

算数割合文章題の課題分析と解法の過程

愛知教育大学 心理学教室 多 鹿 秀 継
横浜国立大学 数学教室 石 田 淳 一

1. 目的

算数文章題の解法過程は、一般に与えられた文章を読んで理解し、理解した内容に基づいて問題を解くことからなる(Hinsley, Hayes, & Simon, 1977; Mayer, 1982, 1985, 1987; Paige & Simon, 1966)。算数の文章題を読んで理解する過程とは、子どもが与えられた文章題を読んで問題文の内容に適した心的表象を構成することである。ここで述べるところの心的表象とは、子どもが問題文を読んでその内容を理解していく過程において、過去の経験に基づいて蓄積してきた言語的知識を利用しながら与えられた問題文の解法に向けて形成すると考えられる問題内容の構造といえる。また、解法の過程とは、過去の経験に基づいて貯蔵してきた演算や演算決定のための方略などの算数的知識を自ら形成した心的表象に適用して解答を得る過程と考えられる。

これまで我々の研究プロジェクトは、算数文章題の理解過程を解明するために様々な実験的研究を実施してきた。具体的には、まず6年生の子どもに割合に関する算数文章題を記銘させた場合(記銘条件)と解かせた場合(解法条件)の文章題の再生成績を比較した。その結果、解法条件における文章題の記銘が偶発学習課題であるにも関わらず、記銘条件と類似の再生成績を示す文もあった(多鹿・石田, 1989)。割合の文章題は、通常個々の文に1つの数値が割り当てられた割当文、数値間の関係が示された関係文、および問題を構成する問題文、の3つのタイプの問題で構成されている。これらの3つのタイプの文の中で、関係文の再生成績に関しては記銘条件と解法条件で差がなかったのである。

また、別の研究では、小学校6年生に割合の問題文の関係文のみを空覧にした文章を与え、割合

の問題文を構成させた(Ishida & Tajika, 1990 a)。勿論、関係文で使用する数値は文を作成する手がかりとして与えた。その結果、割当文と質問文から問題文の心的表象を形成できるとき、その問題文に適切な関係文を作成できることが明らかとなった。更に、石田・多鹿(1990 b)では、割合文章題成績の上位群と下位群の6年生に、割当文、関係文、および質問文から適切に選択した数値・単語および求めるものを手がかりとして与え、文章題を生成させた。その結果、上位群は解答可能な問題文を生成しかつ線分図を正しく書き、正しく解くことができた。他方、下位群では解答可能な問題文を生成できたが、それらの問題文に適切な線分図を書いたり正解する割合が低いものであった。

ところで、石田・多鹿(1990 b)の研究において見られた下位群の誤答の特徴として、線分図に表したとき基準量がいつも全体に等しくとる場合が多く見られた。このことは、下位群の子どもには部分-全体関係を構成する要素の理解とこれらの要素に関する割合関係の理解が結び付いていないことを示している。また、下位群の子どもは、大別すれば、図を正しく書くが正しい式を作れない子どもと正しい図を書けない子どもに二分された。前者の場合、特徴的な手続き上の誤りが見られた。それは、複雑構造の問題でも、「全体」を求める問題では除去を、「部分」を求める問題文では乗法を、問題文で与えられた数値だけを用いて機械的に適用するものである。単純構造の問題文では、それは正しい手続きであるが、複雑構造の問題では不適切である。以上の2点の指摘から、割合問題の解法において「基準量が全体に等しいかどうか」の要因が心的表象の形成過程に大きく作用すること、および解法過程において「構造が

単純か複雑か」の要因が解法過程に作用すること、が予想される。

今回の研究では、これらの2つの要因の問題解法に及ぼす影響を調べるものである。そのために、文章題の理解過程と解法過程の各々の難易を分析できるように次のような工夫を行った。まず、算数文章題を子どもに読ませ、4種の線分図の中から問題内容の構造を正しく反映した図を選択させた。次に問題を解くための式を作らせた。最後にその式を解かせた。この調査では、使用する問題の構成に関して、%と小数の2種の数値表示を用いた。また、問題の意味構造を操作し、部分一全体の意味構造を有する問題文と比較の意味構造を有する問題文の2通りを用いた。問題文の数学的構造としては、比の第2用法と第3用法を考慮した。

