愛知教育大学教科教育センター研究報告
第15号，PP. 341～352 (March, 1991)

図形の動的な扱いのコンピュータ上での実現とその利用について

愛知教育大学　数学教室　飯　島　康　之

Reconsideration of "dynamic view of figure", formulation of "dynamic control of figure" and its implimentation

—Software development to support students' understanding of dynamic view, conjecture-making and problem-solving with dynamic view—

0. 要約

本研究では，図形の動的な見方をコンピュータによって支援するソフトウェアを開発した。その過程で，動的な見方という概念の再定式化が必要になり，図形の動的な扱いという概念を定義した。本稿では，動的な見方という概念の分析と再定式化のための要件を明確化し，図形の動的な扱いという概念を定義する。そして，それを実現したソフトウェアの機能の概要と，教育におけるその利用方法のいくつかを概略する。

1. 研究のねらい

1.1 基本的な考え

本研究の基本的な考えは，次の通りである。

(1) 数学的問題解決を支える過程を抽象化し，限定された範囲の中で，より厳密に定式化する。

(2) 定式化された過程をソフトウェアによって実現する。

(3) そして，ソフトウェアによって，その過程を児童・生徒がより容易に行えるような Situation を構築し，児童・生徒の数学的問題解決の活動全体を支援する。

1.2 目標としての推測・発見の支援

また，本研究において，ソフトウェアによる支援によって，児童・生徒の推測・発見を促すことを目標とする。その第一の理由は，本研究で扱おうとする問題解決過程の最も基本的な所産が推測や発見だからである。そして，推測・発見の支援がより容易になれば，更に児童・生徒の思考過程を分析することが可能になり，問題解決の中の様々な過程の捉え方を導き出し，学習活動の可能性をより豊富に導き出せる可能性があるからである。また，第二の理由は，本研究では，支援すべき基本的対象として関数の考え（そしてその特殊なケースとしての図形の動的な見方）を取り上げるが，この関数の考え自体が，問題解決における関係の発見と不可分の関係にあるからである。

1.3 問題解決過程における「事実の収集」の支援

一般に，問題解決の過程では，

事実の収集 → 仮説の設定 → 仮説の検証

仮説の修正

図－1　問題解決過程におけるサイクル

のような過程を経る。この過程の中の，「事実の収集」をあまりしないならば，ただ単に与えられた問題を既知の方法で解くという活動にしかならない。しかし，同時に，この事実の収集は，実際には多くの労力を必要とする。そのため，本来は集めたデータから関係を発見したり，推測したり，またそれに反例を見つけたり，仮説を修正したりする過程に力点を置きたいのに，事実の収集（数学の場合では，様々な計算も含まれる）をすることにほとんどの労力を吸収されてしまい，本来の

到達できない可能性が高かった。

従って，このような問題解決過程の教授＝学習過程の可能性を高めるためには，「データの収集可能性」や「データの処理可能性」を高めることが必要になる。様々な事実を収集したり，コントロールすることが，実際に問題解決を行う観点から見ると本質的なのである。そして，関数の考えが，主として数量に関する事柄に限られているのは，数量においては，このデータの収集可能性，あるいは，処理可能性が非常に高められているために，サイクルが「回る」ことを可能にしているからに他ならない。例えば，図形の場合，事実の収集に相当するはずの「作図」を豊富に行うためには，数値計算とは比べものにならないほどの技能的な能力と労力が必要とされるため，このサイクルを回ることは，実質的に，非常に困難なのである。

このようなデータの収集可能性を高める一つの方法が，コンピュータにおけるプログラムとして記述することである。多くの場合，これはシミュレーションとして，つまり，代替的な状況を作り，代替的なデータを収集することに対応しているが，しかし，必ずしも「代替的」とばかりは言えない。

例えば，文書作成の場合を考えてみよう。我々は元々，紙に鉛筆を使って文書を書いていた。その修正はケシゴムや赤鉛筆を使って行っていた。正をしたり，推敲をすることができるし，部分的には，それをワープロが自動的に行ってくれる。これは，「代替的」であろうか。必ずしもそうではない。「文書作成」という目的に対して，新しい処理方法が開発されたと言うべきであろう。このように考えると，「代替」かどうかが重要になる場合もあるが，それ以上に，「データの収集可能性」や「処理可能性」が高まっていることの方が重要なのである。そして，さまざまな事象が，プログラムとして記述されているときには，その領域に対して，データの収集可能性や処理可能性が高まっているがゆえに，関数の考えを適用し，問題解決を進められる可能性を高めることができるのである。

2. 「動的な見方」の分析と再定式化のための要件

2.1 図形の動的な見方と問題解決

関数の考えに関する議論の中で，中島健三氏は，次のように述べている。

「図形の概念についても，いわゆる『動的な考察』，または『操作的な取扱い』として，関数の考えによる考察の重要性が，従来からも指摘されてきている。図形は，具体的な事物の形をもとに理想化し，抽象された概念であるにしても，それにとどまらず，基本的には，図形の辺，角などの要素に関する一定の条件で構成されるものとしての認識を高めていくことが重要である。」[1)]

このような論点は，図形の概念の理解の仕方の問題だけには止まらない。問題をよりオープンなものとして与え，その中にどのような関係が存在するのか，また問題をどう発展できるかを考えた場合，より本質的なものになってくる。そして同時に，実際に図形を動かしてみることによって，様々な事実を収集することが重要になってくる。

