

数学的な考えをもとに問題を共有し、解決に向かう子どもの育成 — 中学3年生 関数 $y=ax^2$ の実践より —

岡田 淳也* 青山 和裕**

*附属岡崎中学校

**数学教育講座

Nurturing children who share problems based on mathematical ideas and work toward solutions

- Function $y=ax^2$ in the third year of junior high school -

Junya OKADA* and Kazuhiro AOYAMA**

*Okazaki Junior High School Affiliated to Aichi University of Education, Okazaki 444-0864, Japan

**Department of Mathematics Education, Aichi University of Education, Kariya 448-8542, Japan

1 主題設定の理由

身の回りの現象において、規則を見出すことができれば、その規則の関係を式化することができる。また、代数を用いることで、条件が変わった場合にもその式を適応させ、変化を予測することができる。現象に対して、規則を見つけ、他の場面でも適応することができるかと考えを広げることができるのが、代数を用いた考え方、関数関係を見出す考え方のよさである。しかし、身の回りの現象においては、様々な条件、要因が関わっているため、容易に規則を見出せる場面は限られている。そこで、より実態に近い傾向や関係性をとらえるために、人間の働きによって、条件を整理し、最適化していくことが必要である。そうすることで、身の回りの現象においても関数関係を見出すことができる。あらかじめ数学的に整理された状況において関数関係を見出すだけでなく、身の回りの実際の場面から、条件や要因を自分たちで整え、関数関係を見出し、活用できることを味わう経験から、関数関係を見出すよさを、より実感することができる。

昨年度の追究單元では、一次関数、箱ひげ図とデータの活用の領域で実践を行った。

「子どもの自由な個人調べが進んでいるが、条件の幅が広く探究的な活動になっている」、「数学的な視点をもった意見が交わされる場面が少ない」という課題が挙げられた。そこで、子どもの意識を調べるために、数学の授業についてのアンケートをとったところ、次のような結果が得られた。

追究單元において

- ①とてもあてはまる②あてはまる
③あまりあてはまらない④あてはまらない
- 1 明確な見通しや目的をもって追究ができて
いるか
①5人 ②11人 A③16人 ④4人
- 2 成果や課題を振り返りながら、個人追究を
することができているか
①10人 ②21人 ③3人 ④2人
- 3 意見交流で自分の考えを伝えることができ
ているか
①11人 ②6人 B③16人 ④3人
- ③④と答えた(19人)主な理由
・自分のもっている考えに自信がない 84.2%
・解決のためにどういう発言をするべきかわからない 63.2%
・自分の考えをしっかりとつづけていない 36.8%
- 4 意見交流に向けてどんな意見を聞きたい
か考えが明確になっているか
①4人 ②12人 C③17人 ④3人
- 5 意見交流内で仲間の考えが理解できているか
D①11人 ②22人 ③3人 ④0人
- 6 仲間の考えを聞いて、その先の追究の参考
になることはあるか
E①19人 ②16人 ③1人 ④0人

アンケートの結果から、意見交流を行うことで、仲間の意見を理解し、その先の追究の参考にすることができている子どもが多いことがわかる（D、E参照）。一方で、自分の考えを伝えることができていない子どもが半数いる（B参照）。また、個人追究において、明確な見通しや目的がもてていないこと（A参照）、意見交流において仲間のどんな意見を聞きたいか考えが明確になっていないこと（C参照）が課題であると考ええる。

以上のこととこれまでの追究単位での実態を踏まえ、「成果と課題を視点に個人追究の全貌を把握すること」、「意見交流までの追究の到達度を整理すること」の二点を支援するためのてだてを講じることで、子どもは、数学的な考えをもとに問題を共有し、解決に向かうことができるのではないかと考えた。そこで、目ざす子どもの姿を「数学的な考えをもとに問題を共有し、解決に向かう子ども」として、本研究を進めることにする。

2 研究の構想

(1) 目ざす子どもの姿

数学的な考えをもとに問題を共有し、解決に向かう子ども

(2) 研究の仮説

個人追究の段階において、自分の考えの全貌を把握するための工夫をしたり、問題を共有する意見交流までの自分の追究の到達度を整理するための工夫をしたりすれば、数学的な考えをもとに問題を共有し、解決に向かうことができるだろう