2. 方法

(i) 被験児：被験児は公立小学校5校から選抜された6年生222名であった。そのなかで、%で表示された文章題に取り組んだ6年生が128名で、小数で表示された問題に取り組んだ6年生が94名であった。

(ii) テスト課題：数値の表示(%と小数)と意味構造(部分一全体と比較)の組合せから、4種類のテスト課題を用意した。部分一全体の意味構造を有する%で表示された問題文を表1に、比較の意味構造を有する%で表示された問題文を表2に各々示す。小数による表示の文章題は%を小数にして「倍」をつけたものであった。小冊子は全て9頁で構成されていた。小冊子の1頁は例題を含む表紙であり、残りの8頁は問題文で構成されていた。また、これらの問題は、立式の構造及び割合の基準値と全体との関連から、各々折半できるものであった。

(iii) 手続き：調査はクラス単位の集団で実施された。最初に表紙に記載されている例題を解かせ、問題を熟知させた。例題では、被験児はまず

表1 本調査で使用した問題文(部分一全体)

問題番号	問題文
1	まさお君の学校の6年生全体の人数は140人です。まさお君の学級は30%です。まさお君の学級の人数は何人ですか。
2	あきら君は妹におはじきを15個あげました。妹にあげたおはじきの数は、あきら君の持っているおはじき全体の60%にあたります。あきら君がはじめに持っていたおはじきの数はいくつですか。
3	まさきさんは、はり金を工作に使いました。もとのはり金の長さは84cmで、それは、つかったはり金の長さの240%にあたります。まさきさんが使ったはり金の長さは何cmですか。
4	かず子さんの学級には、虫歯のある人が25人います。学級全体の人数は虫歯の人の160%です。かず子さんの学級の人数は何人ですか。
5	今日までに本全体の40%にあたるページ数を読みました。まだ、30ページ残っています。この本は全部で何ページありますか。
6	たえ子さんは、お金を720円持っています。たえ子さんは持っていたお金の75%を買物で使いました。たえ子さんは、いま、いくら持っているのでしょうか。
7	よし子さんの学校の中庭には花だんとしばふがあります。しばふの面積は300㎡です。花だんは、しばふの面積の80%です。中庭の面積はいくらかですか。
8	さち子さんは色紙とはさみを買って、350円はらいました。色紙のねだんははさみのねだんの40%です。はさみのねだんはいくらですか。

表2 本調査で使用した問題文（比較）

問題番号	問題文
1	100gが420円の牛肉があります。とり肉100gのねだんは牛肉100gのねだんの30%です。とり肉100gのねだんはいくらですか。
2	赤いテープと白いテープがあります。白いテープは60cmです。白いテープは赤いテープの80%です。赤いテープは何cmですか。
3	A、B 2つのいれものがある、Aにはいる水の量は、Bにはいる水の量の250%にあたるそうです。Bには、何リットルの水がはいるのでしょうか。
4	国語辞典は1500円です。理科図かんのねだんは、国語辞典の120%にあたるそうです。理科図かんのねだんはいくらですか。
5	デパートの高さは42mです。デパートの高さは、市役所の高さの30%だけ低いそうです。市役所の高さはどれだけでしょう。
6	いさむ君の家では、今年じゃがいもが400kgとれました。去年のとれ高は今年のとれ高の25%だけ少なかったそうです。去年のじゃがいものとれ高はどれだけですか。
7	お母さんの体重は55kgです。お父さんの体重はお母さんの体重の20%だけ重いそうです。お父さんの体重は何kgですか。
8	お父さんの体重は63kgです。お父さんの体重はまこと君の体重の80%だけ重いそうです。まこと君の体重はどれだけでしょう。

するように教示された。図1に問題番号1の4種の線分図を図示した。被験児は、更に、線分図の選択が終了すれば選んだ線分図に基づいて問題文を解くように教示された。被験児が正しいと考える線分図を選択させかつ選択した線分図に基づいて問題を解かせ、その結果を説明するのに要した時間は最大7分であった。次に、被験児は2ページからの本テストを行った。本テストの時間は50分であった。50分の経過後、本テストを回収した。