例えば，次の問題１～３を，問題４のように，よりオープンな形で与えた場合を考えてみよう。

問題１

四角形ABCDの４つの辺の中点をそれぞれE，F，G，Hとするとき，四角形EFGHは平行四辺形になることを証明せよ。

問題２

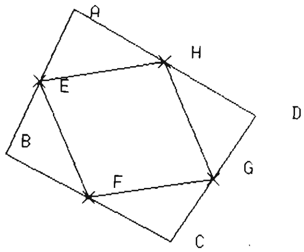
四角形ABCDが長方形（ひし形）のときに四角形EFGHはひし形（長方形）になることを証明せよ。

問題３

四角形ABCDが正方形のときに四角形EFGHは正方形になることを証明せよ。

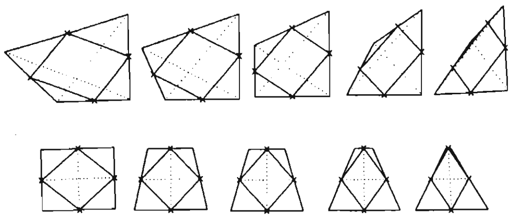
問題４

四角形ABCDの４つの辺の中点をそれぞれE，F，G，Hとするとき，四角形ABCDがどのような形のときに，四角形ＥＦＧＨはどのような形になるのだろうか。



図－2

様々な図を作図しながら考察することが伴わない限り，問題4に関して十分な解決を行うことは難しい。下図のような様々な図を能動的に収集し，仮説を立て，それを修正していく過程が必要になる。



図－3　連続的変形による様々な事実の収集

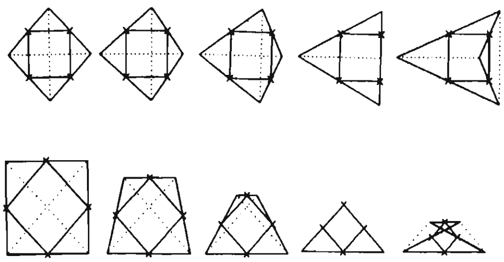


図-4　□EFGHが正方形になるような変形の仕方

そして，必要に応じて，「四角形ＥＦＧＨが長方形になるのは四角形ＡＢＣＤがひし形のときだけだろうか」「四角形ＥＦＧＨが正方形になるのは四角形ＡＢＣＤが正方形のときだけだろうか」という質問を，具体例を提示しながら，生徒の問題解決過程を深めていくことが考えられるのである。

このように，問題提示をよりオープンなものにし，生徒の問題解決過程をより高めていくためには，図－1におけるサイクルを何回も回ることが重要であり，そのためには，事実の収集をより容易にすることが必要であり，特に図形に関する場合，図形に対する動的な見方を十分反映できるような事実の収集の支援が必要になるのである。

2.2　動的な見方の再定式化における要件

図形に対する動的な見方を反映するようなソフトウェアを開発するためには，動的な見方そのものを分析する必要があるが，同時に，動的な見方という概念自体を，より限定された範囲内で，より厳密かつ形式的に再定式化することが必要になる。実際，教育の中で使われている「動的な見方」などの概念は，明確な定義をしないまま，文脈に応じて使われている場合や，きちんと定義を与えるにしても，かなり漠然とした形で定義されていることが多いからである。例えば，吉田氏ら，埼玉県ＴＳＧグループでは，次のような定義を与えている[2)]。

「①定義

『動的な見方』を『物事を固定したものと見ないで，変えることができるものと見ること』と押さえた。ここでいう，“物事”とは，課題の中に出てくることば，数値や課題解決の方法なども含んでいる。

②『動的な見方』の二つの意味

動的な見方を大別すると，つぎの二つが考えられる。

ア．物理的（外面的）な動的な見方

これは，点・線・面などを動かしたり，変形したりして思考することである。これには，映像化（図化），劇化，動作化，式化，具体的操作などが含まれる。

イ．概念（内面的）

これは，物事の概念に固執しないで，それを変えてみようとしながら思考を進めることである。したがって，定数を変数化してみる，変数を定数化してみる，一般化，具体化，特殊化など『～化してみる』を含んでいる。」

このような，かなり漠然とした概念に対して，その一部を再定式化するためには，次の2つの要件を満たす必要がある。

(1)　機能に基づく細分化

第一は，概念の細分化であるが，それを，機能に基づいて行うということである。例えば，ワー

プロの場合，文章作成という活動を，文字入力，削除，挿入，複写，検索などのいくつかの独立した機能の集合体に分割し，それらの総合体として再構築している。動的な見方に基づく活動も，同じように，様々な機能に分割し，どの機能はどのような形で実現可能か，そして生徒を支援可能かを考えていく必要がある。

(2) 暗黙の中に仮定されている「動かし方」の明確化

「動的な見方」の定義では，「点・線・面などを動かしたり，変形したりして思考する」と記述されている。しかし，これをそのままコンピュータに導入しようとしても，あまり役に立たないし，おそらく不可能である。というのは，この概念を用いる生徒は，暗黙の内に，「どう動かすか，どう変形するか」という知識を持っているはずであり，その暗黙の内に了承されている手続きを明確化する必要があるからである。この暗黙の内に仮定されている手続きを明確化することが，定式化における第二の要件である。

実際，数学で重要なのは，その「動かし方」であって，任意の動かし方が同等に重要であるわけではない。幾何学と動的な見方の関係を最も明確に表現しているのはKleinのErlangen Programであるが，これの意味することの1つは，アフィン幾何学ならば，図形に対して，アフィン変換を行っても普遍な性質を調べるのであるから，アフィン変換によって，調べやすい図形に変形しても構わない，ということである。つまり，この場合であれば，「アフィン的に動かす」ことが重要なのである。もちろん，この動かし方はアフィン変換や合同変換などの変換だけに限定されるわけではなく，等積変形や図形の分解など，様々なものを含むと考えるべきであろう。したがって，重要なことは，「任意の動かし方」でなく，ある限定された動かし方を考え，そこに重点化した場合にどのようなことが可能になるかということであると言える。

