可能性もある。扱う問題に必要なことに合わせてシームレスに次のステージが広がっていくのも ICT 利用の世界でもある。閉じているのではなく，そういう世界に広がっている「入り口」として扱いたい。そこではプログラミング等も必要になってくるだろうが，「プログラムされたものを使う利点を実感する」ことをかなり単純な形で提供するのが「ボタンを押して簡単な数学実験」でもある。

2. 「ボタンを押して簡単な数学実践」のコンセプト

2.1 基本的なデザイン / 上のエリアに適当に入力してボタンを押したら下のエリアに結果が表示される

入出力エリアへのデータの出し入れは手入力などの他，「コピー&ペースト」を使うことも想定する。特に二種類を組み合わせて使うような場合，出力されたものを，別の入力エリアにコピー&ペーストしてボタンを押して処理するような使い方を想定する。それは入力データをもに出力データを生成する関数を「ボタンを押して処理」で実感することにもつながる。組み合わせて使うのが「不便だ」と思ったら，プログラミングを使うとそれらの組み合わせをまた一つのまとまりとして扱えて便利になることを意識するという流れでもある。

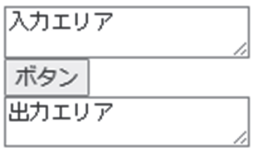

図 1 基本的な配置

2.2 数学的には基本的なのだが，プログラミングで実現するのはちょっと面倒なものを扱う

どのプログラミング言語でも，標準的な演算や関数が用意されている。目的に合わせて拡張したいときにはライブラリ等を使うようになっている。数学や統計で使うものは整備されているものが多いのだが，ときどき「数学的な探究に必要と思えるのに実装されていない」

ものがある。それらをまとめてライブラリとして提供する手もあるが，その利用には「標準的ではないライブラリをダウンロードして，それを使う」という，初心者向きではない方法が必要になる。それを避け，簡単に使えるようにする試みでもある。

2.3 他のソフト等との連携に便利なちょっとした機能の実装

Excel にデータを貼り付けて使いたいというとき，ちょっとしたことでコピペがうまくいかなくて困るということもある。それを回避するためのちょっとした機能の実装もある。

3. 具体例

3.1「文字/単語カウンター」と青空文庫・ウルフラムアルファ

(1) 小説の中での文字の頻度を調べる

web には膨大なテキストデータがある。それを使った探究をするために,「文字/単語カウンター」を作ったのが「ボタンを押して簡単な数学実験」出発点である。Word には特定の文字や単語の出現回数を調べる機能はあるが，一括して調べる機能はない。そこで「文字/単語カウンター」は上のエリアにテキストをコピーしてボタンを押すと，使われているすべての文字に関して，文字と文字数を，また英語など空白区切りが使われる文章については単語数を数えて整理するものがほしいと思った。シャーロックホームズは「踊る人形」という小説の中での暗号解読を，英語の文章の中でのアルファベットの文字の頻度を使って行っているが，それを検証すべく，踊る人形の原文を web 上からコピーしてボタンを押すと，小説の中で書かれていることがほぼ正しいことを確認できる。日本語では単語数を数えられない。そこで，2 文字とか 3 文字綴りについての頻度も調べられるようになっている。

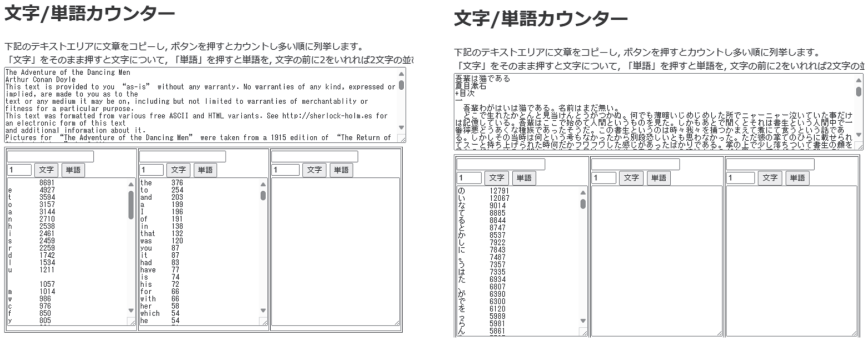

図 2 「踊る人形」と「我が輩は猫である」で使われている文字についての結果

青空文庫などには膨大な作品がある。「他の作家だったらどうなるのか」「他の言語だったらどうなるのか」など，問いを変えながら調べてみるのも一つの方法だ。入力エリアは見た目は小さいが web からのコピペを張り付けるのだから，かなりの長文も可能だ。夏目漱石の「我が輩は猫である」は 100 万文字を越えるが青空文庫からのコピーは一瞬だ。処理させてみると「ページは応答していません」という表示が出る。しばらく待つと結果が表示されるけれども，実質的にはこれくらいの長さが限界だ。

