愛知教育大学教育実践総合センター紀要
第７号，pp. 167～170（February, 2004）

事象の独立性の判定条件

鈴　木　将　史　（愛知教育大学数学教育講座）
（2003年11月28日受理）

Criterions of the Independence of Events

Masashi SUZUKI (Department of Mathematics, Aichi University of Education)

要約　２つの事象AとBの独立性については，いくつかの同値な定義が与えられるが，学校教育の現場では，事象の独立性について生徒が正確に理解することの困難さがしばしば指摘される。本報告では，２つの事象の独立性については，条件つき確率を用いた定義の方が，直観を反映していて理解しやすいと結論づける。しかし３つ以上の事象の場合へと一般化しようとすると，調べなければならない式が多くなり，確率の積で定義する方が簡潔で優れている。学校教育でもこのような観点で定義を見直すと，生徒の理解が深まるのではないだろうか。

Keywords：事象の独立性，条件付き確率

１．2つの事象の独立性

確率論において「事象の独立」は重要な概念の一つであり，高等学校の旧カリキュラムでは，「数学Ｂ」の「確率分布」の単元で扱っていた。一方，平成15年度施行の新カリキュラムを調べてみると，「数学Ａ」に「独立な試行」という単元があるが，ここでは「事象の独立は扱わない」と明記されている。しかし「数学Ｃ」まで行くと「確率分布」という単元があり，そこで従来の「数学Ｂ」からスライドした形で「事象の独立」が扱われるものと思われる。ただ，施行されたばかりで学年進行途中であるため，「数学Ｃ」の教科書はまだ見ることができない。そこで本報告では，旧カリキュラム「数学Ｂ」の教科書を参照することにする。

さて，高等学校の数学では２つの事象が独立であることをどのように定義しているのであろうか？例として啓林館発行の「高等学校最新数学Ｂ」を見ると，次の「定義１」のようになっている。

> <u>**定義1**</u>
> 事象A，Bが独立であるとは，
> $$P(A\cap B)=P(A)P(B) \tag{1}$$
> が成り立つことである。

これはとても簡潔な定義であり，特にわかりにくい式でもないので，これ自身に問題はないように見える。しかし，「これが２つの事象が独立であることの定義です」と言われたとき，「独立」という言葉と上の式はピッタリと結びつくであろうか？

筆者の経験では，ここにかなり大きなポイントがあるように思う。大学の授業の試験で独立性に関する問題を出すと，決まって「独立であることより$A\cap B=\emptyset$（空集合，空事象）」と書いてくる学生がいる。しかしもしそうなら，当然定義の左辺は$P(A\cap B)=0$となってしまい，定義の式は成り立たなくなってしまう。

そもそもこの「$A\cap B=\emptyset$」は「排反」と呼ばれる関係で，「２つの事象が同時に起こらない」という意味である。これと「独立」とは全く異なる概念であるが，「$A\cap B=\emptyset$」と書く学生が何人か必ずいる。

筆者が考えるに，これは「独立」＝「離ればなれである」という言葉のイメージによるものであろう。確かに「植民地支配から独立した」というような言葉遣いの場合，<u>定義１</u>の式(1)よりも「排反」の式のイメージの方がピッタリと来る。つまり，<u>定義１</u>の表現は，<u>「独立」という言葉にふさわしいイメージを与えていない</u>ように思うのである。

いかに「数学の表現は自由である」とは言っても，直観的にイメージできない概念は，なかなか身に付くものではない。上に書いたように，授業のまとめの期末テストでも「独立」と「排反」を混同する学生がいるのだが，それだけでなく，少し時間が経つと，かなりの学生が「独立性」の定義を忘れてしまう。

大学では，内容の異なる授業を立て続けに受講するため，「独立性」に限らず多くの数学的概念について，短期間だけ理解あるいは暗記して，その後は忘れるという作業の繰り返しになりがちである。多くの単位を履修するためにある程度やむを得ない面もあるが，「事象の独立」に限って言えば，高校でも教える内容であるから，卒業して教員になろうというような学生が「忘れました」というのはやはり問題である。