これらは，「動的な見方」という指導に重点をおいた理論形成においては暗黙の内に仮定されているはずであるが，それらの明確化が，コンピュータでの実現には必要なのである。

2.3 様々な定式化の可能性

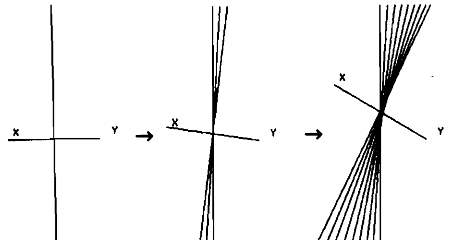
「動的な見方」という概念を包括的に考えると，図形の動かし方にはあらゆる方法が可能であり，しかも，どの方法もそれなりの意味を持っている。しかし，実際には，その動かし方としてどのようなものを考えるかが重要である。それを明確化することが，再定式化のための要件であり，そしてソフトウェアによる支援のための要件である。

しかし，一方で，そのような定式化の仕方は一つとは限らないことも重要な点である。次項で定式化する方法以外のやり方もあるであろう。むしろ，幾何学には様々なアプローチが存在するが，そのそれぞれに応じて異なる意味での「動的な見方」や「動かし方」があると考える方が妥当である。そして，「図形の動的な扱い」の定式化は，そのような様々な「動かし方」の中で，どれを取捨選択するかという問題なのである。[3)]

3. 作図の構成的な性格に基づく「図形の動的な扱い」の定式化

3.1 関数としての作図

まず第一に，作図というのは，一種のn変数関数である。例えば，垂直二等分線の作図を考えてみると，これは，2点X，Yを独立変数とし，従属変数として線分XYの垂直二等分線を対応させる関数である。Xを変化させることによって，垂直二等分線自体も変化する。



図－5　Xを変化に伴う垂直二等分線の変化

そして，普通の関数の場合，

$$f : x \to y$$

において，xが変化するとyも変化するという状況を，xがどう変化するときに，yがどう変化す

るかということで，関数の性質を調べるのに対応して，作図の場合も同様のことが可能である。例えば，外接円を同じように考えると，3点の位置によって外接円の位置が決まるので，

$f：(X_1, X_2, X_3) \rightarrow \triangle X_1X_2X_3$ の外接円

という形で捉えることができる。そして，図形の性質を調べるということは，この関数的な観点から捉えると，作図のもとになっているいくつかの点（初期値あるいは独立変数）を変化させたときに，できる図形（従属変数）がどのように変化するのか，あるいは何が変わらないのかと捉えることができる。

3.2　階層的に構成される関数としての作図

以上のように考えると，ほとんどの作図は関数として捉えることができるのだが，同時に，もう一つのことにも気が付く。例えば，九点円の作図を考えてみると，これは他の図形の作図とは全く関係のない作図ではない。各辺の中点を通る円が九点円であるから，各辺の中点の外接円に等しい。すなわち次のようにいくつかの作図を段階的に積み上げて構成できる。

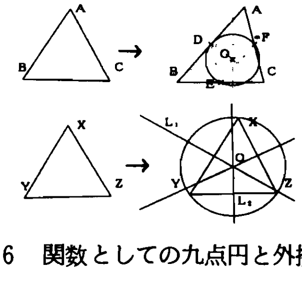
九点円：点A，B，C→円O

作図	元にするもの		構成されるもの
中点：	A, B	→	点D
中点：	B, C	→	点E
中点：	C, A	→	点F
外接円：	D, E, F	→	円O

ただし，

外接円：点X，Y，Z→円O

作図	元にするもの	構成されるもの
垂直二等分線：	点X, Y	→直線L1
垂直二等分線：	点Y, Z	→直線L2
交点：	直線 L_1, L_2	→点O
円：	点O, X	→円O



図－6　関数としての九点円と外接円

このように考えると，作図というものは，基本的な作図がいくつか定義されていると，それらの組み合わせを階層的に構成していくことによって，つまり，基本的な作図の組み合わせだけでなく，一度構成された作図は次の作図では一つの基本的な作図のように使っても構わないという意味で，階層的に構成していくことによって，新しいものを生み出していくことができるものであることが分かるのである。

3.3　図形の動的な扱いの定式化

以上のように作図を捉えると，図形の動的な扱いを，次のように定義できる。すなわち，

図形の動的な扱いとは，作図において，元になる点を動かしたときに，図形の中の何がどう変化するのか，また変化しないのかを調べることを言う。

ここまでの議論をより形式的に，次節に述べておくことにする。

3.4　「図形の動的な扱い」の形式的な定義

定義1　幾何的対象とは，点，直線，線分，半直線，円のいずれかを指す。

定義2　基本作図とは，n個の幾何的対象を元に，ある幾何的対象を構成する手続きを指す。すなわち，

$C：(O_1, O_2, , , O_n)$
n個の幾何的対象
$\rightarrow C(O_1, O_2, , , O_n)$
ある幾何的対象

例1　垂直2等分線：1線分→1直線
外心　：3点　→1点
外接円　：3点　→1円

定義3　作図とは，n個の点を元に，いくつかの基本作図の組み合わせによっていくつかの幾何的対象を構成する手続きをいう。すなわち，

作図 $C = (\{C_i\}, \{P_j\})$

ただし，

$C_i\ ：(C_{i_1}, \cdot\cdot, O_{i_{ni}})$
$\rightarrow$ 幾何的対象$_1$
$(O_{i_1}, \cdot\cdot, O_{i_{ni}}, \ldots.$ はすべて点 P_j
あるいは，C_k ($k \leqq i$) までによって構