(2)「πは無理数」について調べる

「大規模なデータ」として数学の中で手軽に得られるものとして無限小数を考えてみる。分数の小数表示ならいくらでも得られるけれど，循環してしまうので無理数に注目したい。円周率πは無理数なので循環しないはずだが，「3.14..」ではもちろん，Excel の関数で得られる「3.14159265358979」でもそれは実感できていない。これを計算するのは大変なので，ウルフラムアルファ(https://ja.wolframalpha.com/)を利用する。たとえば，N[Pi,10000]と入力すると 10000 桁まで表示することができる。

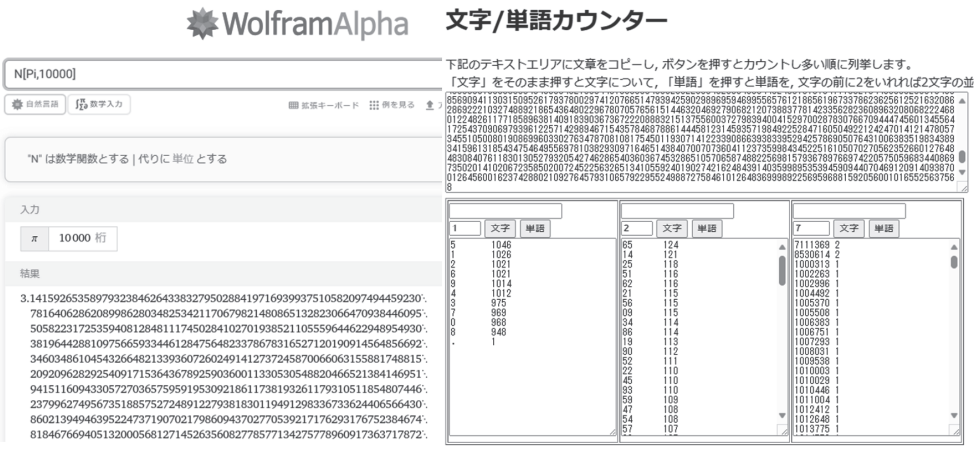

図 3　πを 10000 桁表示し使われている数について調べる

これをプレーンテキストとしてコピーし，ボタンを押すと，0 から 9 までの数値が使われる回数は 5(1046 回)から 8(948 回)までに分布している。無限に循環している部分はあるのだろうか。2 文字として分析すると 65(124 回)から 88(80 回)と分布は分かれるがここには 100 通りすべてが登場していることを確認できる。さらに 7 文字になると全部で 10000000 通りあるわけだが，最大でも 2 回しかない。8 文字になるとすべてバラバラになる。πを 10000 桁表示して観察しても理解を深めることはできないが文字/単語カウンターでこの程度のことまでは観察できる。この「バラバラさ」は，いわば乱数を実感させてくれる。同じようなことを√2,√3,e など思いつく無理数について調べたが，ほぼ同じ結果になった。数の分布が偏った無理数は人為的には作れるけれど，「自然に接する無理数」にはこういう特徴があるのかもしれない。つまり，この「バラバラさ」はある意味での「自然さ」を表現してくのかもしれない。

3.2「素数の生成」と「数値カウンター」

数学的に意味がある「無限個のデータ」を調べてみる例として，素数に注目してみた。これは無理数の小数表示のように，数(あるいは文字)が続くというよりも数値(データ)が無限個あるので，カンマ区切りで分けて処理する「数値カウンター」を作った。頻度を「数値順，降順，昇順」で表示してくれる。

(1) 素数の密度

素数は無限にある。どこまでにどれくらいあるのか。それは「素数の生成」を使うだけでもかなり調べることができ，10 から 100 万まで順に桁を増やした場合の結果をまとめると，図 4 になる。データのみから素数定理の式を導く生徒はいないだろうが，比較してみてかなり一致していることを実感することはできるだろう。

n	個数	割合	n/log(n)
10	4	0.4	0.431364
100	25	0.25	0.215682
1000	168	0.168	0.143788
10000	1229	0.1229	0.107841
100000	9592	0.09592	0.086273
1000000	78498	0.078498	0.071894
10000000	664579	0.066458	0.061623

図 4　素数の分布

(2) 4 で割った余りが 1 と 3 のどちらが多い?