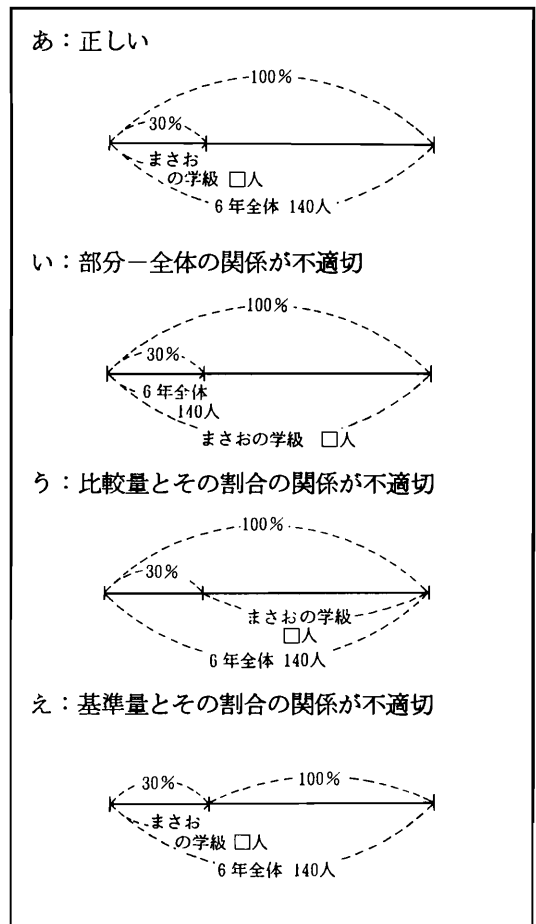


図1 本調査で使用した4種の線分図の一例（表1の1の問題に対応）

問題文を読み、問題文の下に図示されている4種の線分図のなかから正しい線分図を1つだけ選択

3. 結果と考察

各文章題は、①4つの線分図の中から正しい線

分図を1つ選択する設問、②選択した線分図に基づいて文章題を解くための式を立てる立式の構成の設問、および③立てた式を解いて解答を得る立式の解答の設問、の3問を含んでいた。

線分図に関する設問は、図1に見られるように1つの正解と3つの異なるタイプの不適切な選択肢からなる課題であった。正しい線分図を選択した場合に1点を賦与した。また、立式は選択した線分図に基づいて立式を構成する課題であった。正しい線分図を選択して正しく立式を構成した場合に1点を与えた。この場合、誤った線分図を選択し、その線分図に対応する式を立てることは不可能であった。他方、上記の場合と同じく誤った線分図を選択したにも関わらず、立式を正しく構成した場合には、立式に1点を与えた。最後に、正しく解答すれば、1点を賦与した。

さて、結果は正答数の分析と線分図-立式-解答の3タイプの正答・誤答に対するパターン分析の2つの分析から構成された。

(1) 正答数の分析として、線分図を正しく選択した割合、線分図の結果に関わらず問題文を正しく立式した割合、立式から得られた正解の割合、の3点を分析し、全体の分析結果及び名変数毎に分析した結果を示した。

また、(2) パターン分析として、線分図の選択結果、立式の構成、および解答の三者の関連を分析し、正答数の分析と同様に、全体のパターン分析結果及び名変数毎の分析結果を示した。

なお、名変数毎の分析結果は、紙幅の都合及び正答数の結果のパターンの類似により、%ないし、小数の結果の一方のみを掲載した。統計的記述における有意水準は、断りのない限り全て1%水準である。

(1) 正答数の分析結果

(i) 全体の分析結果

222名の6年生の結果が表3に示される。表3は数値表示および問題の意味構造(以下では意味構造と呼ぶ)別に、正答の平均値、標準偏差(SD)、および各条件群の人数を示したものである。表3の上から順番に、線分図、立式、およびその解答

の各々の結果を示した。%表示問題で部分一全体の意味構造を有する問題(以下では、%一部と略記する)を解いた被験児は63名、%表示問題で比較の意味構造の問題(%一比と略記)を解いた被験児が65名、小数表示問題で部分一全体の意味構造の問題(小一部と略記)を解いた被験児が47名、および小数表示問題で比較の意味構造を有する問題(小一比と略記)を解いた被験児が47名であった。

表3の結果から分かるように、3つの設問共に、%表示問題と小数表示問題を比較したときには%表示問題の方が容易な傾向が認められる。また、部分一全体の問題の意味構造を有する問題と比較の問題の意味構造を有する問題とを比較したとき、部分一全体の意味構造を有する問題の方が容易なようであることが理解できる。そこで、表3の結果に基づいて、各テスト課題毎に2(数値表示)×2(意味構造)の分散分析(ANOVA)を実施した。