【本研究における表出させたい姿】

・「どうすれば軌道を予測することができるか」という問題を共有し、追究を通して、軌道に関わる要素を整理して関数関係を見出すことで、条件が変わった場合にも軌道を予測することができるということを見出す姿
 <追究の様子や追究ノート、単元まとめより>

(3) 仮説を検証するためのてだてと方法

てだて① 追究シートにおける思考ツールの活用（自分の考えの全貌を把握するため工夫におけるてだて）

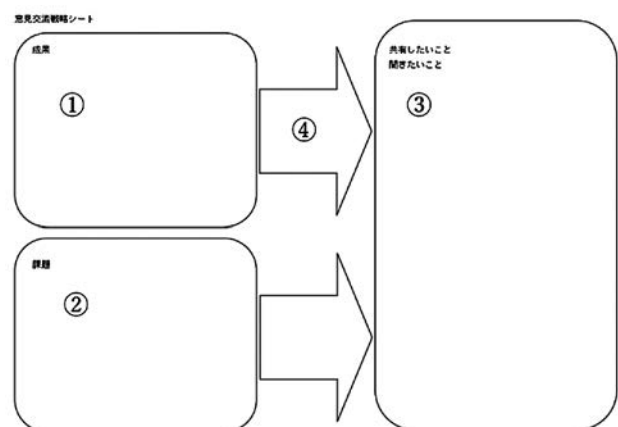
個人追究において、思考ツールを用いて、追究の全貌の把握を促す。今回は個人追究において、思考ツールのマインドマップを用いることとする。マインドマップはアイデアを枝分かれ状に記載することができ、自由な発想とそのつながりや系統性を把握することができ、追究の全貌を整理することができる。追究シートは、Google Chromeの拡張機能である「Google Chromeのマインドマップ」を利用する。追究シートは、子どもが追究の過程を記録していくものとする。自分の追究の全貌や系統性、成果と課題を視覚化することで、それらを解決するために必要な数学的な考えを働かせた、よりよい考えを練り上げることができる考える。

【検証方法】

- ・個人追究における注目生徒の考えの変容を分析する（マインドマップへの記述、追究内容、教師との対話、意見交流で共有された問題をもとにマインドマップに記載する今後の見通し）

てだて② 意見交流戦略シートによる追究内容の整理を促す（問題を共有する意見交流までの自分の追究の到達度を整理するための工夫）

個人追究での進捗具合を見取り、意見交流の前時に、意見交流戦略シートを用いて自分の追究の到達度を整理する場を設定する。



- ① 自分の追究における現状の成果
 ……自分の追究のよさ
- ② 自分の追究における現状の課題
 ……自分の追究のたりなさ

- ③ ①、②から意見交流で共有したいこと
 ・・・・意見交流へのねらい

④ 解決の根拠、困り感

・・・・数学的な考え

意見交流戦略シートに、①成果、②課題、③意見交流で共有したいこと、④解決の根拠、困り感を記述することで、現状の追究の到達度を整理することができる。成果と課題は、自分の追究のよさとなりなさとして把握することができる。それらをもとに意見交流において、どんな意見を共有したいか、自分の追究のどの部分を補いたいのかを、意見交流へのねらいとして整理することができる。また、解決の根拠や困り感を記述することで数学的な考えに迫りやすく、よりよい考えを作っていくための問題共有を行うことができると考える。

【検証方法】

- ・注目生徒が問題を共有できたかを分析する
 （意見交流でのシートへの加筆、発言内容、振り返りの記述、教師との対話）

4 注目生徒について

本研究を行うにあたって、大地を注目生徒とし、その変容を追う。本単元において、マインドマップによる追究の全貌の把握と、意見交流戦略シートによる追究の到達度の整理を行うことで、自分の追究に対する成果と課題を的確にとらえ、数学的な考えをもとに問題を共有し、解決に向かってほしい。