2 以外の素数はすべて奇数だ。それは 4 で割れば余りは 1 か 3 になる。片方に偏ってもおかしくないし，均等でもおかしくない。1000000 以下の素数を表示すると 9592 個が瞬時に求まる(1000 万以下，664579 個くらいが実質的な限界)。それらを 4 で割ると 2,3,1,,,..という列が得られそれを数値カウンターにコピーしてボタンを押すと，1 : 4783, 2 : 1, 3 : 4808 ということがわかる。

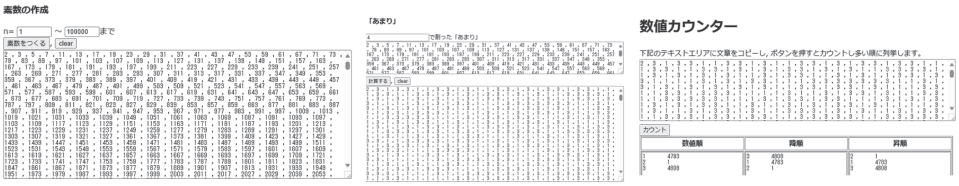

図 5 素数を 4 で割った余りを求めその数をカウントする

(3) 素数の一の位の数は?

一の位の数についても同じように考えられる。今度は 1, 3, 7, 9 の 4 通りになるはずで，同じような処理をすると，次のようになる。

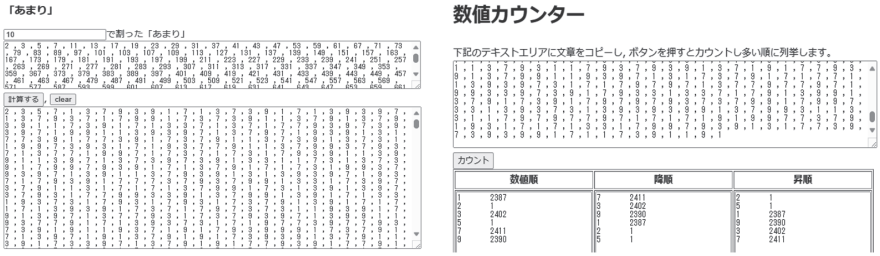

図 6 素数の一の位で使われている数について調べる

(4) 素数の列は数列としてみると特徴はあるのだろうか

ほぼ同じ割合で{1, 3, 7, 9}という数値が並ぶわけだが，これはπのときと同じように並び方はランダムなのだろうか。ここからカンマを取り除いて文字列としてみたときに，2 文字，3 文字等の分布を観察してみたら，次のようになった。

一の位の分布はほぼ均等なのだが，たとえば，1 の次は 7, 3 がほぼ同じでやはりほぼ同じと思える 9, 1 とかなり差がある。3 文字の並びはもっとばらけて 391 は 346 回もあるが，

111 は 26 回, 777,999 は 27 回, 333 は 35 回になっている。同様のことは,「十進法」でなく，たとえば,「五進法」でも「七進法」でも観察できる。

これらの事実が何を意味するのかわからないけれど，素数の世界は π とか乱数とはまったく違った不思議な世界があることを垣間見た気がした。

(5) 素数列の階差数列

連続する奇数が素数になっているとき，双子素数と呼ばれる。これを一般化するなら，階差数列がどうなっているかを調べることになる。10 万以下の素数に関しては，双子素数の割合よりも差が 6 の場合の方が多い。また，最も大きな差は 72 だ。10 万以上の素数について調べたとき，これらの結果がどう変わっていくのか。