その結果、線分図では、数値表示および意味構造の主効果が有意であり(数値表示では、 $F(1, 218) = 25.00$)、意味構造では、 $F(1, 218) = 37.86$ 、%表示の方が小数よりも易しく、また部分の問題の意味構造の問題の方が比較の問題の意味構造を有する問題よりも容易であった。更に、数値表示と意味構造の交互作用も有意であった($F(1, 218) = 10.71$)。数値表示と意味構造の交互作用が有意であることは、小学校6年生が%の表示を含む問題や小数表示でも部分一全体の意味構造を持つ問題に対しては小一比問題に比べて容易に正しい線分図を選択できることを意味するものである。小学校6年生にとって、小数表示の問題でかつ問題の意味構造が比較問題のときには、文章題の意味内容を表現している線分図を正しく選択できる割合が低くなるといえる。

立式および解答では、共に意味構造の主効果のみが有意であった(立式では、 $F(1, 218) = 15.56$ 、解答では、 $F(1, 218) = 13.89$)。立式および解答の共に、部分一全体問題の方が比較問題よりも容易であった。立式やその解答では、問題の意味構造の違いのみが統計的に有意であり、線分図の場合と同様の結果が認められた。

表3 各条件における全体の結果

意味構造		数値表示	
		%	小数
部分一全体		平均	5.49
		(S D)	(1.54)
		人数	63
比較		平均	5.14
		(S D)	(1.91)
		人数	65

意味構造		線分図	
部分一全体		平均	5.49
		(S D)	(1.54)
		人数	63
比較		平均	5.14
		(S D)	(1.91)
		人数	65

意味構造		立式	
部分一全体		平均	4.70
		(S D)	(1.67)
		人数	63
比較		平均	4.17
		(S D)	(2.39)
		人数	65

意味構造		解答	
部分一全体		平均	4.60
		(S D)	(1.59)
		人数	63
比較		平均	4.11
		(S D)	(2.42)
		人数	65

(注) 平均の数値は8点満点の得点であり、括弧内の数値は標準偏差である。

(ii) 立式の構造の結果 (小数)

式の構造とは、立式が1つのステップで構成されるか(単純構造)複数のステップで構成されるか(複数構造)を意味している。勿論、複雑構造よりも単純構造を有する問題の方が容易であることが予想できる。

表4に立式の構造を変数にしたときの小数における正答数の結果を示した。線分図の結果から、

複数構造よりも単純構造の問題の方が易しく($F(1.92)=41.24$)、部分一全体問題の方が比較問題よりも容易であった($F(1.92)=15.80$)。また、立式の結果から、単純構造の方が複雑構造よりも易しく($F(1.92)=115.40$)、部分一全体問題の方が比較問題よりも容易であった($F(1.92)=3.95$)、 $p<.05$)。更に、立式の構造と意味構造の交互作用が有意であった($F(1.92)=6.90$)。解答の結果から、単純構造の方が複雑構造よりも容易であり

表4 立式構造の結果 (小数)

意味構造		立式の構造	
		単純	複雑
部分一全体		平均	3.15
		(S D)	(.97)
		人数	47
比較		平均	2.47
		(S D)	(1.32)
		人数	47

意味構造		線分図	
部分一全体		平均	3.15
		(S D)	(.97)
		人数	47
比較		平均	2.47
		(S D)	(1.32)
		人数	47

意味構造		立式	
部分一全体		平均	3.17
		(S D)	(1.05)
		人数	47
比較		平均	2.55
		(S D)	(1.27)
		人数	47

意味構造		解答	
部分一全体		平均	3.06
		(S D)	(1.15)
		人数	47
比較		平均	2.38
		(S D)	(1.38)
		人数	47

(注) 平均の数値は4点満点の得点であり、括弧内の数値は標準偏差である。

($F(1.92)=88.89$)、また立式の構造と意味構造の交互作用も有意であった($F(1.92)=9.26$)。交互作用結果は単純構造を有する部分一全体問題の得点が高いことによるものである。

表3と表4の結果から、小数の比較問題が難しいこと、部分一全体構造を有する問題の方が比較問題よりも容易であること、単純構造を有する問題の方が複雑構造の問題よりも容易であること、及び部分一全体構造を有する複雑問題の立式が困難になること、が明らかとなった。