5 教材について

大砲のおもちゃをモデルに、砲弾を命中させた史実を再現することを目的とする。単元の始めには、岡崎市も舞台になっている大河ドラマ「どうする家康」から、徳川家康を紹介する。徳川家康が天下統一を果たした過程に、大阪冬の陣という戦いがある。大阪冬の陣で徳川軍は、海外から輸入されたカルバリン砲を利用した。大砲の他にも、地下を掘り進めるなどの策を講じていた徳川軍だったが、先を見据えていた家康は、できるだけ大砲を

撃たずに終わるのが理想だと考えていた。最終的には、櫓、陣屋、天守閣を次々と撃ち落とし、その脅威から、戦意を失った相手が和睦を受け入れたとされている。むやみに大砲を撃つことなく、脅威を知らしめたのは、大砲を操る技術があったからである。攻め込んだ城の周りから奇襲を成功させるには、城の周りの任意の場所から砲弾をねらった場所に当てる必要があり、そのためには砲弾の軌道を事前に予測できるようになる必要がある。解決に向け、砲弾の軌道を予測する方法を追究する。軌道を予測するための要素は、角度、高さ、縦と横の動き、放物線、シミュレーションによる実験などが考えられる。さまざまな要素を整理し、条件付けを行っていくことで、式や表などを用いることで軌道を予測することができるようになる。

6 授業の実際と考察

研究の仮説

個人追究の段階において、自分の考えの全貌を把握するための工夫（てだて①）をしたり、問題を共有する意見交流までの自分の追究の到達度を整理するための工夫（てだて②）をしたりすれば、数学的な考えをもとに問題を共有し、解決に向かうことができる（目ざす子どもの姿）だろう

てだて① 追究シートにおける思考ツールの活用（自分の考えの全貌を把握するため工夫におけるてだて）

個人追究を進めるなかで、思考ツール（マインドマップ）を用いて、追究の全貌の把握を促した。ねらいは以下のとおりである。

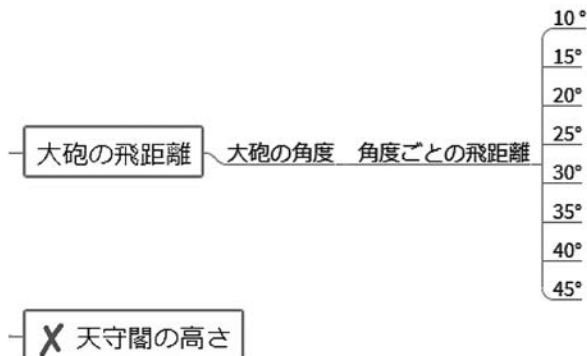
- ・アイデアを繋げ、追究の全貌を記録しながら振り返ることができるようにすることで、追究に対して見通しをもつことができる。
- ・自分の追究の全貌や系統性、成果と課題を視覚化することで、それらを解決するために必要な数学的な考えを働かせた、よりよい考えを練り上げることができる。

●5月19日（金）【第1時】

教材の場面を知り、追究計画を立てた。個

人追究の方針を、仮説を立てながら練った。
以下は**大地**の授業ノートとマインドマップへの記述、授業日記である。

資料1：マインドマップ（第1時終了後）



【考察①】

砲弾の軌道に影響を及ぼすものが角度であると予想した大地は、まずは飛距離を調べるために、角度を変化させながら飛距離を測った。角度ごとに記録するため10°から45°までの角度を記入している。

●5月23日（月）【第2時】

資料2：マインドマップ（第2時終了後）



資料3：大地の授業日記（第2終了後）

10°から70°まで、角度を変えながら飛距離を測定することができた。しかし、最上階の天守閣に当てることを考えると、高度も考える必要がある。でも高さの求め方が分からない（高度を計算？）

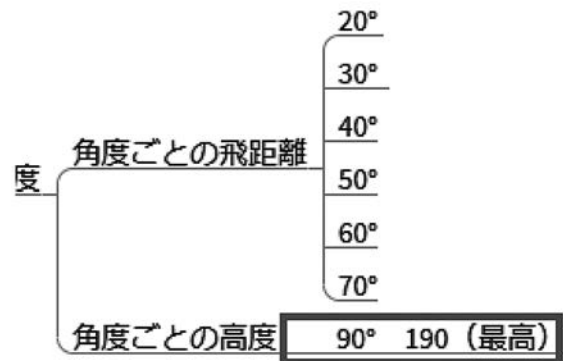
【考察②】

飛距離の記録を取ることはできた。しかし、飛距離だけではなく高さも天守閣に合わせなければいけないと気づいた**大地**は、授業日記に「最上階にある天守閣に当てるには、高度