それではもう少し直観的な理解の仕方はないものであろうか？忘れても定義を自分で作ることができるような説明は不可能であろうか？

それは可能である。独立性の定義のあと必ず言及さ

れる変形であるが，定義１の式(1)をAの確率$P(A)$で割ると，次のようになる。

$$\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=P(B)$$

この式の左辺は「条件つき確率」の定義そのものであるから，$P(A)=0$というような極端な場合を除けば，定義１は次の定義２へと変形される。

定義2
事象A，Bが独立であるとは，
$$P(B\mid A)=P(B) \tag{2}$$
が成り立つことである。

上の式の左辺は「事象Aを条件とするときの事象Bの条件つき確率」である。言うまでもないが，この定義２から逆に定義１を導くこともできる。つまり２つの定義は同値であり，どちらを独立性の定義にしてもよいのである。

ところで，定義２の式(2)は何を意味しているのだろうか？　言葉で書けば，「事象Aが起こっても，事象Bの確率は変わらない」となる。実は次の命題が成り立つ。

命題1
$P(B\mid A)=P(B) \Leftrightarrow P(B\mid A^c)=P(B)$
（A^cは事象Aの余事象）

〔証明〕

$P(B\mid A)=P(B)$から $\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=P(B)$，さらに分母をかけて$P(A\cap B)=P(A)P(B)$へと変形する。ここで$B=(A\cap B)\cup(A^c\cap B)$のように排反な事象に分けられることに注意すると，

$$\begin{aligned}P(A^c\cap B)&=P(B)-P(A\cap B)\\&=P(B)-P(A)P(B)\\&=P(B)(1-P(A))\\&=P(B)P(A^c)\end{aligned}$$

となり，$P(A^c)$で両辺を割ると結論を得る。また逆も同様に得られる。　□

命題１により，「独立性」の表現は，「事象Aが起こっても起こらなくても，事象Bの確率は変わらない」ということになる。つまり，「事象Bが起こるかどうかに対して，事象Aが影響を持たない」ということである。「親から独立する」という場合，「親の影響下から離れる」というような意味となるが，「事象の独立」も同じようなもので，「独立」＝「影響を持たない」と解釈できる。直観的にイメージできない概念は身に付かないと書いたが，この定義２の式(2)を用いれば，「独立性」という言葉がある程度すんなりと理解されるのではないだろうか。

また，式(1)を仲立ちとして，次の命題も簡単に示せる。

命題2
$P(B\mid A)=P(B) \Leftrightarrow P(A\mid B)=P(A)$

つまり，「AがBに影響を持たない」ときは，「BもAに影響を持たない」のであり，この「両者が互いに影響を及ぼし合わない」ことが「事象の独立」の本質であるということになる。

命題１も簡潔でよい表現であり，実際にはこちらの方が使いやすいのであるが，「独立」という概念がよく表されているのは命題２の方である。両方をセットにして覚えれば，「排反」と混同したり，時間の経過とともに忘却の彼方に消えてしまったりすることはなくなるのではないかと思う。

２．3つ以上の事象の独立性

前節で２つの事象の独立性について詳しく述べたが，３つ以上の事象について独立性を定義する必要がある場合も多い。

ところが，実際に市販されている確率・統計の教科書で，このことが誤って定義されているのを見かけることがある。つまり，定義１を拡張した次のような書き方である。

ウソの定義
n個の事象$A_1, A_2, \cdots, A_n$が独立であるとは，
$P(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$
が成り立つことである。

これは一見，定義１の式(1)を素直に拡張したものに見えるが，正しくない。前節で「定義１だけをもとにすると，「独立性」の本当の理解が得られない」ということを主張したが，上のような「ウソの定義」を書いた著者も，同じ落とし穴にはまってしまったのかもしれない。

