愛知教育大学教育実践総合センター紀要
第5号，pp. 155～160（March, 2002）

数列における最大桁の数の分布

鈴 木 将 史
（愛知教育大学　数学教育講座）

Distribution of the First Digits in a Sequence

Masashi SUZUKI
(Department of Mathematics, Aichi University of Education)

要約　数列の各項における最大桁の数の推移は，末尾の数の推移に比べて複雑な様相を示すが，等比数列の場合には，公比に関わらず最大桁の数は同一の分布にしたがうことが，エルゴード定理によって示されている。本報告ではこの分布が，n^kのような一般項を持つ数列についてはどのようになるかを調べ，$k\to\infty$の時の極限として等比数列の時の分布が導かれることを示す。

Keywords：数列，確率分布，エルゴード定理

1．はじめに

次々と移り変わる数の並びがどのように変化していくかを調べることは，あらゆるレベルの数学において興味深い問題である。

たとえば掛け算の九九の表というのは，小学校低学年で学習する，最も基礎的な数の並びであるが，注意深い子どもにとっては，なかなか興味深い対象である。

九九の表の右辺を眺めていると，その一の位が2 → 4 → 6 → 8 → 0もしくはそれを並べ替えたものの繰り返しになっている段がある。偶数の段が皆これである。一方奇数の段では，5の段を除き，すべて1から9までの数字が一回ずつ現れている。5の段は単純で，9の段はとても特徴的である。8の段では，一の位の並び方は2の段の逆順になっている。6の段は4の段の逆順である。

九九程度でもこのようなのであるから，世の中に無数にある数列の中には，面白い性質を見出すことができるものが数多くあるように思われるし，規則性や法則性を求めていろいろと具体的に操作してみることは，教育的見地からも，大変意味のあることであると思う。

中でも数列の各項における最初の数と末尾の数の推移は特に興味の対象となりやすく，面白い問題を私たちに投げかけてくれる。

本論文では，まずこのような「末尾の数」，すなわち一の位の数について，その推移を簡単に考察した後，あまり注目されることのない「最大桁の数」，すなわち「最初の数字」の移り変わりについて述べていくこととする。

特に，このような観点から「べき関数」と「指数関数」との間に，興味深い関係が浮かび上がってくることになる。

2．一の位の推移

いくつかの数列について，その一の位がどのように変化するかを見てみよう。なお，出てくるパラメータはすべて自然数とする。

①等差数列：$a_n=a+(n-1)d$

この場合は，初項や公差の値によって系列は異なるが，以下のような数の繰り返しとなる。

1 → 2 → 3 → 4 → 5 → 6 → 7 → 8 → 9 → 0
2 → 4 → 6 → 8 → 0
3 → 6 → 9 → 2 → 5 → 8 → 1 → 4 → 7 → 0
4 → 8 → 2 → 6 → 0

他は省略するが，これはまさしく九九の表に登場する系列である。

②等比数列：$a_n=ar^{n-1}$

これも初項によって異なるが，$a=r$としていくつかの公比について系列を並べてみると以下のようである。

1 → 1 → 1 → 1 → 1 → 1 → …
2 → 4 → 8 → 6 → 2 → 4 → 8 → 6 → …
3 → 9 → 7 → 1 → 3 → 9 → 7 → 1 → …
4 → 6 → 4 → 6 → 4 → 6 → …
5 → 5 → 5 → 5 → 5 → 5 → …
6 → 6 → 6 → 6 → 6 → 6 → …
7 → 9 → 3 → 1 → 7 → 9 → 3 → 1 → …
8 → 4 → 2 → 6 → 8 → 4 → 2 → 6 → …
9 → 1 → 9 → 1 → 9 → 1 → …

このように，周期が1，2，4の系列のどれかになる。初項が1でない場合も，数字が変わるだけで推移の様子は同じである。

③その他の場合：$a_n=an^k$

これはべきによって異なるが，nの一の位が10個ごとに繰り返すことから，k乗したものも，周期がそれより長くなることはない。$a=1$として小さい方から少し調べてみると，以下のようになる。