成されたもの。)

定義4　図形とは，作図とそれによって構成される幾何的対象とのペア，
$((\{C_i\}, \{P_j\}), \{O_i\})$ をいう。
ここで，O_i は基本作図 C_i によって構成される幾何的対象である。

定義5　図形 $((\{C_i\}, \{P_j\}), \{O_i\})$ において $\{P_j\}$ の位置を変化させたときの幾何的対象 O_i の運動あるいは軌跡を連続的変形という。

定義6　図形の動的な扱いとは，図形 $((\{C_i\}, \{P_j\}), \{O_i\})$ に対して連続的変形を行ったときに，幾何的対象 $\{O_i\}$ に関する性質がどう変化するか，あるいは変化しないかを調べることを言う。

注意1　幾何的対象として捉えるべき内容は，本来，無定義であるべきで，必要があれば削除・追加すればよい。また，Euclid 幾何に限定する必要となく，非Euclid 幾何でも構わない。重要なのは図形を作図として手続きとのペアで考えるべきだということと，そうすれば，動的な扱いいうものが定式化できるということである。

注意2　基本作図として考えられるものについてさえ，それを構成する手続きは1通りとは限らない。例えば，角の2等分には，

3点	→半直線，
(頂点を共有する)	
2半直線	→半直線，
角	→半直線

などがありうる。

注意3　ここでの基本作図という言葉の用法は従来のものとは異なる。作図の基本単位という意味であって，(従来の場合ならば，定規とコンパスに規定されているはずの) 用具の使い方などについてまでは言及していない。しかし，必要があれば，同等になるように定義することも，またより広義，狭義に定義することも可能である。

注意4　そして最後に，このような定式化の重要性は，このように定式化された「図形の動的な扱い」は，基本作図の集合を規定することによって，コンピュータ上で実現でき，児童・生徒が容易に利用することができるようになるということである。

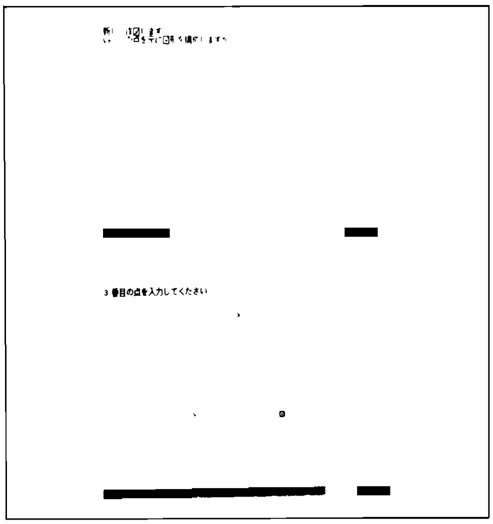
4. ソフトウェアにおける実現とその特徴

図形の動的な扱いを実際に実現するソフトウェアとして，幾何図形作図ソフトウェア"Geometric Constructor"を開発した。これは，主として次のような機能と特徴を持っている。

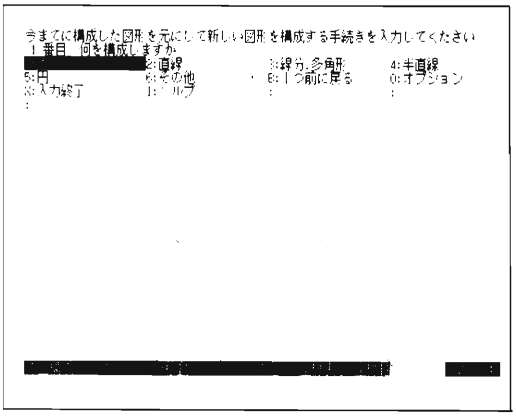
4.1 作図

図形ごとにプログラムが異なるのではなく，ある範囲内での任意の図形を，構成的に作図することが可能である。従って，「図形の動的な扱い」を実行可能な対象がかなり広いため，実質的に，「図形の動的な扱い」がかなり一般的に実現されている。特に，扱う問題を少し変更したいような場合に，このことは重要な点である。特定の図形に対しては可能でも，少し変化した図形には不可能なようでは，動的な見方をコンピュータが支援しているとは言い難いからである。

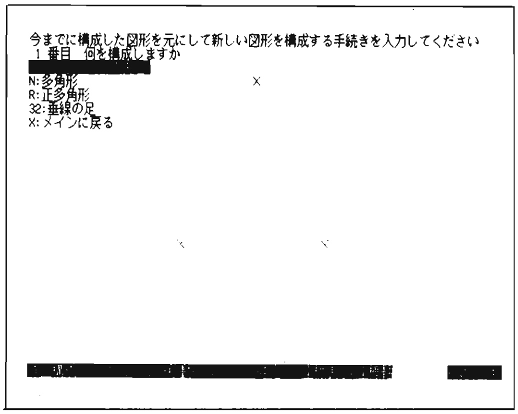
実際の作図においては，「元になるいくつかの点」と「それを元にして構成される幾何的対象」をメニューによって構成できる。その様子は次の図に示す通りである。



