

条件つき確率を用いた無限個の事象の導入

鈴木 将 史 (愛知教育大学数学教育講座)

(2004年10月29日受理)

Introduction of Infinitely Many Events by Using Conditional Probabilities

Masashi SUZUKI (Department of Mathematics, Aichi University of Education)

要約 高校数学において確率は、「同様に確からしい」「有限の」事象についてのみ定義される。しかし現実には、根元事象が同様に確からしいわけではない場合や、無限個ある場合がいくらでも生じてくる。それらを直接的に扱おうとするとやや高度な数学的表現が必要となることがあるが、条件つき確率を用いることにより、比較的容易に無限個の事象を処理することができる場合がある。本報告ではそのような例を挙げて、高校数学でも無限個の事象を扱うことを提案したい。

Keywords : 無限個の事象, 条件つき確率

1. ともえ戦の問題

確率論の有名な問題に、次のような「ともえ戦」の問題というものがある。

問題1 (ともえ戦)

大相撲で優勝決定戦が3人の間で行われるときには、次のようなルールで優勝者が決まる。なお、以下において3人はA, B, Cで表す。

- (1) AとBがまず戦う。(Aが勝つとしよう)
- (2) 勝者AとCが戦う。Bは待機する。
- (3) ここでAが勝てば、2連勝なのでAの優勝だが、Cが勝ったときは、勝ったCは次に待機しているBと戦う。Aは待機する。
- (4) ここでCが勝てば、2連勝なのでCの優勝だが、Bが勝ったときは、勝ったBは次に待機しているAと戦う。Cは待機する。
- (5) このようにして、誰かが2連勝するまで同じことを繰り返す。

この方法で全く実力が等しい3名が優勝決定戦を戦うとき(すなわち毎試合の結果が確率1/2ずつで決着するとき)、A, B, Cの優勝確率はどれくらいか。

文章で読むと複雑だが、要するに「2連勝する者が出るまで代わり番こに戦う」というものである。

現実にはこの方法で優勝決定戦が行われていて、特に問題にされることもないが、結論から言えば、3人の優勝確率は1/3ずつではなく、この方法は公平ではない。

この問題を解こうとする場合、何もヒントを与えなければ、普通は決着がつくまでの過程を場合分けして考えて、以下のような解答になると思われる。

解答1の1

Aが優勝する場合を列挙していく。

- (i) 最初にAが勝つ場合

AA, ACBAA, ACBACBAA, ...

のように、ACBを何回か繰り返した後Aが連勝するパターン

- (ii) 最初にBが勝つ場合

BCAA, BCABCAA,

BCABCABCAA, ...

のように、BCAを1回以上繰り返したあとAが勝つパターン

いずれの場合も個々の勝敗の確率は1/2であるから、各パターンの起こる確率は1/2を試合数だけかけたものになる。

したがって、Aの優勝確率は

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^8 + \dots \\ & + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + \dots \\ & = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{16}}{\frac{7}{8}} = \frac{5}{14} \end{aligned}$$

明らかにBも同じ確率だから、Cの優勝確率は

$$1 - \frac{5}{14} \times 2 = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$$

したがって優勝確率の比は5 : 5 : 4で、最初に待機する人が不利であることがわかる。

2. 条件による場合分けの方法

ところでこの優勝決定戦の方法には、いつまでも対戦が続いて決着がつかないという可能性がある。しかし上の解答でわかるように、試合数が一つ伸びるためには勝者が次の試合で負けることが必要で、その確率は $1/2$ であるから、試合数が1増えるたびにその確率は半分になり、この操作が無限に続く確率は0である。つまり、確率1で「いつかは決着がつく」ことがわかる。

このように、いつまでも勝負が続く確率が0であることが何らかの方法で確かめられれば、この問題には次に示すような別の解答が可能である。

解答1の2

Aは最初の試合のあと「勝者となって次の試合に臨む」か、「敗者となって待機する」かのいずれかである。そこで3人の役割を「勝者：1勝して次に臨む人」、「待機：待っていて次に戦う人」、「敗者：負けて待機に向かう人」に分けて考える。いずれの場合にも優勝する可能性はあるから、それぞれの優勝確率を p , q , r とする。

それぞれの立場からもう1試合進めて考えると、次の試合は「勝者」対「待機」で、ここで「勝者」が勝れば優勝決定、「待機」が勝れば「待機」→「勝者」、「勝者」→「敗者」、「敗者」→「待機」という役割変更が起こる。したがって、

$$p = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times r$$

$$q = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times p$$

という関係式が成り立ち、さらに3人がこの3つのどれか一つずつであることから

$$p + q + r = 1$$

という式も成り立つ。

これら3つの式を連立させて解くと、

$$p = \frac{4}{7}, \quad q = \frac{2}{7}, \quad r = \frac{1}{7}$$

が得られ、初めの試合の結果次第でAは「勝者」または「敗者」になるから、Aの優勝確率は

$$\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}r = \frac{2}{7} + \frac{1}{14} = \frac{5}{14}$$