$k=2$：1→4→9→6→5→6→9→4→1→0
$k=3$：1→8→7→4→5→6→3→2→9→0
$k=4$：1→6→1→6→5→6→1→6→1→0
$k=5$：1→2→3→4→5→6→7→8→9→0

これは前項の系列を縦に眺めてみたものに他ならない。また$k=5$で元に戻ったので，以下は同じ系列の繰り返しということになる。

このように，一の位，いわゆる「下一桁」については，ちょっと調べるだけで簡単にその全体像をつかむことができる。しかし最大桁，すなわち「最初の数」については，事情はそれほど単純ではない。

3．最大桁の数の問題

まず問題を定式化しておこう。

はじめに関数$f: R^+ \to S=\{1, 2, \cdots, 9\}$を，

$$f(x) = \left[\frac{x}{10^{s-1}}\right]$$

で定義する。ただし角カッコはガウス記号で，この場合は正の実数であるから整数部分を意味する。また，sはxの桁数を表すことにする。つまりこの関数は，与えられた正の実数について，その最大桁の数を与えるものである。xが1より小さい場合にはsの定義をきちんとしなければならないが，当面xとしては自然数を考えるので，問題にしないこととする。

次に，与えられた数列$\{a_n\}$に対して，

$$p(k)=\lim_{n\to\infty}\frac{\#\{i\leqq n\,;f(a_i)=k\}}{n}\,,\ k=1,\cdots,9$$

を定義し，最大桁に現れる数の割合を示すことにする。この定義には「収束すれば」という条件が必要であるが，本報告で扱う数列については，その条件は満たされている。またこの$p(k)$の$k=1$，…，9にわたる和は1であるから，これは集合S上の確率分布になっている。要するに，勝手にこの数列の項を取り出したとき，その最大桁の数がkである確率を表しているとも言えるわけである。

これから問題にするのは以下の2つである。

数列$\{a_n\}$について，
(1) 各項の最大桁$f(a_n)$の挙動を調べること
(2) その分布$p(k)$，$k=1$，…，9を求めること

これらについて，簡単な場合から始めて，以下に述べていくこととしよう。

4．ケース1：等差数列の場合

数列$\{a_n\}$が等差数列$a_n=a+(n-1)d$の場合には，たとえば10から100までを考えれば，

$10\leqq a_n<20$ならば$f(a_n)=1$
$20\leqq a_n<30$ならば$f(a_n)=2$
$30\leqq a_n<40$ならば$f(a_n)=3$
$40\leqq a_n<50$ならば$f(a_n)=4$
………

のように推移し，隣り合う項の間の間隔が一定であるため，それぞれの幅に入る項の数はだいたい等しい。公差の大きさにも依存するが，さらに100から1000まで，1000から10000までなどを考えていけば，項数の割合はますます一致してくる。すなわち等差数列については，

$$p(1)=p(2)=\cdots=p(9)=\frac{1}{9}$$

すなわち「最大桁の数は一様に分布する」と言える。

このことを具体的に見てみよう。たとえば初項$a=1$，公差$d=3$の場合，$f(a_n)$は以下のように推移する。

1→4→7→1→1→1→1→2→2→2→3→3→3→4→4→4→4→5→5→5→6→6→6→7→7→7→7→8→8→8→9→9→9→1→1→1→…

以下，100から199まで34個の1が続き，202から298まで33個の2が続く。このように，若干の違いはあるものの，割合としては一様分布が現れてくるのである。

5．ケース2：等比数列の場合

数列$\{a_n\}$が等比数列$a_n=ar^{n-1}$の場合について考えてみよう。まずは簡単な場合として，初項$a=2$，公比$r=2$の場合について最初の20項を求めてみると，

2，4，8，16，32，64，128，256，512，1024，2048，4096，8192，16384，32768，65536，131072，262144，524288，1048576，…