図－7　元になる点の入力



図－8　構成する対象の選択



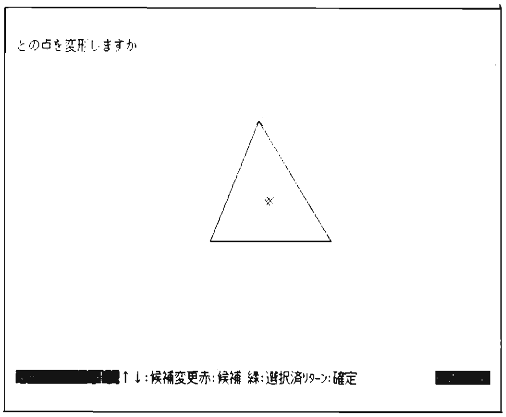
図－9　作図手続きの選択

4.2　連続的変形

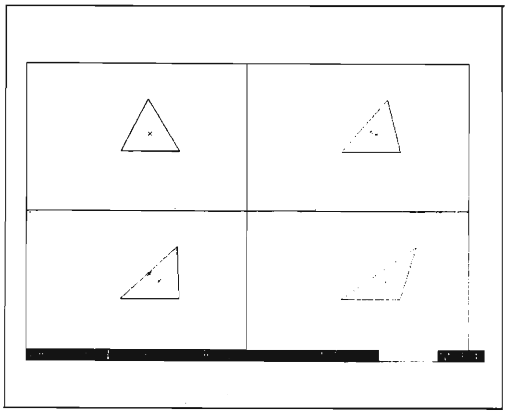
元になっている点を動かすことによって，全体の図形がどう変形されるかを調べることができる。この機能が，図形の動的な扱いをそのまま使うことに相当する。そして，この機能を使うことで，生徒の動的な見方を支援することが，このソフトの最も基本的な目的である。

作図のときに，「元になっている点」を入力し，それを元に，他の対象を構成したが，これは，独立変数と従属変数を入力しているのと同等であり，連続的変形では，この独立変数に相当する「元になっている点」の中のどれかを選択し，それを変化させたときに，全体の図がどのように変形されるかを調べることができる。

次の図では，三角形の頂点を底辺に平行に移動したときに，外心と重心がどのように変化するかを調べる手続きを示している。



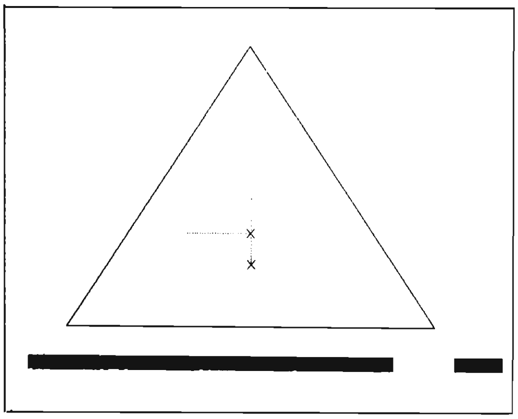
図－10　動かす点を指定



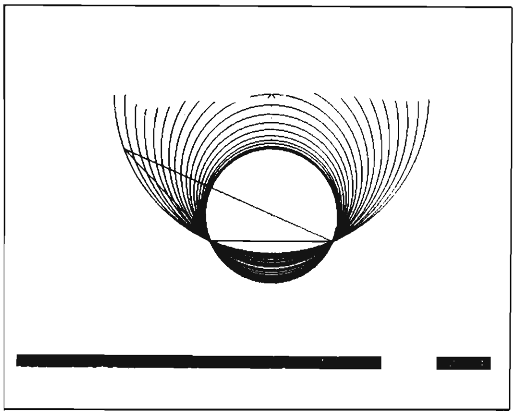
図－11　矢印キーによって上下左右に移動

4.3　軌跡

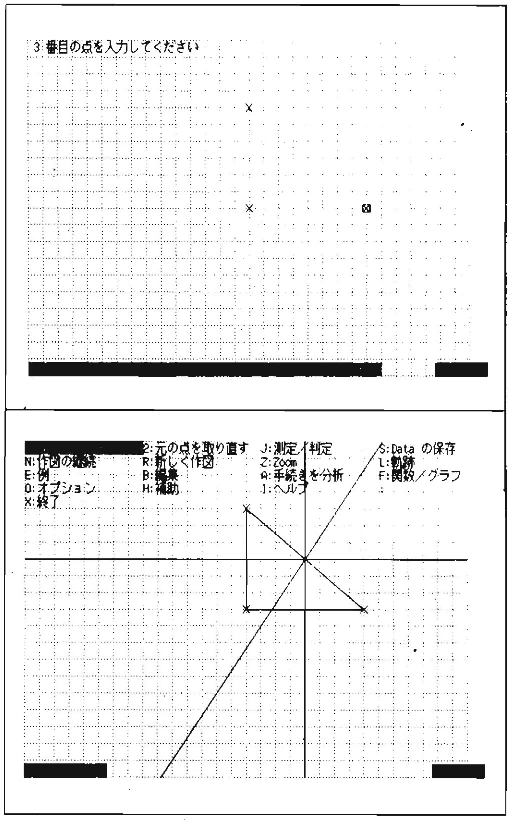
連続的変形の際の幾何的対象の軌跡を描くことができる。軌跡を描くことができるのは，点だけでなく，直線，線分，半直線，円についても可能である。上記の例と同じ連続的変形のときの，外接円の軌跡を次の図で示しておく。



