

星型多角形の内角の和の問題における 「証明と論駁」について

愛知教育大学 数学教室 飯 島 康 之

0. 序

数学教育における問題解決に関する研究は、次第に教育実践との関わりを深めつつある。例えば、今回の学習指導要領の改定では、「課題学習」や「思考実験」などが盛り込まれ、それらをいかにして実践するかが大きな課題となっている。このような課題に応えるためには、理論の側で、実践との接点を多く持つ例を提供することが重要である。

しかし、必ずしもそのような例が豊富にあるとは言えない。そこで本稿では、まず、I. Lakatos の「証明と論駁」を取り上げ、その意義をまとめる。そして、学校教育との接点を持ちやすいレベルでのケーススタディの蓄積の必要性を指摘し、星型多角形の内角の和の問題に関して記述する。また、それを基にして、「証明と論駁」に基づく教授におけるアプローチの明確化・細分化と、学習の中で変化すべきものとしての「証明の機能」および「信念」の変化について考察する。

1. I. Lakatos による「証明と論駁」

1.1 Lakatosによって提示された「情況の論理學」

I. Lakatosは、「発見的論理」「情況の論理学」という意味での数学の方法論にアプローチすることを目的として¹⁾、(数学史あるいは、数学の哲学の領域における研究として) 数学史におけるケーススタディを、具体的には、Eulerの多面体定理に関する数学的な展開を、証明と論駁という観点から記述した。

概略的に述べると、定理に対して与えられた証明に対して、様々な反例が示される様子、またそれを受けて、証明を局所的に修正したり、定理の内容から排除したいモンスターをどう排除・調整していったり、定義の在り方を検討したりする様子など、様々な数学的活動を、教師と生徒達の討

議という形式に再構成することによって提示した。

そして、数学的発見—もしくは非形式的数学理論の成長の様式として、次のものを同定した²⁾。

- (1) 原始的推論
- (2) 証明(原子的推測を部分推測、つまり補題に分割する大雑把な思考実験もしくは議論)
- (3) 大局的反例(原始的推測への反例)の出現
- (4) 証明再検討: 大局的反例が「局所的」反例となるような「有罪補題」を見つける。この有罪問題は前には「隠れ」ていたか誤認されていた。今やこれが顕在化され、原始的推測の中に条件として組み込まれる。定理—改良された推測—は新しい証明生成概念を卓絶した新しい特徴として伴い原始的推測を乗り越える。
- (5) 新しく見つけられた補題や新しい証明生成概念が他の定理の証明の中にも出てくるかどうか検討される: この概念は異なる証明の交差するところにも見出され、したがって基本的重要性をもつものとして現れてくる可能性がある。
- (6) 今は論駁された原推測のこれまでの受け入れられていた帰結が点検される。
- (7) 反例が新しい例に転化される。—新しい研究分野が開かれる。

1.2 数学教育における「証明と論駁」の意義

上述のLakatosの「証明と論駁」というダイナミズムは、数学教育にとって大きな意義があることはこれまでも指摘されてきた。ここでは、2つの観点からまとめてみたい。

第一は、認識論的なレベルにおけるものである。知識の可謬性は、教育哲学などにおいてはすでに指摘されてきたことであるが、しかし、数学的知識の可謬性、あるいは誤謬がどのように数学的知

識の発展において機能しているかを明確に定式化したものはほとんどなかったという意味において、数学的知識の可謬性を本格的に扱った最初の研究と位置づけることができるものであろう³⁾。

また、この点はもう一つの示唆をもたらす。つまり、知識の可謬性は、認識論と教育学の接点の中で、重要な部分であることを考えると、一般教育学と数学教育の理論的な接点についてより詳細な考察を進めていくための重要な手掛かりを与えていると理解することができるのである。たとえば、S. Lerman は数学的な知識に関連した認識論的な立場としての Euclidean programme と (Lakatos の立場である) quasi-empirical programme の 2 つが明確な 2 つの立場として同定できることを指摘すると共に、教授に関するパースペクティブとして、知識体としての数学、問題解決を通じた数学という 2 つの見方がそれらに対応するものであることを主張している⁴⁾。また、その中では、Piaget のモデルにおける同化－調節との関連性をも示唆している。