となり，最大桁の数の推移は，

2→4→8→1→3→6→1→2→5→1→2→4→8→1→3→6→1→2→5→1→…

となる。これらの数字は，この範囲では繰り返しているように見えるが，いつまでも繰り返すものではないように思える。また，この間におけるそれぞれの数の頻度を表にしてみると以下のようである。

〔2^n，20回〕

数	1	2	3	4	5	6	7	8	9
回	6	4	2	2	2	2	0	2	0

これを見ると，1がやや多いが，全体的な傾向はまだよくわからない。そこで，もっとずっと先まで計算を続け，第1000項まで求めてみる（もちろん計算機で）

と，頻度は以下のようになる。

〔2^n，1000回〕

数	1	2	3	4	5	6	7	8	9
回	301	176	125	97	79	69	56	52	45

今度はだいぶ細かく頻度が現れていて，どうやら1が一番多く，あとは単調に減少していることがわかる。

次に，公比$r=3$の場合について，同様に実験してみよう。初めの20個の推移は，

3→9→2→8→2→7→2→6→1→5→1→5→1→4→1→4→1→3→1→3→…

となり，一見して今度は何の規則性も見られない。公比$r=2$の場合とはやはりだいぶ違うようにも見える。一方この間の頻度を表にすると以下のようになる。

〔3^n，20回〕

数	1	2	3	4	5	6	7	8	9
回	6	3	3	2	2	1	1	1	1

これを見ると，頻度の方は大差ないようである。さらに1000回まで求めると，頻度は以下のようになる。

〔3^n，1000回〕

数	1	2	3	4	5	6	7	8	9
回	300	177	123	98	79	66	59	52	46

これは上の$r=2$の場合と驚くほどよく一致している。ひょっとすると，公比が変わっても頻度は不変なのではないかという「予想」が生まれてくる。この「予想」を裏付けるため，もう少し他のrについて求めてみよう。

その結果を以下にいくつか示す。

〔4^n，1000回〕

数	1	2	3	4	5	6	7	8	9
回	304	177	121	100	77	69	58	50	44

〔7^n，1000回〕

数	1	2	3	4	5	6	7	8	9
回	302	176	126	96	78	67	59	50	46

〔$(1.2)^n$，1000回〕

数	1	2	3	4	5	6	7	8	9
回	302	177	124	96	79	66	59	51	46

何と，公比が整数でないときまで含め，驚くほどの一致を見せている。これで「予想」は「確信」に変わったとも言えるが，まだ理論的に説明できていないので，「予想」にとどめ，まとめてみよう。

〔予想〕
等比数列 $\{a_n=ar^{n-1}\}$ については，各項の最大桁 $f(a_n)$ の分布は，初項や公比によらず一定である。

では，上の予想は本当に正しいことが証明できるのだろうか？また，その具体的分布は求められるのだろうか？それには，最大桁 $f(a_n)$ が何によって決まるか考えてみなければならない。

いまa_nがs桁の数だったとすると，

$$a_n=t\times10^{s-1}$$

と表される。ここで$1\leqq t<10$であり，このtの大きさによって最大桁の数は決まる。両辺の常用対数をとれば，

$\log_{10}a_n=\log_{10}t+s-1$

$0\leqq\log_{10}t<1$だから，$\log_{10}a_n$の小数部分で最大桁$f(a_n)$の値が決まることになる。ところで$a_n=ar^{n-1}$のとき，$\log_{10}a_n=\log_{10}a+(n-1)\log_{10}r$であるから，$\log_{10}a_n$は等差数列になる。そして特殊な数値以外では$\log_{10}r$は無理数であるから，「エルゴード定理」と呼ばれる理論により，$\{\log_{10}a_n\}$ の小数部分は，区間［0，1］内で一様に分布する。そして