この式がなぜウソであるのかは，「独立性」の本質的理解に基づいて定義２を拡張してみればすぐにわかる。

ただ，一般のn個の場合では煩雑になるので，３つの事象A，B，Cの独立性について考えることにする。

さて，前節で「独立性」とは，「両者が互いに影響

を及ぼし合わないこと」と解釈した。これを拡張するとどうなるであろうか。

「両者が互いに」と書いたが，３つの場合には，この「両者」がいくつも考えられる。考えられる限り列挙してみよう。

ア．A と B
イ．B と C
ウ．A と C
エ．$A\cap B$ と C
オ．$A\cap C$ と B
カ．$B\cap C$ と A
キ．$A\cup B$ と C
ク．$A\cup C$ と B
ケ．$B\cup C$ と A

なお，命題１により，余事象については自然と同値が得られるので含めない。また命題２により，どちらを条件とするかについては気にしなくてよい。

たとえば上のエ．は，

$P(A\cap B\mid C)=P(A\cap B)$
$P(A\cap B\mid C^c)=P(A\cap B)$
$P(C\mid A\cap B)=P(C)$
$P(C\mid (A\cap B)^c)=P(C)$
$P((A\cap B)^c\mid C)=P((A\cap B)^c)$
$P((A\cap B)^c\mid C^c)=P((A\cap B)^c)$
$P(C^c\mid A\cap B)=P(C^c)$
$P(C^c\mid (A\cap B)^c)=P(C^c)$

のすべてを代表している。

これを見ると，「独立性」を「影響を及ぼさない」という視点で理解するのはわかりやすいが，３つ以上の場合には調べるべき式が多すぎる感がする。実際にはエ．が表す８つの式を全て示す必要はなく，一番上の式を示すだけで十分なのだが，代表者だけでもア．からケ．の９つある。さらに厳密に言えば，「$A^c\cap B$ と C」などというものも考えられ，書き出せばいくらでも式が作れる感がする。

しかし実はこれらすべてが，定義１の形式を用いれば，比較的少数の式の組で示されるのである。

命題3

３つの事象の独立性に関して考えられる条件つき確率の式のすべてが，以下の(3)から(6)までの４つの式から導かれ，またその一つでも欠けるとすべてを導くことはできない。

$$P(A\cap B)=P(A)P(B) \tag{3}$$
$$P(B\cap C)=P(B)P(C) \tag{4}$$
$$P(A\cap C)=P(A)P(C) \tag{5}$$
$$P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C) \tag{6}$$

〔証明〕

ア．イ．ウ．については２つの事象であるから，前節同様(3)(4)(5)から示される。

残りを代表して，エ．$P(A\cap B\mid C)=P(A\cap B)$，および　キ．$P(A\cup B\mid C)=P(A\cup B)$ について示そう。

●$P(A\cap B\mid C)=P(A\cap B)$ の証明：

条件つき確率の定義から分母を払って，

$$P(A\cap B\cap C)=P(A\cap B)P(C)$$

を示せばよいが，(6)より
$P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)$，これに(3)より
$P(A)P(B)=P(A\cap B)$ を代入し，右辺を得る。

●$P(A\cup B\mid C)=P(A\cup B)$ の証明：

同様に条件つき確率の定義から分母を払って，

$$P((A\cup B)\cap C)=P(A\cup B)P(C)$$

を示せばよい。分配法則から始めて，

$$\begin{aligned}P((A\cup B)\cap C)&=P((A\cap B)\cup(B\cap C))\\&=P(A\cap C)+P(B\cap C)-P((A\cap C)\cap(B\cap C))\\&=P(A\cap C)+P(B\cap C)-P(A\cap B\cap C)\end{aligned}$$

(4)(5)(6)より

$$\begin{aligned}&=P(A)P(C)+P(B)P(C)-P(A)P(B)P(C)\\&=P(C)\{P(A)+P(B)-P(A\cap B)\}\\&=P(C)P(A\cup B)\end{aligned}$$

と変形できる。 □

したがって，３つの事象の独立性を，「影響を及ぼし合わない」という本来の意味で定義しようとすると，条件つき確率の式が多くなりすぎるが，確率の積で表す方法だとわずか４つの式を示すだけでよいのである。

同様の考え方により，３つ以上の一般の n 個の事象については，その個数以下のすべての組み合わせについて，「同時に起こる確率がそれぞれの確率の積になる」という関係が成り立っていることで十分である。