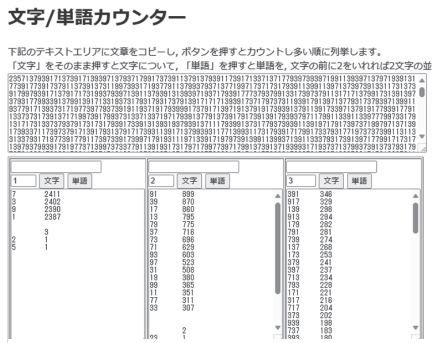

図 7 一の位のつながりは均一ではない

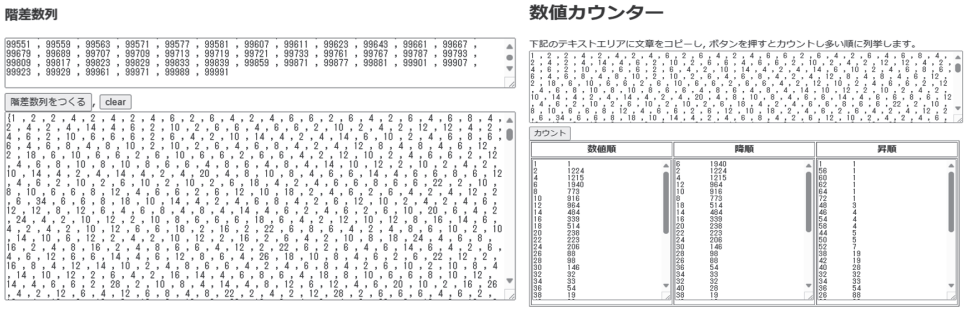

図 8 素数列の階差を調べる

3.3「乱数サイコロ」と「ヒストグラム」

「サイコロを多数回ふる実験」のシミュレーションは，以前からよく行われてきた。「多数回行えば，相対度数は数学的確率に近づいていく」という大数の法則を実感することよりもっと深めることはできないだろうか。その観点で少し深めてみた。

(1) 回数を増やすと 1 の目が出る相対度数が 1/6 に近づく

まず，サイコロ（乱数）をふる回数を 10, 1000, 10000, 100000, 1000000 回と 10 倍ずつに増やしてみる。たしかに回数を増やすごとに 1/6 に近づいていくことを実感できる。今回 100 回での相対度数が 0.24 ということは 1/6 に近いという実感がわかない。1000 回とか 10000 回サイコロを振るのは現実的ではないことを考えると，シミュレーションの必要性を実感するけれども，この 0.24 というのも偶然なら他の地も偶然のはずなので，たとえば，10 回のとき，100 回のときなどにどんな相

図 9 1/6 に近づく様子

対度数の値が出るのかを実感した方がいいのではないかと感じる。

(2) 10 回の実験を 1000 セットやったとしたら，1 の目が出る相対度数はどうなるか。

10 回の実験を 1000 セットすると，100 個の相対度数のデータが得られるので，これを図 10 のように 3-histograms/HS のデータ 1 に入力し，100 回 1000 セットのデータをデータ 2 に，1000 回 1000 セットのデータをデータ 3 に入力して分析すると，図 10 左のような統計量とヒストグラムが得られる。100 回と 1000 回に関して階級の幅を 0.01 にしたヒストグラムを重ねて比較すると，図 10 右のように平均値は同じだが，分布のばらつきが小さくなり，とがった山に変わっているのを観察することができる。

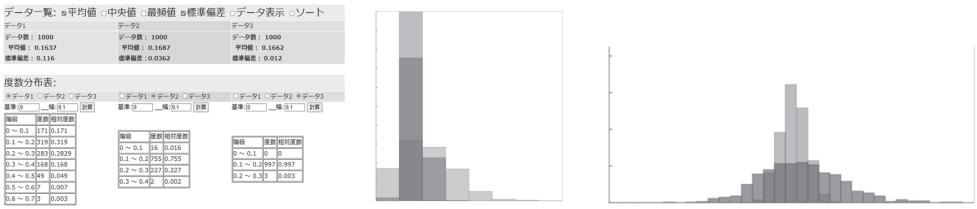

図 10 標本数による一の目の出る相対度数の分布の変化

(3) 複数個のサイコロの和についての分布はどうなるか

中学校の確率ではサイコロを 2 つ投げたときの目の和について考えることがあるが，これを 3, 4, 5 と増やしていくと目の和に対する確率の分布はどうなるのだろう。

図 11 ではサイコロ 2 個を振ったときの和が 10000 個あるが，このようにサイコロ 3 個，4 個の和のデータもそれぞれつくってヒストグラムをつくると，2 個のときには折れ線だったのが，次第に釣り鐘のような形に変わっていくことを観察することができる。ちなみにサイコロ 100 個の目の和の分布は図 12 のようになり，かなり正規分布のような形になっていくことがわかる。