「最大桁$f(a_n)$がk」⇔「$k\leqq t<k+1$」
⇔「$\log_{10}k\leqq\log_{10}t<\log_{10}(k+1)$」

と，$\log_{10}t$が区間［0，1］内で一様に分布することから，確率は区間の幅に一致して，最終的に

$P(f(a_n)=k)=\log_{10}(k+1)-\log_{10}k\ (k=1, 2, \cdots, 9)$

となることがわかる。

この式にもとづいて，理論的な分布を計算すると以下のようである。

〔理論分布〕

数	1	2	3	4	5	6	7	8	9
回	.301	.176	.125	.097	.079	.067	.058	.051	.046

この分布は上記のいくつかの公比に対する実験の結果と見事に一致している。このようにして「予想」は証明され，その分布も理論的に導くことができた。
以上を定理の形でまとめておこう。

定理1　等比数列の最大桁の数は初項や公比にかかわらず一定の分布を持ち，それは
$p(k)=\log_{10}(k+1)-\log_{10}k\ (k=1, 2, \cdots, 9)$
で与えられる。

6. ケース3：$a_n=n^d$の場合

今度は等差数列でも等比数列でもない場合について，同じ事を試してみよう。等差数列は関数で言えば「一次関数」，等比数列は「指数関数」に当たる。この節ではいわゆる「べき関数」に当たる数列について考えたい。

まずは実験してみよう。$d=2, 3, 4, 7, 10$に対して1000項求めてみて，最大桁数の分布を見てみよう。

〔n^2, 1000回〕

数	1	2	3	4	5	6	7	8	9
回	194	146	123	111	97	91	84	78	76

〔n^3, 1000回〕

数	1	2	3	4	5	6	7	8	9
回	226	159	124	106	94	83	74	71	63

〔n^4, 1000回〕

数	1	2	3	4	5	6	7	8	9
回	245	166	124	102	90	80	70	66	57

〔n^7, 1000回〕

数	1	2	3	4	5	6	7	8	9
回	273	167	127	99	85	76	64	60	49

〔n^{10}, 1000回〕

数	1	2	3	4	5	6	7	8	9
回	278	173	125	100	82	73	62	54	53

これを見ると，分布が単調減少であることは共通であるが，はじめのうちは前節の分布と異なっている。しかしべきが増加するにしたがってだんだんと差が大きくなり，やがてその分布は等比数列のときのものに近づいてきているように思われる。

このことを調べるには，$a_n=n^d$の場合について，最大桁の数の分布を記述しなければならない。

①$a_n=n^2$の場合

まず最も簡単な，$d=2$の場合について考えてみる。

$$n^2=t\times10^{s-1}$$

と表されたとき，$k\leqq t<k+1$であればn^2の最大桁の数はkとなる。それでは，そのためにはnはどのような数であればよいのだろうか？このように考えると，

$$n=u\times10^{s-1}$$

の形で表したとき，

$$\sqrt{k}\leqq u<\sqrt{k+1} \quad または \quad \sqrt{k+1}\leqq u<\sqrt{10(k+1)}$$

であればよいことが，簡単な考察からわかる。そしてこのことから，最大桁の数がkである割合は，

$$\begin{aligned}p(k)&=\frac{1}{9}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}+\sqrt{10(k+1)}-\sqrt{10k}\right)\\&=\frac{1+\sqrt{10}}{9}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)\\&=\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{10}-1}\end{aligned}$$

で与えられる。

同様に考えて，一般の次数dについては，

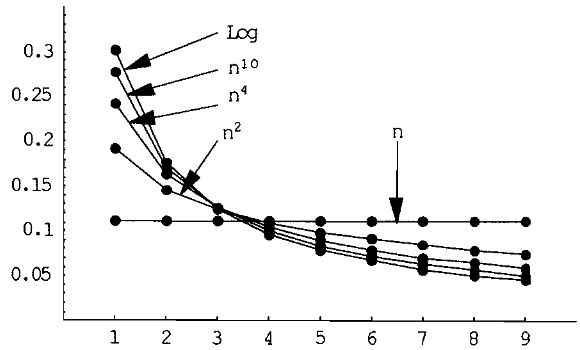
$$p(k)=\frac{\sqrt[d]{k+1}-\sqrt[d]{k}}{\sqrt[d]{10}-1}$$