Lerman は「Lakatos 的な (Euclid 的なプログラムに対する) 代案が数学教育への動的で刺激的なアプローチをもたらす、我々の諸々の仕事に関して、完全な再評価を与えるものである」⁵⁾と述べている。この主張の背景には、Lakatos らによって、教育学との関連が深い観点から、数学的知識の認識論の研究が進められてきたことによって、ようやく、教育学における様々な認識論との関連性を吟味できる段階に達してきたことがあると言える。

第二は、数学的な議論に関する基礎理論として使われている点である。これは Lakatos のケーススタディが、教師と生徒達の討議という形式で記述されていることをより直接的に生かす方法である。このような使い方の例を挙げておく。高橋雄一は、数学的 Discussion における数学的活動の様相を、素朴な推測に対する「推測の『確からしさ』を教科する確認と保証の活動」と「推測に対して反駁する活動」によって捉えている⁶⁾。また、田中賢一は、算数的な拮抗状態を捉えるに当たって 4 つのものを捉え、その中の 1 つとして、「それぞれの考えの結果と過程が違いため、互いの考

えの根拠をもとに議論が起こる。類例や反例を出し合いながら批判的に議論することにより、子供の力によって正しい考えが作り出されるように指導する」ものとしてラカトシュ的な拮抗を定義している⁷⁾。

このような議論を扱うモデルは、一般に「どういう点が『数学的』であるか」を明瞭に表現することが難しいことを考えると、Lakatos のモデルは、議論における数学的な様相を明確化するための重要な手掛かりとなっている。

1.3 本稿における研究課題

以上のように、元々教育学にはあまり意識を向けていなかった Lakatos の理論であるが、数学教育学においては、様々な考察をしていくための基礎理論として機能している。その基本的な点は、数学的知識の可謬性をどう捉えるか、また数学的知識の可謬性を教育においてどう積極的に生かしていくかという点であろう。このように考えたときに導かれる基本的な課題と、それに対する本稿での取り組み方を述べる。

第一の点は、学校教育との接点を持ちやすいレベルでのケーススタディの蓄積である。Lakatos 自身、数学史あるいは数学の哲学の研究者であったため、彼の例は数学史からのものであり、現在の教育と照らし合わせると、直接的には大学初年級程度のものである。したがって、その理念は理念として理解できても、小学校・中学校での算数・数学では、どのように、その理念を受容し、実現できるのかという点は、必ずしも明確ではない。例えば、その点は、Lakatos 自身が「証明と論駁」の中で指摘している様々なテーマの中で、数学的 Discussion や算数的な拮抗状態に関する議論において、適切に扱えるものが少ないことから察知されることである。

この点に関して、本稿では、星型多角形の内角の和という、中学校段階で扱える内容に関するケーススタディを行う。

第二に、第一の点から導かれる点として、Lakatos の主張は、一体教授の中でどのような形で生かせるのかという点をより明確化し、細分化する課題も残っていると言える。すなわち、数学の

哲学としてのLakatosの立場は一つであるにしても、そして、著者としての「証明と論駁」の中で展開されている教授スタイルは1つであるにしても、その考えに基づいた教授的なアプローチは必ずしも一つとは限らない。特に、数学的探究の中のどのような過程に注目するか、集団と個人との関係をどのように捉えていくかなどによって、そのアプローチは異なるはずであろう。

この点に関して、本稿では、ケーススタディでの記述を3つの観点から行くと共に、それらから導かれる教授におけるアプローチとして4つのものを挙げる。

第三に、Lakatosの主張を反映した教授＝学習過程を経る中で、生徒のどのような点が変わりうるのかを明確にするという課題が導かれる。特に、Lakatosの理論が、発見の論理学、そしてそれに基づく数学の哲学であるとすれば、それに基づいた教授＝学習を行うことによって、生徒の活動や数学観などがどのように変わるかを明確にする必要がある。

この点に関して、本稿では、探究過程における「証明の機能」の変化と、探究者の「信念」の変化を明確にすることを試みる。

2. 星型多角形の内角の和の問題に関するケーススタディ

2.1 星型多角形の内角の問題の基本的な特徴と考察の観点

まず、問題を提示しておこう。

問題：下の図形の内角の和、
 $a + b + c + d + e$ を求めよ。

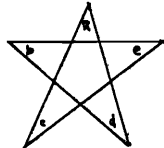


図-1

この問題の第一の特徴は、子どもから多様な解決が出てくることである。ここでの多様という意味は、後でも見るように、異なるアイデアに基づいた解決が可能であること、そしてそれぞれのア