(iii) 基準値と全体の関連に関する結果 (%)

次に、割合の基準値と全体の関連から結果を分析した。割合の基準値と全体の関連は、問題によって基準値と全体が等しい場合と基準値が全体を超える場合が存在する。被験児にとって、基準値と全体が等しい方が相違する場合よりも問題を解き易いといえる。

表5に基準値と全体の関連から%の正答数を分析した結果を示した。線分図の結果から、基準値と全体が同一の方が相違している場合よりも容易であり ($F(1,126)=43.11$)、基準値と全体の関連と意味構造の交互作用も有意であった ($F(1,126)=34.32$)。また、立式の結果も、同一の方が相違している場合よりも容易であり ($F(1,126)=34.32$)、基準値と全体の関連と意味構造の交互作用も有意であった ($F(1,126)=16.56$)。更に、解答の結果も他の2つの結果と同様であり、同一の方が良く ($F(1,126)=25.63$)、交互作用も有意であった ($F(1,126)=7.94$)。

このようなことから、基準値と全体の関連が同一で部分一全体の意味構造を有する問題以外は、被験児にとって、解法が困難であることが理解できる。

表5 基準値と全体の関連から見た結果 (%)

意味構造	基準値と全体の関係	
	同一	相違
	線分図	

部分一全体	平均	3.46	2.03
	(SD)	(.92)	(1.15)
比較	平均	2.68	2.46
	(SD)	(1.22)	(1.31)
	人数	63	63
	人数	65	65

		立式	
部分一全体	平均	2.83	1.86
	(SD)	(1.00)	(1.14)
比較	平均	2.17	2.00
	(SD)	(1.28)	(1.50)
	人数	63	63
	人数	65	65

		解答	
部分一全体	平均	2.75	1.86
	(SD)	(1.02)	(1.07)
比較	平均	2.18	1.94
	(SD)	(1.27)	(1.49)
	人数	63	63
	人数	65	65

(注) 平均の数値は4点満点の得点であり、括弧内の数値は標準偏差である。

(2) パターン分析結果

次に、線分図-立式-解答の3タイプの正答・誤答に対するパターン分析結果を示す。

線分図の選択結果、立式、及び解答の三者の全体的な関連を分析するために、3つのテスト課題の結果をパターンに分類した。それらのパターンは、正答として1点を賦与された場合を○とし、誤答の場合を×としたとき、8通りに分類できる。それらは、①(○○○)、②(○○×)、③(○×○)、④(×○○)、⑤(○××)、⑥(××○)、⑦(××○)、⑧(×××)、であり、左から線分図、立式、および解答の結果を示すものである。

(i) 全体のパターン分析結果

表6には、数値表示と意味構造を組み合わせた4条件群における各解答パターンの出現の割合が示されている。各条件群毎に縦にパーセントの数値を合計すれば、100%（誤差により±1%）になるであろう。

なお、④（×○○）は間違っただ線分図を選択したにも関わらず、問題文を正しく立式しかつ解いた結果のパターンである。問題として被験児に与えられた立式は、選択した線分図に基づいて立式することであった。しかしながら、正しく線分図を選択できず、間違っただ線分図に基づいて立式することは不可能であった。それ故、線分図の選択結果に関わらず、問題文の正しい式を立てた場合を正解にした。

また、⑦（××○）は、問題文の解答のみが正解で、他の設問への解答は正しくなかったパターンである。この結果は本来的には有り得ないパターンである。

表6から理解できることは、(i) ①（○○○）と⑧（×××）のパターンの割合が多いことから、基本的には問題の解法にとって問題の理解が重要であること、(ii) 小一比を除く他の3条件群における①（○○○）のパターンの割合が高いこと、逆に (iii) %-比や小一比の条件群に見られるように、⑧（×××）のパターンの割合が高いこと、(iv) 小一比の④（×○○）のパターンの割合が他の3条件群に比べて高いこと、などである。

これらの結果は上記の(1)の正答数の結果を追認するものである。即ち、小学校6年生では、比較の問題の意味構造を有する問題が部分-全体の意味構造を有する問題に比べて難しいこと、および小一比条件群の問題文の意味内容に対応した線分図を選択し難いこと、であった。更にパターンの分析から、小一比条件群では、間違っただ線分図を選択した場合でも正しく立式しかつ正解する割合が高いこと、が見られた。