となることがわかる。以上をまとめておこう。

定理2 $a_n=n^d$（dは自然数）の場合には，最大桁の数の分布は以下で与えられる。

$$p(k)=\frac{\sqrt[d]{k+1}-\sqrt[d]{k}}{\sqrt[d]{10}-1}\ (k=1,2,\cdots,9)$$

この理論分布の様子を，*Mathematica*を使ってグラフで表してみた。



次数を上げるにつれて，「Log」と記されている前節の分布に近づいていく様子が，見て取れるであろう。

では，「dを大きくしていくと前節で述べられた等比数列のときの分布に近づく」ことはどう説明すればよいのであろうか？

これは定理2に示されている量について，$d\to\infty$の極限を考えることに他ならない。

定理2の式で $\sqrt[d]{10}$ をxとおくと，$d\to\infty$のとき$x\to1$で，

$$\begin{aligned}\sqrt[d]{k}&=10^{\log_{10}\sqrt[d]{k}}=10^{\frac{1}{d}\log_{10}k}\\&=(\sqrt[d]{10})^{\log_{10}k}=x^{\log_{10}k}\end{aligned}$$

と表されるから，

$$\begin{aligned}\lim_{d\to\infty}\frac{\sqrt[d]{k+1}-\sqrt[d]{k}}{\sqrt[d]{10}-1}&=\lim_{x\to1}\frac{x^{\log_{10}(k+1)}-x^{\log_{10}k}}{x-1}\\&=\log_{10}(k+1)-\log_{10}k\end{aligned}$$

（ロピタルの定理など）

が成り立ち，予想通り等比数列のときの分布が現れた。以上を定理としてまとめておこう。

定理3 数列 $\{a_n=n^d\}$ における最大桁の数の分布は，$d\to\infty$のとき，等比数列 $\{a_n=ar^{n-1}\}$ における最大桁の数の分布に収束する。

7. その他の場合

以上，等差数列，等比数列，n^dのそれぞれについて，最大桁の数の分布を調べ，相互の関係について論じてきた。しかし数列の種類はなお数多くあり，それらにおいても一の位の数および最大桁の数の分布は興味深い問題である。

筆者の下で卒業研究に取り組んだある学生は，素数の列やフィボナッチ数列において，最大桁の数がどのように分布するかについて調べた。その結果を紹介しよう。

①素数の列
数列 $\{a_n\}$ を，素数を順番に並べた数列とし，その最大桁の数の分布を調べてみる。100までの素数について，最大桁の数の分布を見ると，以下のようである。

〔素数，100まで〕

数	1	2	3	4	5	6	7	8	9
回	4	3	3	3	3	2	4	2	1

これではまだ様子がよくわからない。1000まで調べると，

〔素数，1000まで〕

数	1	2	3	4	5	6	7	8	9
回	25	19	19	20	17	18	18	17	15

素数は先へ行くほど分布がまばらになるため，1から始まるものが相対的に多くなっているが，素数定理から計算すると，相対的な割合の差は小さくなっていき，やがて1/9ずつの一様な分布に近づいていくことが示される。