イデアに基づいて異なった一般化が可能だという意味である。筆者自身がそのことを実感したのは、上越教育大学附属中学校の中野敏明先生から、授業の中での子供が見つけたアイデアを記録した「学習メモ」を紹介していただいた時からであるが、折につけ、学部授業なども含めていろいろな場面で提示してみたところ、予想以上に様々な解決がなされる問題であることがわかった。中野先生から示された学習メモからいくつかの例を拾い出すだけでも、次のようなものがある。

①

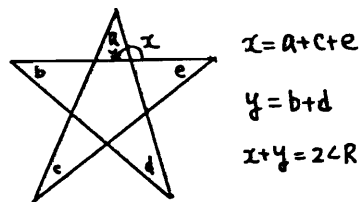


図-2

三角形に注目して角を集めていく。

②

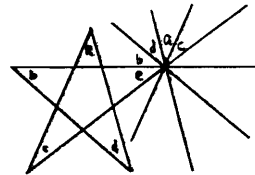


図-3

平行線を引くことによって角を集める。

③

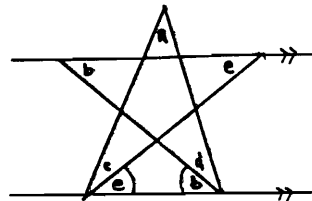


図-4

BE//CDから錯角の性質を使う。

④

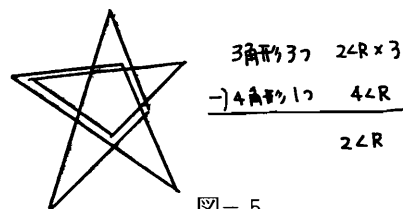


図-5

3つの三角形に分ける。

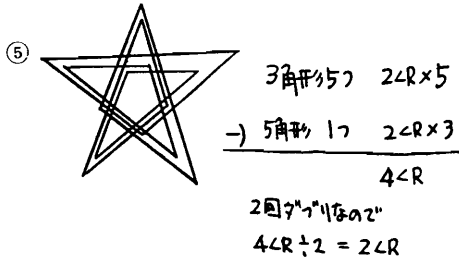


図-6

5つの三角形に分ける。

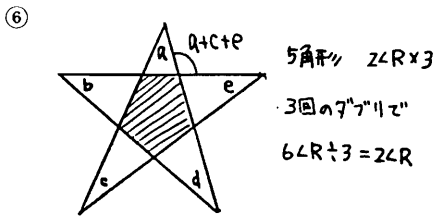


図-7

楔形と5角形の関係に注目。

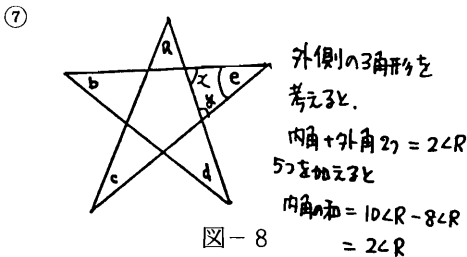


図-8

5角形の外角の和を使う。

第二の特徴は、非形式的なやり方で、アイデアの提示、検討が行いやすい問題だという点である。証明というと、仮定と結論の明確化、そしてその両者を繋ぐという、形式的な証明の印象が強いが、この問題の場合、アイデアを図によって提示することが可能であり、いわば、「Proof without Word」⁸⁾を与えることができるということである。また、ある意味では「非形式的に」アイデアを発表することが可能である。このことは、特に、子供の推測を援助するという点で提示されてしまった場合には、聞いている子供には、「あの子の言ったことを理解する」という活動しか残っていないが、この場合には、「あの子の書いた図は、どういう意味があるのだろう」と考える余地があり、そしてその解釈を発表することで、自分なりの考えを発表する余地も残っている。また、形式的な証明を書くためには、いろいろな困難点があるのだが、アイデアを図で表現することによって、証

明という活動の一番面白い部分を味わうことができるからである。

筆者自身は、この例を、中学校、中学校の先生の勉強会、学部での授業（数学、非数学）、大学院生、自分自身などにおいて、どのような思考過程が生じるかを調べ、検討してみた。以下ではそれらを基にして、教授におけるアプローチを考察するための、次の3つの観点からまとめ、考察することにする。