も考える必要がある」と記述した。また、マインドマップにも「角度ごとの高度」「砲弾の重量」「砲弾の初速」など、関係のありそうな要因を新たに記載していた。実際には、重量と初速（加える力）は、ほぼ一定であり、変数とならないため、角度を変数とし、飛距離と高度の変化を追っていくと予想する。

●5月24日（水）【第3時】「個人追究」

資料4：マインドマップ（第3時終了後）



資料5：第3時を終えての対話記録

発言者	発言内容
教師	今日の実験はどうだったか
大地	真上に向かって打つと190cm撃ち上がることは測定できた
教師	使えそうか
大地	これが最高到達点ということはわかった。城の真下から大砲を撃つなら、190cmの高さの城まで対応できるということが言えるけど、そんな状況は実際にはない。 <u>斜めに撃つときに高度をどう測るのか困っている</u>

【考察③】

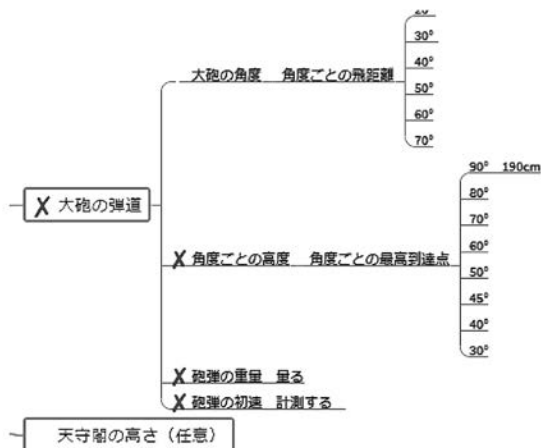
マインドマップの記述にあるように、実験を行うことで10°など小さすぎる角度では、砲弾がすぐに地面についてしまい測定ができないことから、測定する角度を20°から70°までの範囲に変更している。前時に高度を求める方法に困っていた**大地**は、真上（90°）への撃ち上げによって、この日の実験で、190cm地点まで撃ちあがることを測定したが、飛距離と最高到達点を測ることはできたが、どうやってねらうことにつながるのかに困っているようである。飛距離と高さの変化を同

時に把握するには、軌道そのものを捉える必要がある。現在は、横の動き（飛距離）と縦の動き（高度）を独立して測定しているが、マインドマップの情報を関連付ける過程で、問題場面に立ち返り、飛距離と高度が天守閣に一致する軌道を見つける方法を追究する姿を期待する。

● 6月5日（月）【第7時】「個人追究」

第6時の「砲弾はどのように飛ぶのか」についての意見交流で、城を狙うためには飛距離と高度を同時に把握する必要があり、どのような規則で飛んでいるのか、砲弾の飛び方の関係や式、飛び方の形（軌道）などを考えていくことが必要であるという意見が出された。第6時内では時間が不十分だったため、これらの考えをもとにマインドマップを更新する時間を再度とった。

資料6：マインドマップ（第7時終了後）



資料7：第7時を終えての対話記録

発言者	発言内容
教師	意見交流を終えて、今後の方針はどうするか
大地	天守閣までの距離と高さが分かっていないということなので、その部分は(任意)と書いた。高さや距離に対応することができるように、砲弾の軌道を見ていくという意味（マップの更新部分を指しながら）
教師	マップは他に更新した部分があるか
大地	砲弾の飛び方の形に注目しないといけないから、重さや初速、高度など、関わりそうな部分を洗い出して、調べていきたい