となる。あるいはCは初めから「待機」だから優勝確率は $q = \frac{2}{7}$ となり、そこからA, Bの優勝確率を求めてもよい。

この解答では、文章は幾分長くなるものの、数学的には中学生並みの技術しか用いる必要がなく、前の解答が無限等比級数の和を必要としていることと比べると、「一歩進めて分類する」という考え方の鮮やかさが味わえる。ただし、その裏づけには条件つき確率の考え方が必要となる。

条件による場合分け

条件となる事象（前の問題では「次の試合の結果」）が C_1, C_2, \dots, C_n と分類されるとき、

(1) 事象Aの確率は

$$P(A) = \sum_{k=1}^n P(C_k)P(A|C_k)$$

(2) 確率変数Xの期待値は

$$E(X) = \sum_{k=1}^n P(C_k)E(X|C_k)$$

上の(2)の例としては、たとえば次のような問題が考えられる。

問題2

前問のともえ戦において、決着がつくまでの試合数の平均は何試合か。

これも解答2と同様3つの役割に分けて考えると、以下のような解答ができる。

解答2

ある時点において、その時点からかかる試合数をXとする。最初の試合が終わった時点で、3人は「勝者」「待機」「敗者」の3つに分かれていて、次の試合は「勝者」対「待機」である。

さて、この次の試合の結果によって

C_1 ：「勝者」が勝つ、 C_2 ：「待機」が勝つと分類すると、

$$\begin{aligned} E(X) &= P(C_1)E(X|C_1) + P(C_2)E(X|C_2) \\ &= \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times (1 + E(X)) = 1 + \frac{1}{2}E(X) \end{aligned}$$

これを解くことにより、 $E(X) = 2$ が得られる。すなわち、どの時点でも残りの平均試合数は2である。さて、最初の時点での試合数をYとおくと、1試合の後には「勝者」「待機」「敗者」の3つに分かれるから、結局

$$E(Y) = 3$$

すなわち平均試合数は3である。

この問題を直接計算で解こうとすると、「解答1の1」に現れる確率に試合回数 k をかけて無限個の和を計算するという作業になり、かなり困難である。条件つき確率を用いる方法の威力が感じられる問題である。

3. 確率の定義と無限

高等学校のカリキュラムにおいて、確率は「同様に確からしい」根元事象の個数の比で定義されている。

定義

1つの試行において、全事象 U が定まり、どの根元事象の起こり方も同様に確からしいとき、全事象の個数を $n(U)$ 、事象 A に属する根元事象の個数を $n(A)$ とすると、事象 A の確率 $P(A)$ は、

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)}$$

上記の定義においては、根元事象の起こり方が同様に確からしいだけでなく、根元事象の個数が有限であることも前提となっている。

「ともえ戦」の問題では、それぞれの試合における勝敗は同様に確からしいが、試合の回数はいくらでも長いことがあり得るので、根元事象の個数は無限大である。

したがって、上に解答は示したが、問題1も問題2も、厳密に言えば現在の高校数学のカリキュラムの範囲内では扱えない問題である。しかしこの問題でもわかるように、問題の設定自体は特に難しいわけではないし、このような問題が扱えなければ、確率の問題の面白さは半減してしまうと思う。

筆者は、高校数学では厳密性を重んじることも重要であるが、それと同時に、少し手を伸ばせば届く範囲にある面白い問題に触れさせることも大変重要であると考えている。特に確率論は身近な問題に例を取りやすい分野で、興味深い話題に事欠かない。それが「有限個の根元事象しか扱えない」という制限に縛られてしまうと、逆に制約がありすぎて、多くの問題が取り扱えなくなってしまう。上の例で示したような「条件による場合分け」の手法を用いれば、無限個の事象を持つ多くの問題を、統一的な手法で扱うことができ、しかも大変興味深い話題を提供することができると思う。

そこで筆者は、

提案

条件つき確率を用いた手法により、無限個の事象を持つ確率の計算を高校数学に導入すること

を提案したいと思う。

4. 無限個の事象を持つ問題例

問題3

表が出る確率が p であるようなコインを表が出るまで投げ続けるとき、その平均回数を求めよ。

いわゆる「幾何分布の平均値」を求める問題だが、これなども、設定は単純で大変わかりやすいのに、投げる回数の上限が有限でないため高校数学では取り扱いえない問題である。