定義3

n 個の事象 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ が独立であるとは，$2\leq k\leq n$ を満たす任意の k と $\{1,2,\cdots,n\}$ の任意の部分列 $\{i_1, i_2,\cdots, i_k\}$ に対して

$$P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$$

が成り立つことである。

この定義は部分列を用いているので添え字が少し複雑になっているが，要は左の命題３にある４つの等式を一般化して記したものに過ぎない。

上の定義については，他にもいろいろな表現方法がある。部分列を用いない簡潔な定義法をもうひとつ紹介しよう。

定義4

n個の事象$A_1, A_2, \cdots, A_n$が独立であるとは，
それぞれの$k \in \{1, 2, \cdots, n\}$に対して，事象$B_k$を
A_kまたはA_k^cとするとき，
$P(B_1 \cap B_2 \cap B_n) = P(B_1)P(B_2)P(B_n)$
が成り立つことである。

この定義は先に示した「ウソの定義」にやや似ているが，A_kとA_k^cを任意に用いることで，定義３と同じことを言っている。

たとえば同じ並びにしておいて，k番目だけA_kとA_k^cにした２つの式を加えれば，そこの部分は１になるので，k番目だけを積の表現から消すことができる。

以上のように，「影響を及ぼさない」という直観を大事にしつつも，現実に用いる定義としては，３つ以上の事象については定義３のような，確率の積で表現される式の方を用いた方がよいと言える。

３．調べる式の個数

前節で３つ以上の一般の個数の事象に関する独立性の定義を明らかにし，その過程で直観的な定義の仕方については「式が多すぎる」として排除した。

ここではこれらの方法によれば，いくつの式が必要となるのかについて考察してみたい。

●直観的な式の場合

条件つき確率を使って「影響なし」を表現する場合，３つの事象でも少なくとも９個の式（ア．～ケ．）について調べる必要があった。

同じ考え方でいくと，４つのとき23個，５つのとき53個……と，一つ増えるごとに倍以上の式を調べなければならず，大変である。

●確率の積による場合

定義３の方法では，n個の事象からk個選ぶ組み合わせを$k=2, 3, \cdots, n$について加えればよいので，

$${}_nC_2 + {}_nC_3 + {}_nC_4 + \cdots + {}_nC_n = 2^n - n - 1$$

通りの式について調べればよい。

たとえば３つのときは$2^3-3-1=4$個，４つのときは$2^4-4-1=11$個，５つのときは$2^5-5-1=26$個となり，比較的少ない個数ですむ。

定義４の方法では，すべての事象についてその事象か余事象を考えるので，必要な式の個数は2^n個である。これは定義３の式の個数からすると，若干無駄があるやり方と言えよう。

４．終わりに

事象の独立性はとてもポピュラーな概念であるが，その定義は多くの場合天下り的に与えられ，「どうしてこういう定義なのか」という問いかけはあまりなされないように思う。しかし特に高等学校までの数学教育の現場においては，やはり学んでいる対象への納得性というものが要求されるであろう。

本報告で筆者は，「どのようにしたら事象の独立という概念が頭に残り，定義を正しく覚えることができるだろうか」という問題意識をもとに，適切な定義のあり方，またその解釈，指導法を追求した。

ここに述べたような観点を教授者がはっきりと認識して授業に臨めば，少なくとも形式的に定義だけ与えて過ぎていくという授業は避けられることと思う。

事象の個数が多くなったときには結局確率の積による表現が最も効率がいいという結論になったが，その場合でも，直観的な定義からの橋渡しをしつつ紹介すれば，「どうしてこのような式の組を調べるのか」について，より深く理解でき，印象にも残るのではないかと考える。

参考文献

[１] Breiman, L., Probability, Addison-Wesley, 1968.
[２] 西尾真喜子，確率論，実教出版，1978.
[３] 戸田宏ほか，高等学校最新数学Ｂ，新興出版社啓林館，1998.
[４] 玉木久夫，情報科学のための確率入門，サイエンス社，2002.