資料8：第7時の大地の追究の計画（追究ノートより）

計画①	角度ごとの最高到達点を調べる
理由	すべてのパターンの最高到達点を知っていると、天守閣の高さに合わせて大砲の角度を調整することができるため
計画②	初速と重量を調べる
理由	調べた関係から、おそらく式を作ることができるため。初速と重量が分かると、式になりそう。高さや距離が分かったときに式があれば、当てはめて、城にあたるかどうかを調べることができるため

資料9：第7時終了後の対話記録

発言者	発言内容
教師	これまでマインドマップを使ってみてどうだったか
大地	毎回実験の前に、マップを見ながら前回こんなことをやっていたから今日はこういうことをやろうと見返すことができた
教師	追究の記録として使っていくことについてどう思ったか
大地	最初は、データも打ち込んでいたから面倒だった。でも途中から、データや記録は追究ノートに書くようにした。マップには、考え方とか視点を残すようにした。考え方とかをつなげて追究を考えられるから、やっていたことを忘れにくくていいと思った

【考察⑥】

砲弾の軌道の規則を見つけるため、砲弾の飛び方に関わりそうな、より細かな情報が加筆されている（資料6）。砲弾の軌道を予測するために変数が何であるのかを整理し、順に検証をしていこうとしていることがわかる。また、天守閣の高さと距離の部分に「(任意)」という言葉と、レ点が増加された。ここが未知数であるということをマインドマップに記載した。追究の着目点と、ポイントに距離と高さに対応するということを挙げていることがわかる。

追究における距離と高さの在り方（条件整備と現状の課題）、角度、重量、初速を挙げた変数の処理、今後の実験の方法の方針が示されている。これまで漠然と進めていた実験に対して、成果と課題（×とレ点）や視点の

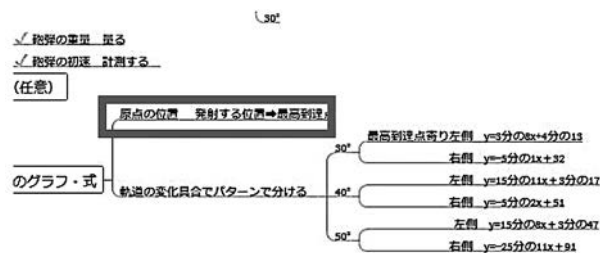
系統性が結びついたり整理されたりしたことで、条件整備、変数の処理、実験方法の方針などの数学的な見方が働いた追究の見通しが明らかになっていき、次時以降の計画の推進力につながると考える。

● 6月15日（木）「個人追究を終えた大地の考え」

<概要>

砲弾の軌道の上に壁を立て、飛距離ごとにどの高さを通るかを測定した。何度か繰り返し、飛距離に対する高さのデータを収集した。高さの値の平均を求めることで、精度を上げた。飛距離に対する高さの座標を結ぶことで軌道をグラフ化することができた。また、座標の2点を結ぶ直線の式を求めることができ、変域ごとに分けた直線の式を求めることで、砲弾の軌道を式化することができた。これらの実験を30°、40°、50°ごとに行った。

資料10：マインドマップ（単元終了後）



【考察⑦】

本来の目的が、城の天守閣に当てることができかどうかであるため、式やグラフによって軌道を予測するだけではなく、角度を変数として複数の軌道を式化している。重量や初速などの変数は、測定を試みたが、定数であるため角度を変えたときの飛距離と高さに影響を与えないことに気づき、途中でレ点を書き加えている。意見交流（問題解決）にて、二次関数の式によって式化できた意見を聞き、「原点の位置 発射する位置⇒最高到達点」と加筆している（資料10の赤枠）。自分の式をより精度の高いものにするための意見を得ることで、その後の追究の強化に生かそうとしている。

てだて② 意見交流戦略シートによる追究内容の整理を促す（問題を共有する意見交流までの自分の追究の到達度を整理するための工夫）

個人追究での進捗具合を見取り、意見交流を実施する前に、意見交流戦略シートを用いて自分の追究の到達度を整理する場を設定する。ねらいは以下のとおりである。

- ・意見交流戦略シートに、①成果、②課題、③意見交流で共有したいこと、④解決の根拠、困り感を記述することで、現状の追究の到達度を整理することができる。
- ・成果と課題は、自分の追究のよさとなりなさとして把握し、意見交流において、どんな意見を共有したいか、自分の追究のどの部分を補いたいのかを、意見交流へのねらいとして整理できる。
- ・解決の根拠や困り感を記述することで数学的な考えに迫りやすくなる。