高校数学の定義の範疇ではないが、実際には、大学の授業でこの問題を解かせると、学生は特に疑問も持たずに無限級数の和を計算しようとする。

解答3の1

表が出るまでに投げる回数を X とすると、最後の回以外は裏であるから、

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p$$

となり、平均回数は

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} p$$

で表される。この和は無級数であるが、公式

$$\sum_{k=1}^{\infty} k r^{k-1} = \frac{1}{(1-r)^2}$$

もしくは和を S と置いて、 $(1-p)S$ を引く方法により、

$$E(X) = p \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}$$

となる。

これでも立派な解答で、大学ではこれでもいいと思うが、高校では多くの学生にとって、余り受け入れられにくいであろう。

しかしこの問題を最初の結果で場合分けしてみると、以下のような大変鮮やかな解答となる。

解答3の2

C_1 ：1回目が表、 C_2 ：1回目が裏と分類すると、 C_1 のときは最初の1回で終わり、 C_2 のときは新たに始めるのと同じであるから、

$$\begin{aligned} E(X) &= P(C_1)E(X|C_1) + P(C_2)E(X|C_2) \\ &= p \times 1 + (1-p) \times (1 + E(X)) \\ &= 1 + (1-p)E(X) \end{aligned}$$

両辺より容易に $E(X) = \frac{1}{p}$ を得る。

これは解答2と全く同じ考え方であるが、確率がより一般的な場合になっている。

この問題の答えは大変単純できれいなものなのであるが、高校数学の範囲で定義できる問題にしようとすると、「ただし10回投げて表が出ないときはやめる」というような「有限確保条件」をつけなければならず、不自然であるばかりか、答えがかえって複雑で難しくなってしまう。

なお余談であるが、「表が出る確率が p 」というのでも、公平な場合以外は「同様に確からしい根元事象」という条件に違反している。「表の出る確率が0.4のコイン」というようなものは、高校数学の範囲では定義できないのである。

しかしその一方で「AがBに勝つ確率は $1/3$ 」というような問題が大学入試には平気で出ており、受験生も特に何の疑問も持たずに解いている。

要するに、高校数学における確率の定義は、厳密を重んずる余り、必要以上に狭いものになっているのである。実際、この定義では「降水確率が30%」ということすら説明できない。事象としては「降る」か「降らない」かしかないからである。

この問題についても十分に論じてみたいが、すでに似たような論旨の論文が数多くあることと、本報告の趣旨から外れるので、ここでは指摘するにとどめておく。

問題4 (2004年度大学入試問題より)

n を2以上の整数とする。1つのサイコロを繰り返し投げて、同じ目が2回続けて出るか、または n 回投げたら終了するものとする。

- (1) サイコロを投げる回数が l 回となる確率を求めよ ($l = 2, 3, \dots, n$)。
- (2) サイコロを投げる回数の期待値を求めよ。

せっかく面白い問題なのに、「または n 回投げたら終了するものとする」という注意書きが問題をかえって難しくし、美しさを損じている。ちなみに(2)の答えは

$$7 - 5 \left(\frac{5}{6} \right)^{n-2}$$

ということだが、美しくない。思考力を見る問題といえはそうかもしれないが、問題としてはわざわざきたなくして難しくした感じである。

もちろん高校数学のカリキュラムがそうなのであるから、この問題を出题された方にはまったく非はない。

この「または n 回投げたら終了するものとする」という部分を削って、何回でも同じ目が続けて出るまで投げることにした場合は、条件づけによるきれいな解答を作ることができる。

解答4

(2) 1回目は何の目でもよいので、2回目以降終わるまでに投げる回数を X とおく。ここで

C_1 : 2回目が1回目と同じ

C_2 : 2回目が1回目と異なる

と分類すると、 C_1 のときは2回目で終わり、 C_2 のときは新たに2回目を始めるのと同じであるから、

$$E(X) = P(C_1)E(X|C_1) + P(C_2)E(X|C_2)$$

$$= \frac{1}{6} \times 1 + \frac{5}{6} \times (1 + E(X))$$

$$= 1 + \frac{5}{6} E(X)$$

両辺より容易に $E(X) = 6$ を得る。それに1回目を加えて、平均回数は7である。

5. 終わりに

確率というのは直観的に理解しやすい概念であるが、実際に数学として厳密に位置づけようとすると、測度論のような道具が必要となり、かなり抽象的かつ高度になってしまう。高校数学における確率の定義というのは、その種のわずらわしさに一切関わらないように設定されたものであり、それはそれで理解できるし、適切なものだとも思う。

しかし問題は、その制限があるために、扱える問題が非常に少なくなってしまうということである。世の中には自然に理解できて、数学的にも面白い問題がたくさんあるのに、定義の制限があるために扱えなかったり、または扱えるようにするためにかえって複雑にしてしまったりする。

本報告で述べた条件つき確率を用いる方法は、高校生でも十分理解できて、しかも汎用性があり、もっと高度な数学の場でも盛んに用いられている方法であるから、この程度のもをを導入して有限の鎖を断ち切ることが必要なのではないだろうか。

参考文献

- [1] Breiman, L., Probability, Addison-Wesley, 1968.
- [2] 戸田宏ほか, 高等学校最新数学B, 新興出版社啓林館, 1998.
- [3] 2004年度版数学I・II・A・B入試問題集, 数研出版, 2004.