観点1：多様な解決のそれぞれをいかにして関連づけ、生かしていくか。

観点2：アイデアの限界を調べたり、さらにその限界を越えるにはどうするか。

観点3：より一般の場合についての形式的証明を作ったり、批判的に考察するにはどうするか。

2.2 観点1：多様な解決のそれぞれをいかにして関連づけ、生かしていくか

2.2.1 多様な解決を比較・検討させたり、不備な点を修正させる過程としての「証明と論駁」

子供からいろいろなアイデアが出るということは、アイデアなどの比較・検討などによって授業の展開を組み立てることが可能になる。ここで重要なのは、単に、「いろいろな考えがありましたね」と列挙しておしまいにならないこと、そして誤ったアイデアを「これは間違っています」と簡単に処理してしまわないことである。「証明と論駁」を生かす第一の観点は、この点にある。

2.2.2 「誤り」を批判し、それを乗り越える

まず、後者の誤ったアイデアの生かし方から考えると、「批判をする、反例を作る」こと、そして逆に「批判された推論を修正する」という活動に結び付け、誤ったアイデアを生かしていく点である。これは、Lakatos の様式に基づけば、「大局的な反例が出るような」例、換言すれば、その考察が正しい場合もあるが、正しくない場合もある例をどう生かすかという場合である。例えば、先に示した例の場合、③が相当する。ここでは $BE \parallel CD$ を仮定してしまっている。 $BE \parallel$

CDのときには通用するが、そうでない星型五角形もあるため、一般的な証明ではない。このような、批判をしたり、反例を作ることが、一つの重要な数学的活動である。しかし、同時に、その批判は単なる揚足取りになるべきではなく、それを修正したり、他のアイデアとの関連を見出す「証明」の側の活動がなければいけない。例えば、この③の場合では、図-9のような補助線による修正、「平行でない→交点がある」という修正、別の不変量への着目による修正などが見られた。

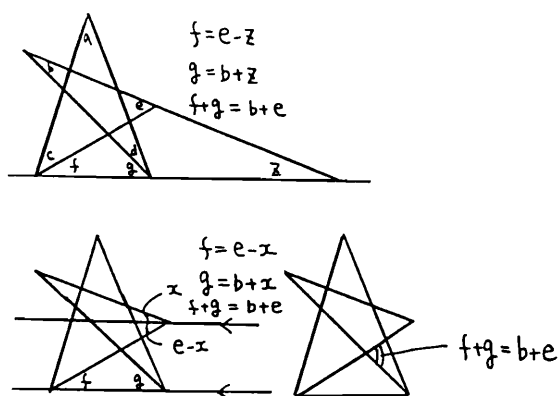


図-9

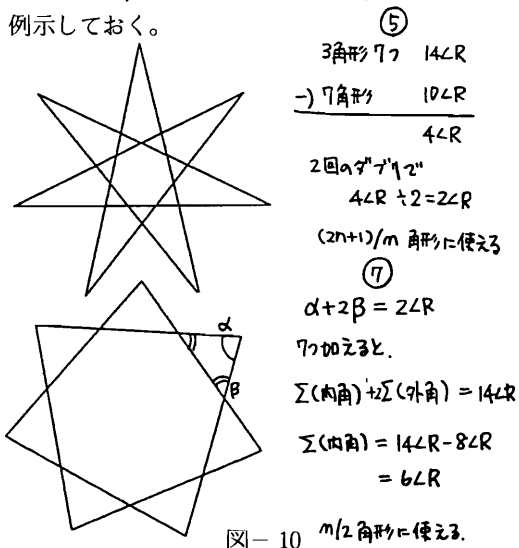
ここで注意しておきたいのは、このような解き方は必ずしも特殊なケースとは言えないことである。実際、上越教育大学附属中学校のある授業では、46人中5人の子供がこのアイデアを使っていた。したがって、子供から自然に出る可能性が高いものであればあるほど、「そのアイデアはおかしい」という扱いではなく、「そのアイデアはすべての場合には使えないけれど、他の場合にも使えるように修正できるはずだ」という扱いが必要になると思われる。

2.2.3 一般化によって、様々なアイデアを比較・検討する機会を拡大する

次に、「元の問題を十分に解決している様々なアイデア」について、どう検討していくかに移ろう。例えば①～⑦は、元の問題を解決するという点ではどれも同じであり、並列的である。実際、「これはA君の意見だから」という個人的な理由と結び付いた評価を加えない人、例えば数学の学