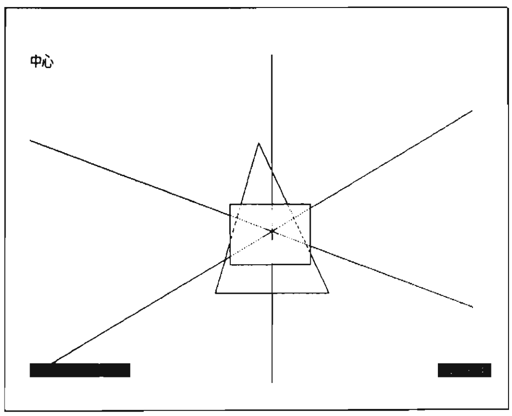
図－12　外心と重心の軌跡



図－13　外心と外接円の軌跡



図－14　点の位置の指定（座標軸利用）と
それに基づく作図



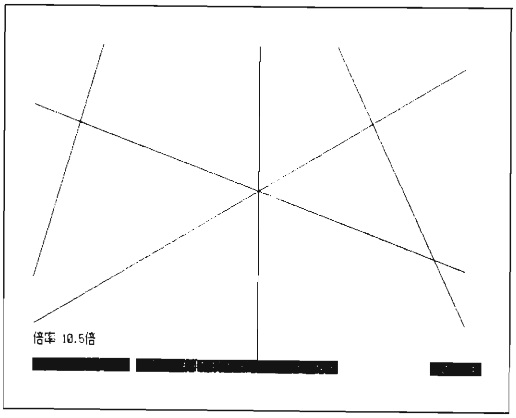
4.4　初期値の変更

元になっている点の位置を入力することによって，全体の図形がどうなるかを調べることができる。

動的な扱いは，連続的変形を使うだけでほぼ十分なのであるが，様々な特殊化をより能動的にしたい場合には，元になる点の位置をそれぞれ入力した方がよい場合もある。例えば，上記の例では，図－14に示すように，直角三角形になる場合について調べる場合などに有効である。

4.5　拡大・縮小

図形の一部の拡大・縮小によって，「３直線が１点で交わっているかどうか」などを調べることができる。

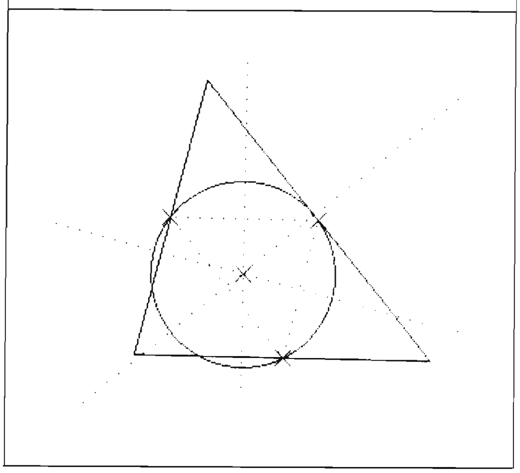


図－15　一部分の拡大

4.6　手続きの分析

作図の手続きを分析できる。次図では，九点円の作図について挙げておく。

手続き	元にするもの		できるもの
線分	点A，点B，	->	線分（1），
線分	点B，点C，	->	線分（2），
線分	点C，点A，	->	線分（3），
内分／外分	点A，点B，	->	点D，
内分／外分	点B，点C，	->	点E，
内分／外分	点A，点C，	->	点F，
外心	開始，	->	
線分	点F，点E，	->	線分（4），
線分	点E，点D，	->	線分（5），
線分	点D，点F，	->	線分（6），
垂直2等分線	線分（4），	->	直線（1），
垂直2等分線	線分（5），	->	直線（2），
垂直2等分線	線分（6），	->	直線（3），
2直線の交点	直線（1），直線（2），	->	点G，
外心	終了，	->	
円	点G，点D，	->	円（1）．



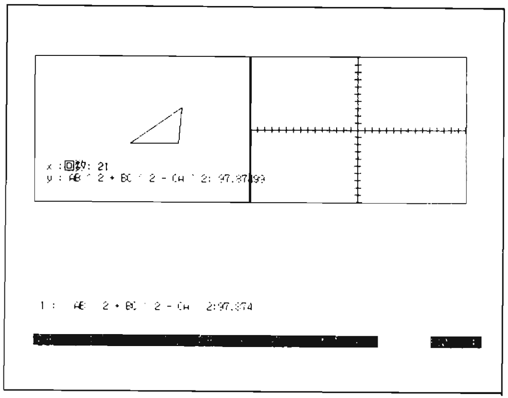
図－16　九点円の作図手続きの分析

4.7　測定・判定

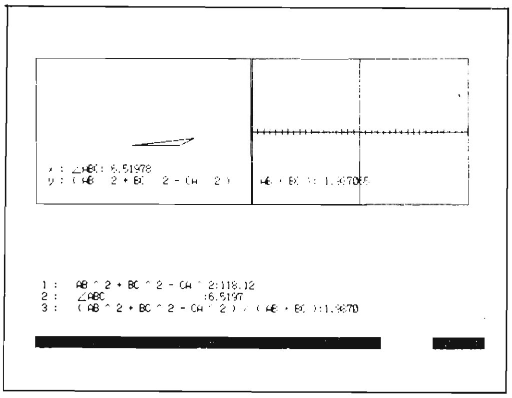
2点間の距離などの測定やそれらを元にした数式の計算，また3角形の合同の判定などができる。

4.8　グラフ

連続的変形をしながら様々な測定をする際に，その中の2変数をグラフ化することができる。ここでは，点Aを動かしたときに$AB^2+BC^2-CA^2$の結果がどうなるか，また
$(AB^2+BC^2-CA^2)/(AB\times BC)$ と$\angle ABC$との関係がどうなるかを示しておく。