②フィボナッチ数列
フィボナッチ数列は有名な数列だが，その一般項は

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$

で表され，nを大きくしていくと，やがて括弧の中の第1項の影響が強くなって，等比数列と同じ分布に近づいていく。その比がいわゆる黄金比になることもよく知られている。

8. 教材化の試み

ここまでに述べてきたような操作は，学校数学の場でも楽しい教材として活用できるであろう。以下にその例を述べてみよう。

①数列 $\{a_n=2^n\}$ において，各項の下1桁の数字がどのように推移するか質問する。

↓

②生徒に作業させ，規則性を見出させる。

↓

③一般に数列 $\{a_n=r^n\}$ ではどうなるか考えさせる。

ここまでは提示の仕方によっては，小学校でも展開可能であろう。生徒が作業に慣れてくるのを待って，いよいよ本題へと進む。

④では数列 $\{a_n=2^n\}$ において，先頭の数字はどのように推移するか質問する。

↓

⑤生徒に作業させてみる。意外にも，簡単な周期のようなものは存在しないことに生徒たちは気づくであろう。

↓

⑥そこである程度まとまった個数の項について，最大桁の数の度数を1から9までのそれぞれの数について数えてみることにする。操作を始める前に，できれば結果を予想させてみると，さらに興味は増すであろう。

↓

⑦まともにかけていくと急激に大きな数になるため，20項目ぐらいで大変になってくる。しかし問題なのは最初の数字であり，全体の桁数は問題でないから，2をかけながら最初の5つぐらいの数字だけをみて，あとは捨てていけば楽であるというようなアドバイスをしてやる。もちろんそうすると微妙な誤差が出るが，全体の度数分布にはさほど影響が出ない。

↓

⑧100個ぐらいのデータが揃ったら，一度発表して考察を加えてみる。一様にならず，単調減少するという様子は見えて来るであろう。

↓

⑨ここで少し話し合い，次に何をやるかを決める。たとえば手分けして，$\{a_n=r^n\}$ の公比が3，5，7などの場合について調べたり，より一般の場合，すなわち等比数列 $\{a_n=ar^{n-1}\}$ の場合について調べたりしてもよいであろう。

↓

⑩得られた結果を比較してみる。どの場合も大差ないことがわかり，生徒の間に意外な感じとともに謎が広がると思われる。

↓

⑪ここで教師が，「最大桁の数は何で決まるか」質問してみる。もちろん決まった答えがあるわけではないが，考えている数列の対数を取ってみると，考えの糸口が見えてくるであろう。

↓

⑫等比数列の対数を取ると等差数列になり，各項の最

大桁の数は，常用対数の小数部分で決まることを説明する。(取りあえず常用対数を取ることだけ指示して，それ以上の説明は最後に回してもよい)

↓

⑬円上に0から1まで目盛りをつけ，そこに，考えている数列の各項について常用対数を取ったあとで得られる小数部分をプロットしていく。

↓

⑭するとどの数列についても，やがて円上に一様に分布していくのがわかる。

↓

⑮円周を，最大桁が1になる部分，2になる部分，…というように色分けしていき，それらの割合が，前に求めた割合に近いことに気づかせる。

↓

⑯結局どのような等比数列についても（例外はあるが)，最大桁の数は同じ分布に従い，その割合は対数で求められるのだということを，実験を通した感覚で納得させる。

9. おわりに

数列の最大桁の数というのはあまり問題にされないが，あらためて考えてみると，なかなか奥が深いことがわかる。そして，具体的な操作という点では，手計算や電卓，コンピュータ等を用いて簡単に調べられるため，高校以下の教育現場でも好適な素材であると思う。

実際，本報告のように結果を知らされると納得するであろうが，情報を与えられなければ，様々な試行錯誤の中で，多くの意外な発見に出会うであろう。

また，対数は高校のカリキュラムの中でも理解・定着が難しい単元であるが，このような素材を分析するのに必要なツールとして用いれば，また違った目で理解が深まるのではないだろうか。

前節でこのような観点からの教材化を試みたが，さらに進んで，等比数列 $\{a_n=ar^{n-1}\}$ をp進法で表したらこの問題の結論はどうなるかという問題に発展させてみると，今度はpを底とする対数が役に立つことがわかる。このように，ひとつの問題から派生させて，いろいろな観点へと発展させていくことも可能であろう。

参考文献

[1] Breiman, L., Probability, Addison－Wesley, 1968.
[2] 左口　孝史，エルゴード定理を利用した最大桁の数の考察，愛知教育大学卒業論文，2001.