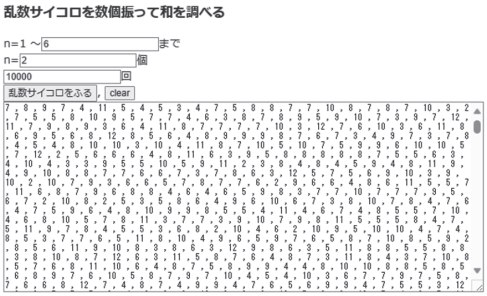

図 11 サイコロ 2 個の目の和

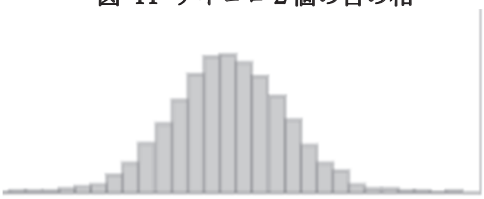

図 12 サイコロ 100 個の目の和

3.4 正規分布っぽい乱数データの作成とサンプリング

(1) 正規分布っぽい乱数データ

サイコロをたくさん投げたときの目の和を参考に，乱数の和を使って「正規分布っぽい乱数データ」を試作してみた。平均 100 で標準偏差が 10 の正規分布っぽいデータ 10000 個を生成すると，次のような感じになる。

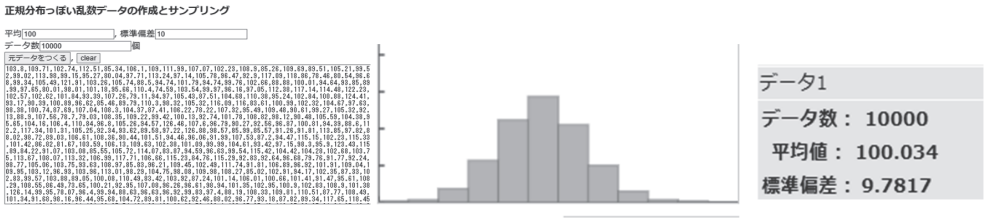

図 11 正規分布っぽいデータの生成とそのヒストグラム

これは正規分布そのものではないけれども，「正規分布のような形をしている母集団のデータを架空に生成したもの」と想定し，そこからサンプリングすることを考えてみたい。

(2)　標本平均などとの比較

たとえば，上記の母集団から，10, 100, 1000 の標本を一つずつ作成し，それぞれの平均値と標準偏差を求めてみた。ここでは平均はデータ数に応じて母集団平均に近い値が出ているが，標準偏差に関しては必ずしもそうなってはいない。しかし，標本を 1 つしか得ていないので，標本数に応じたサンプリングをたくさん行ってみてその標本平均や標本標準偏差の分布を検討してみるきっかけにもなるだろう。

図 12 標本数の異なるサンプリング

(3)　標本平均の分布や 95%信頼区間

上記のように生成した母集団からたとえばデータ数 100 のサンプルを 50 個つくり，そのデータを Excel を使って検討してみよう。「サンプルをつくる」ボタンを押すと 100 個のデータができるが，これを Excel にコピーするにはタブ区切り等にするボタンを押してから図 15 のように Excel にはりつける。50 行分コピーしてそれぞれの標本平均を計算してみると，図 14 のヒストグラムのように分布している。

図 13 標本を作成し Excel にコピーする様子

95%信頼区間というのは，標本平均の 95%が入る区間のことを示しているがそうなのだろうか。図 15 では標本平均/母集団標準偏差*√標本数を計算して 1.96 を越えるものを赤く表示してみた。今回は 50 個中 4 個つまり 8%が範囲を逸脱してしまっているので 92%しか収まらなかったが，95%信頼区間の意味，つまりかなりのものは入るけれども 5%くらいははずれるリスクがある区間だということを実感できたといえる。