図－17　点Aを動かしたときのAの軌跡と$AB^2+BC^2-CA^2$のグラフ表示



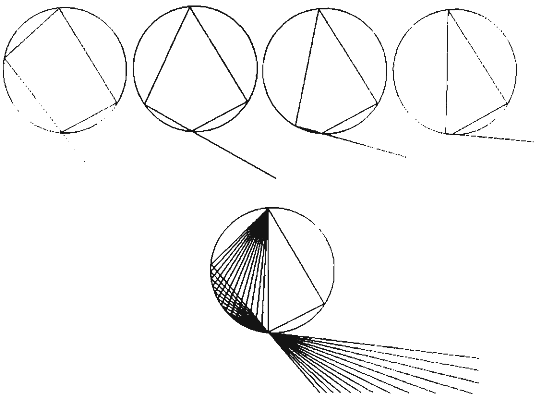
図－18　$(AB^2+BC^2-CA^2)/(AB\cdot BC)$と$\angle ABC$の関係のグラフ表示

5. ソフトウェアの利用例

本章では，様々な例を示すことによって，このソフトウェアの利用法の概略を明らかにする。これらは，これまでは教科書など紙上に示されていたものに動きを伴って提示することや，児童・生徒に探究的な活動を行わせることを可能にする。

5.1 動的な見方に関する教材の提示

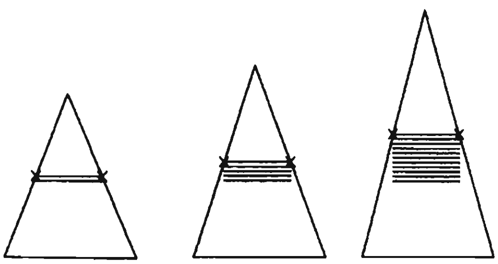
例：接弦定理を円に内接する四角形の角の関係の極限とみる。



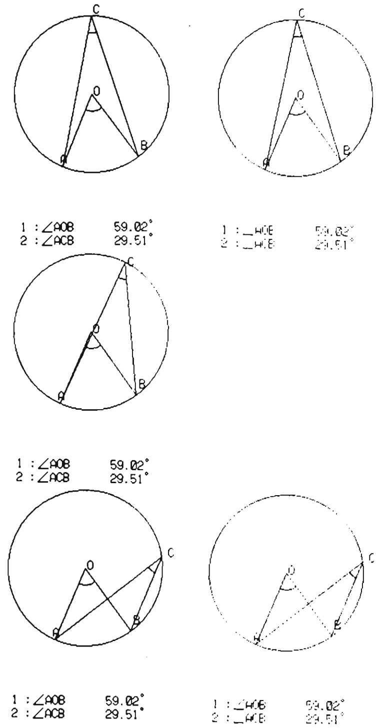
図－19 接弦定理を動的に理解するための提示

5.2 測定による関係の推測と検証

例：中点連結定理，円周角の定理などを測定による事実から推測し，その妥当性を理解する。



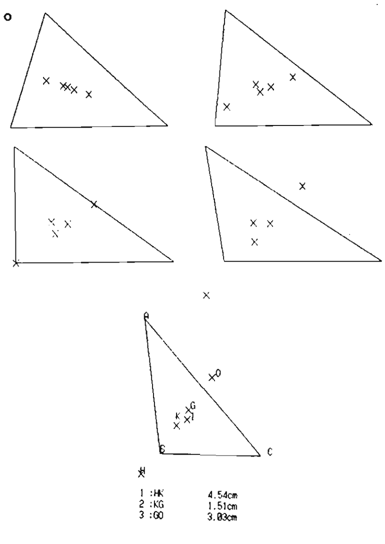
図－20 変形，軌跡による中点連結定理



図－21 変形，測定，補助線による円周角の定理

5.3 変形による関係の推測

例：4心（傍心以外）と九点円の中心を作図し，変形したときに生じる関係（Euler 線など）を推測する。

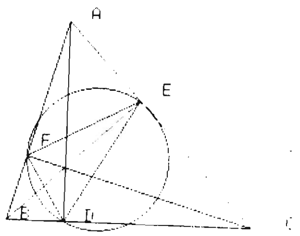


図－22 Euler 線の推測など

5.4　作図

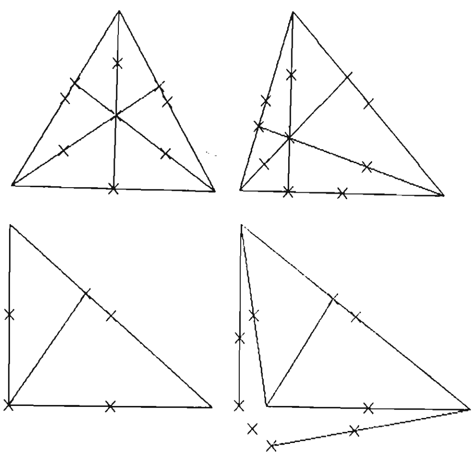
このソフトは，定規とコンパスを使うのと同様に，様々な幾何図形を作図するのに使うことができる。定規とコンパスの場合と異なるのは，技能的な煩雑さは減少し，それまでに作図している対象を元にして何を構成していけばよいかを意識化することが特に重要になる点である。例として，九点円の2通りの作図を挙げておく。

(1)　3辺の中点の外接円　（図－16　参照）
(2)　垂足三角形の外接円



手続き	元にするもの		できるもの
線分	点A，点B，	->	線分（ 1），
線分	点B，点C，	->	線分（ 2），
線分	点C，点A，	->	線分（ 3），
垂線の足	線分（ 2），点A，	->	線分（ 4），点D，
垂線の足	線分（ 3），点B，	->	線分（ 5），点E，
垂線の足	線分（ 1），点C，	->	線分（ 6），点F，
線分	点F，点E，	->	線分（ 7），
線分	点E，点D，	->	線分（ 8），
線分	点D，点F，	->	線分（ 9），
外接円	点F，点E，点D，	->	円（ 1），