表6 全体における各回答パターンの出現の割合
(数値は%)

パターン	%-一部	%-比	小一部	小一比
------	------	-----	-----	-----

①（○○○）	49	47	47	37
②（○○×）	2	1	2	2
③（○×○）	0	0	1	1
④（×○○）	8	4	6	11
⑤（○××）	17	16	15	13
⑥（×○×）	0	0	1	1
⑦（××○）	0	0	0	0
⑧（×××）	23	31	27	36

(ii) 各条件におけるパターン分析結果

表7は立式構造変数に基づいた小数のパターン分析結果であり、表8は割合の基準値と全体の関係から見た小数のパターン分析結果である。

2つの表から、立式構造の単純-複雑の方が同一-相違よりも①（○○○）パターンの出現の割合の差が大きいことが認められる。また、基準値と全体の関連における同一-相違の方が単純-複雑よりも④（×○○）パターンの出現の割合の差が大きいようである。また、表7では、小一部の複雑問題の立式が他の場合に比べて困難であることが理解できる。

表7 立式構造における各回答パターンの出現の割合
(数値は%)

パターン	小一部		小一比	
	単純	複雑	単純	複雑
①（○○○）	66	28	47	26
②（○○×）	3	2	4	0
③（○×○）	2	0	1	1
④（×○○）	8	5	12	11
⑤（○××）	7	24	10	16
⑥（×○×）	2	0	1	0
⑦（××○）	1	0	0	0
⑧（×××）	11	41	25	47

更に、表8では、小一部の同一条件を除いて、①（○○○）と⑧（×××）のパターンの割合が等しくかつ⑤（○××）のパターンの割合が⑧

($\times \times \times$) よりも少ないことが明らかとなった。小一部の同一条件では、⑤ ($\bigcirc \times \times$) と⑧ ($\times \times \times$) のパターンの割合が等しかった。このような結果は、上述したように、文章題の解法にとって、問題の理解が重要であることを示すものである。

表8 基準値と全体の関連における各回答パターンの出現の割合 (数値は%)

パターン	小一部		小一比	
	同一	相違	同一	相違
① ($\bigcirc \bigcirc \bigcirc$)	53	41	35	39
② ($\bigcirc \bigcirc \times$)	1	4	3	1
③ ($\bigcirc \times \bigcirc$)	1	1	0	1
④ ($\times \bigcirc \bigcirc$)	5	7	7	15
⑤ ($\bigcirc \times \times$)	21	11	15	11
⑥ ($\times \bigcirc \times$)	0	2	1	1
⑦ ($\times \times \bigcirc$)	0	0	1	0
⑧ ($\times \times \times$)	19	35	39	33

石田淳一・多鹿秀継 1990 b 子どもの算数文題解法過程の認知論的分析V 日本教育心理学会第32回総会発表論文集, 335.

Mayer, R.E. 1982 Memory for algebra story problems. *Journal of Educational Psychology*, 74,199-216.

Mayer, R.E. 1985 Mathematical ability. In R.J.Sternberg (Ed.), *Human abilities: An information - processing approach*. New York: W.H.Freeman. Pp.127-150.

Mayer, R.E. 1987 *Educational psychology: A cognitive approach*. Boston: Little Brown and Company.

Paige, J.M., & Simon, H.A. 1966 Cognitive processes in solving algebra word problems. In B.Kleinmuntz (Ed.), *Problem solving: Research, method, and theory*. New York: John Wiley & Sons, Pp.51-119.

多鹿秀継・石田淳一 1989 子どもにおける算数文章題の理解・記憶 教育心理学研究,37,126-134.

4. 付記

本研究にご協力を頂きました5校の小学校の校長先生、諸先生並びに児童の皆様には心より厚くお礼申し上げます。なお、本研究は1991年9月に上越教育大学にて開催された第33回日本教育心理学会総会で発表されたものである。

(1991年12月15日受理)

5. 引用文献

Hinsley, D., Hayes, J.R., & Simon, H. 1977 From words to equations: Meaning and representation in algebra word problems. In M. A. Just & P. A. Carpenter (Eds.), *Cognitive processes in comprehension*. Hillsdale, NJ: Erlbaum. Pp.89-106.

Ishida, J., & Tajida, H. 1990a An analysis of children's generating and understanding of arithmetic word problems. *Bulletin of Japanese Curriculum Research and Development*, 14, 95-102.