図 14 標本平均のヒストグラム

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	標本平均	差/SD*√n	標本							
2	100.9198	0.90556856	107.99	108.08	82.5	102.22	107.73	89.87	91.05	101.14
3	98.3397	1.73211201	95.6	92.96	95.87	107.96	102.92	77.02	103.73	95.2
4	100.5242	0.50113988	97.68	82.24	97.83	99.03	98.5	103.54	102.3	99.76
5	99.6101	0.43336025	107.3	95.45	93.14	94.8	97.38	104.76	91.58	99.67
6	100.5549	0.53252502	95.16	95.51	106.81	108.35	100.53	99.33	111.94	95.82
7	99.2953	0.7551857	86.32	111.31	102.04	97.78	92.95	114.97	103	89.03
8	101.6172	1.61853257	97.66	115.69	103.25	93.55	96.12	89.71	91.03	103.52
9	99.3064	0.74383798	103.65	96.03	89.07	109.86	110.59	110.27	104.05	110.67
10	100.0596	0.02617132	106.83	102.09	87.29	90.1	92.54	98.92	101.55	107.09
11	100.5998	0.57842706	107.77	97.57	79.44	100.84	84.76	103.23	88.84	96.23
12	102.3255	2.34263983	107.81	83.97	104.11	95.82	110.01	91.96	96.64	102.37
13	100.0486	0.01492583	99.88	102.84	103.01	114.89	97.79	88.95	114.34	112.19

図 15 1.96 内に収まっているかどうかの検証

4. おわりに
–「次のステージ」としての「数学的探究の広がりや深さを見極めて教材化」–

上記では「ボタンを押して簡単な数学実験」の具体例を紹介したが，数学教育研究としてはこれは出発点でしかない。従来の道具でできた実験をただプログラム化して扱える範囲が広く計算が速くなっただけなのか，それによってこれまで観察できなかった数学的現象が観察可能になったのか，それを理解したり議論する上で，これまでとは違う数学的概念や方法を意識化するためのきっかけになるのかなどを見極めなけれ

図 16 1/素数の小数展開を 100 桁まで調べた結果

ばいけない。

たとえば，簡単な機能だけれども，それなりに奥が深い探究を提供してくれる例として，図 16 を挙げてみたい。1/n の小数表示の循環節に注目するなら，なるべく循環節を長くするために，分母を素数にしてみることを思いつくだろう。7 のとき循環節が 6，つまり 7 - 1 であることを考えると，素数 - 1 になっていそうに思える。でも，実際はそうなる場合もあるけれど，そうとはかぎらない。何が背景にあるのかなどを考えると，単純な機能でも様々な観察を可能にしてくれて，広い探究を可能にしてくれると言えるだろう。

逆にいえば，たとえば$\sqrt{2}$ の小数展開を 100 桁とか 10000 桁表示したときに同じように広く探究が可能とは思えなかった。違う観点で何かできないかと試みたのが，π の小数展開についての探究や素数列の一の位の探究でもあるのだが，これが深い探究に結びつくのかどうか，私にはまだよくわからない。ただの偶然なのか，新しい数学的法則を垣間見ているのか，よくわからない。

一方，素数の分布などに関していえば，100 万以下の素数の個数など，今だからタブレットでも瞬時に個数を数えられるけど，素数定理の式が発見された当時，そんなものはなかった。どうやって素数を求め，そして推測したのか，過去の数学者の努力や洞察のすばらしさを実感するために使うというような教材化もあるのかもしれない。多くの事例を蓄積しながら，そのような教材化を進めていくことは，次のステージといえるだろう。

なお，それらの教材化を進めていく上で，ぜひ意識していただきたいことがある。それは，「タブレットという文房具で行える日常的な世界」なのだということだ。さらにいえば，タブレットやクラウドの中で実現されている「観察可能・操作可能な数学的世界」はさらに大きく進展している。そして，そういう世界で生きていくのが，目の前の子どもたちであって，この子たちの未来の生活からの逆算から，どんな体験を提供するのがよいかを考えるのが，「タブレット・WiFi・クラウド」をインフラとした算数・数学教育を考えていく一つの着眼点でもあるということだ。

それは未知の世界の開拓でもあって，決して簡単ではないのだけれど，数学教育研究でそのような努力をしないままでいくと，算数数学教育は「古典的な知識・技能を個別最適な学びによって効率的に習得すべき」ものに位置づけられてしまうのではないだろうか。そんな危機感を感じている。

参考文献

飯島康之(2023)「タブレット・WiFi・クラウド」時代の数学教育のスタンダードづくりへ」，日本数学教育学会誌，105,11,1