図－23　垂足三角形の外接円としての九点円

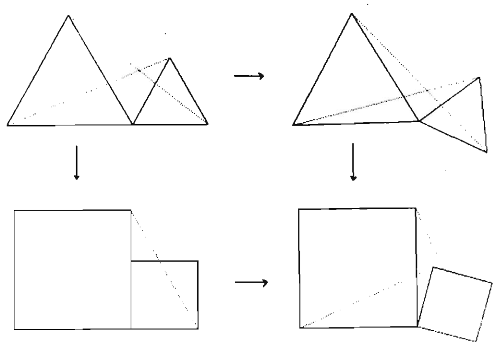


図－24　九点の変化

そして，このようにして構成された図形は，4.2に示したように，連続的な変形をすることによって，図形のもつ特徴を調べることが容易になっている。その例として，九点円が通るはずの九点を作図し，変形していくことによってこれらの九点が円上にあることを推測させる例を図―24に挙げておく。

5.5　与えられた問題の類題作り

例：下図の類題を作る。



図－25　問題の変形

6.　結語

本稿では，動的な見方の理解を支援するにあたり，「動的な見方」という概念を再考し，その再定式化のための要件として，機能的な細分化と，暗黙の内に仮定されている「動かし方」の明確化を挙げた。そして，その要件を満たすものの一つとして，「図形の動的な扱い」を定式化した。本稿では，それを実現したソフトウェアの機能と利用方法の概略を示すにとどまったが，今後，これを使用する場合とそうでない場合では，生徒の思考過程にどのような差異が現れるかを明らかにしていくことが必要である。

〔本稿は，日本数学教育学会第72回総会全国算数・数学教育研究（愛媛）大会における発表原稿を加筆・修正したものである。〕

（1990年12月25日受理）

注

1. 中島健三『算数・数学教育と数学的な考え方』金子書房，1981，p.193

2. 吉田　隆他，「動的な見方を伸ばす指導法」，日本数学教育学会誌，数学教育，Vol.66(1984) pp.78－86
3. 図形の動的な扱いを別の観点から定式化しているものの例としては，Logoがある。Logoとの比較について，以下の付記において述べることにする。

付記：Logoにおける作図とGeometric Constructorにおける作図との基本的相違

作図に関する重要な言語にLogoがあるが，LogoとGeometric Constructorの相違点を述べておく。

(1) 汎用言語ではなく，より限定されたアプリケーションである。

Logoはそれ自体が一つの言語である。その中で，再帰的なプログラミングが可能であり，タートルを使いながら命令を再帰的に構成できる点に特徴があるが，Geometric Constructorでは，そのような，汎用のプログラミングを目指してはいない。

別の観点から述べるなら，Logoにはあまりに自由性があるため，多少慣れないと，それなりのプログラミングをすることが難しい。特に初等幾何的な図形を作図したり，それを動かすためにはある程度の時間を要する。それに対してGeometric Constructorでは，主として初等幾何的な図形に限定して，より容易に，適切な作図あるいは，その動的な扱いを支援することを目的としている。

(2) 動的な図形の捉え方が異なる。

Logoが表現している幾何学はタートル幾何学であり，長さと角度の幾何学である。あるいは，点のベクトル的な移動の幾何学と言うこともできる。換言すれば，Logoで考えられている動的な図形とは，ちょうど，微分方程式の解曲線として曲線を捉えることができることを元にしている。

それに対して，Geometric Constructorにおいては，主として初等幾何における作図が構成的であること，そしてその依存関係を明示すると，ある定数を変数化したときに，全体の図形を動かすことができるという点を基本にしている。そのような意味において，Geometric Constructorは物理的な教具を一般化して実現したものに他ならない。

(3) （タートル＋向き＋長さ）VS.（幾何的対象＋構成）

したがって，利用者が注目すべきもの自体が異なっている。Logoの場合，重要な役割を果たすのはタートルであり，それを自分の動きと同化して，その向きや移動の長さを決めていくという手続きである。それに対してGeometric Constructorにおいては，幾何的対象，つまり図形を構成している要素を，点，直線，線分，半直線，円に分解して，どれがどれによって構成されているのかを明確化することを目的としている。

以上の3つが基本的相違点である。実際の学習においては，小学校段階でLogoの方が使われやすく，中学校の方でGeometric Constructorの方が使われやすいと推測されるが，必ずしも発達段階に応じているわけではない。むしろ，両者が表現しようとしている幾何学的なアプローチが異なる点が重要である。そして，両者それぞれにおいて扱いやすい内容と扱いにくい内容がある。

実際，多角形の外角の和の性質などのLogoの方が扱いやすいし，また動きの単位をより微小化することによって，点の軌跡としての曲線の性質，そしてそれを規定するものとしての微分方程式や差分方程式を扱いやすい。そして，後者に注目させるためには，幼少の時期よりも，むしろ高校生や大学生になってからの方が妥当かもしれない。

また，Geometric Constructorの場合，初等幾何的なものを扱うことは容易であると考えられるが，Logoが表現しようとしている点の軌跡としての曲線が性質などを表現することは難しい。

さらに，両者のみで幾何学における図形に対するアプローチが十分かと言えば，もちろんそんなことはない。簡単な例を挙げれば，位相的な見方はどちらを具現化していないし，カバリエリの原理のようなものでさえ表現できない。すなわち，重要なのは，幾何に対するアプローチが多様であるのに応じて，様々な図形処理の仕方が実現可能であるということ，そして様々なアプローチをさらに明確にして，それぞれのアプローチは，教育の中でどのような活動を支援することができるかを明確にしていくことなのである。