● 5月29日（月）【第5時】「意見交流戦略シート記入」

資料11：大地の意見交流戦略シート（抜粋）

<成果>

10° から70° までの角度ごとの飛距離
最長 20° 200cm
最短 70° 114cm
最高到達点 90° 190cm

<課題>

角度ごとの最高到達点を調べられていない

<聞きたいこと>

角度ごとの最高到達点 高度 城の高さと大砲までの離れ具合が分からない

資料12：意見交流追究シートをもとにした対話記録

発言者	発言内容
教師	共有できることや困っていることに、どんなことを書いたか (中略)
大地	(マップの) この部分(角度ごとの高度の部分)がずっとクリアにならないから、困っている
教師	今後の追究に関わってくるか
大地	飛距離と最高到達点を調べてきたから、あたる可能性のある位置は分かってきた。これがいつでもあたるのかどうかをどうやって調べるのか、他の人の追究の様子を聞きたい

● 6月1日(木) 【第6時】「意見交流(問題)」

資料13：授業記録

発言者	発言内容
教師	これまでの追究での疑問や課題はあるか
颯	いろんな条件を試している。変える条件と変えない条件があるので、うまくいかない
大地	天守閣の高さと離れ方がどれくらいなのかわかっていない
憲伸	距離と高さによっては、自分たちのデータが通用しないかもしれない (中略)
真子	距離と高さをもとにあてるために規則性を出せばいい
(大地)	距離と高さがわかって、それから狙うんだ
駿一	最高到達点と距離がわかればよい
慎吾	記録から、どんな弧を描いて飛ぶ形を調べる
(大地)	関数か 正解かも

※カッコ内の発言は、隣の生徒との会話

資料14：授業日記（一部抜粋）

自分の調べた結果が少し違ったのではないのかと思いました。また実験の回数を重ね、より正確な値を出していきたいです
自分が困っていた「高さ」と距離については、撃つ直前に分かるということだったので、実験がより深いものになっていくと思いました

資料15：授業後の対話記録

発言者	発言内容
教師	授業記録の実験がより深いものになっていくというのを教えてほしい
大地	距離と高さが直前に分かるということは、性能をより詳しく調べておく必要があるということ。どの距離のときにどの高さなのかということが分かるように、より細かく、距離と高さの対応を調べる必要がある

【考察⑧】

大地は、個人追究を進め、角度ごとの最高飛距離と最高到達点を調べることができた。しかし、追究を進める中で、城を狙えるのかという部分に疑問を感じていた。条件に合えば城にあたる可能性があるが、城までの距離と高さが変わる場合に対応ができるのかという部分で、条件や調べ方を振り返った。意見交流で、問題場面から距離と高さは直前に分か

るという話から、「距離と高さがわかって、それから狙う」「関数か 正解かも」とつぶやいた。これまでの追究では、あたるパターンを探していたが、距離や高さに応じてあてることができるように、関数関係や規則に注目して追究を進める必要がある。

7 てだての有効性と仮説の妥当性

てだて①について

◆結果

有効であった。

これまでの追究で大地は、自分の視点をもとに追究を進めることができるが、見通しをもつことができていなかった。はじめは飛距離を測定することから始めた（第1時）。飛距離は、ねらいまでの離れ具合のことであり、どれくらいの距離までなら届くのかということ調べるのには有用であるが、城の最上階にあてるということには不十分である。実験を進める中で、次時の追究の方針を立てる際には、マインドマップを更新したり、見返したりしながら計画を立てる姿が見られた（第2時、第3時）。追究の振り返りを書く際には、解決していない高度の部分を加筆しながら振り返っている（第2～4時）。実験内容や試行錯誤には共通して、高度を求めるという目的をもっている。第7時、資料9の教師との対話にあるように、追究を進めるうえで、追究の全貌を把握し、よりよい考えを見つけ出そうとしていたといえる。個人追究を終えた様子から、追究の目的を捉え、角度を変えて複数の軌道を式化した。また、検証を終えたもの（重量、初速など）にはレ点を入れながら追究を進め、資料10の赤枠部分にあるように、新たに視点を得たときには、そこからアイデアをつなげ、マインドマップを枝分かれさせて追究を深めていくことができた。

以上を踏まえ、検証の方法については見直す必要があるが、てだて1は有効であったといえる。

てだて②について

◆結果

部分的に有効であった。

注目生徒がもつ困り感を共有することはできたが、本時において注目生徒が問題を共有することが不十分であった。しかし、成果と課題、困っていることを明確にして意見交流に臨むことができたため、その過程で自分の追究についての到達度を振り返ることにはつながった。自分の追究を振り返ることで、成果と課題、困りをもとにした視点をもって意見交流に臨んでおり、生徒の考えの変化や強化にはつながった。第6時、資料13にあるように、疑問に思っていた部分を共有することで、条件整備が行われ、資料15にあるように、変数何なのか、調べていく必要があるのが何なのか明確になり、数学的な考え（条件整備（資料15より）、実験方法の工夫（資料14より））をもとに、解決へと向かっていったといえる。

以上のことから、問題共有において直接的な有効性は検証できなかったが、てだて2は部分的には有効であったといえる。

研究の仮説

個人追究の段階において、自分の考えの全貌を把握するための工夫（てだて①）をしたり、問題を共有する意見交流までの自分の追究の到達度を整理するための工夫（てだて②）をしたりすれば、数学的な考えをもとに問題を共有し、解決に向かうことができる（目ざす子どもの姿）だろう

てだて①、②の一部については、有効であったことを示した。以下は、大地の单元まとめ（一部抜粋）である。

この单元の実験において重きをおいたことは、式化することができるグラフにすることです。僕が行った実験は、10cmごとの間隔を開けて、そこの位置に壁を置き、それぞれの距離ごとの壁に弾が当たった高さを求める実験です。この実験の強みは、同じ距離での記録を何度も取ることができ、平均などを用いることで精度を上げられることです。また、グラフにした時の壁と壁の間の部分が直線になるので、その間で2点を結ぶ式を求めることができるということです。弱みは、2点をもとに直線にして

いるので、どうしてもグラフがガタガタになってしまい、滑らかなグラフを作ることができないことです。でも理論上は、壁の間隔を10cmから狭くしていくと、より滑らかな実際のグラフに近い式を出すことができることに気づきました。

僕は、このグラフから式を出すことはできませんでしたが、二次関数の式にすることは出来ませんでした。意見交流を通して二次関数のグラフを作るためのポイントに気づきました。僕が今までグラフを作る時に原点を発射地点にしていたのですが、二次関数のグラフにするには原点を最高到達点にすればいいのではないかと気づきました。二次関数の正確な式にすることができれば、最高到達点以外の場所であっても、城の天守閣にあたるかどうかわかります。そして、調べる角度ももっと細かくしていけば、城の距離と高さの条件に対応できるようになると思いました。

大地は、单元まとめに「二次関数のグラフにするには原点を最高到達点にすればいいのではないかと気づきました。二次関数の正確な式にすることができれば、最高到達点以外の場所であっても、城の天守閣にあたるかどうかわかります。そして、調べる角度ももっと細かくしていけば、城の距離と高さの条件に対応できるようになると思いました」と記述した。これは本单元で表出させたかった「軌道に関わる要素を整理して関数関係を見出すことで、条件が変わった場合にも軌道を予測することができるということを見出す姿（P3）」に迫ったといえる。

それぞれのてだてが有効にはたらし、本单元において解決に向かう姿に迫ることができた。よって、本研究の仮説は妥当であるといえる。

8 おわりに

追究では、長期間にわたり一つの問題に向き合う。どの生徒も問題を解き明かしたいという思いをもっている。追究で知り得たことを整理する方法を示し、意見交流が有意義なものとなるよう、追究を振り返る場を与えることで、意見交流を、より意味のある時間に行うことができる。生徒の意志や熱量に寄り添い適切な支援をするため、有効なてだてを再検討し、講じていかなければならないと感じた。