部学生などの場合では、「いろいろある」ということによって興味を引くことは不可能であった。

しかし、元の問題を解決していれば、最速批判の余地はないというわけではない。「他のどんな場合に、それぞれのアイデアは使えるのだろうか」と一般化を行うことによって、新しい批判の余地ができることになるし、またそれによって、それぞれのアイデアの本当の特徴や関連性などが明らかになることが多い。例えば、先に示したアイデアについて、どのような場合に一般化できるかを例示しておく。

図-10 $n/2$ 角形に使える。

この段階で重要なのは、自分自身のアイデアを別の図形にも使ってみることによって、ある種類の図形のときには「どうしてうまくいくのか」、また別の種類の図形のときには「どうしてうまくいかないのか」が明らかになり、そのアイデアが本来持っているはずのよさが明確になる点である。そして、そのことによって、いくつかのアイデアはかなり共通性があることがわかったり、本質的に異なるものであることがわかったりする点である。

2.3 観点2：アイデアが使える限界を調べたり、さらにその限界を越えるにはどうするか

2.3.1 解決を一般化させるべき問題としての内角の和の問題

上述の段階までは、それぞれのアイデアが最初

から持っている特徴を自然なまま引き出すという点で、非常に自然な形のものであり、かなり多くの生徒にとって、十分に可能な活動であろう。おそらく、一斉授業として扱うならば、上述のところまで到達すれば、おそらく十分な扱いをしたことになると思われる。

しかし、問題は最終的に解決しているのかと言えば、決してそうではない。一般の場合の予想はできたとしても、一般の場合を証明できるようなアイデアには到達していないし、出てきたアイデアの大半は、特殊な場合には一般化可能だが、より一般の場合にまで通用するように一般化するには障害が残っている。そして、それを越えたいという要求は、依然として残ったままである。筆者自身がこの観点を反映したのは、学部学生の場合や、中学校の先生方、あるいは自分自身の場合であったが、学校での実現の機会を念頭におくならば、これらの限界を乗り越えようという段階は、おそらく、課題学習のような、より個別化された課題として扱われるべきものであろう。

2.3.2 一般化によって明らかになる、それぞれの解決の特徴とそれぞれの限界、そしてそれを越える過程としての「証明と論駁」

この段階で生じる活動は、アイデアが使える対象の限界を明らかにすること、そしてその限界を何とか解消する方法はないかを検討することである。本稿で扱う事例の場合、最初は星型5角形という個別な図形について解決し、少なくともその解決自体には不十分な点はなかった状況を「一般化」によって論駁も可能な状況に変化させるため、Lakatosが検討した多面体定理の場合とは事情が異なるという指摘もあるかもしれない。

しかし、逆に考えると、多面体定理の場合のように、最初は概念が漠然としていたため、命題の真偽が変化しながら数学的探究が進むというケースは、少なくとも、学校数学の中ではそれほど多くないと言える。したがって、元々ある一定の範囲で成立していたことをより一般的な場合に想定してみて、それがどの程度の場合に通用するかを考察することを契機として、証明と論駁を行っていく活動も、考慮の範囲内に含めた方が妥当であ

ると考える。

2.3.3 ⑤のアイデアの一般化

⑤のアイデアが使える理由を検討すると、下図のように、

- (a) 3角形ができること
- (b) その頂点が中の多角形の頂点と一致していること

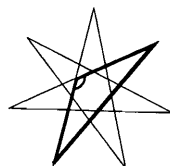


図- 11

からうまくいくことがわかる。この条件は星型5角形の場合だけでなく、 $7/3$ 角形⁹⁾など、 $(2n+1)/n$ 角形の場合はうまくいく。

では、そうでない場合は全く可能性がないのだろうか。たとえば、(a)、(b)両方を満たす場合は $(2n+1)/n$ 角形しかないことは図からもわかるが、せめて片方だけでも満たすような場合はないのだろうか。

すると、たとえば、 $7/2$ 角形の場合、(a)は満たさないが、(b)ならば満たすことに気がつく。

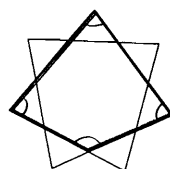


図- 12

星型の内角3つ+7角形の内角1つ $=4\angle R$ という関係ができるから、⑤と同じようにこれを7回繰り返すと、

$$3 \sum (\text{内角}) + 10 \angle R = 28 \angle R \text{ より} \\ \sum (\text{内角}) = 6 \angle R$$

となることがわかる。この場合には修正したらうまくいった。よく見ると、 $(2n+1)/2$ 角形ではすべてうまくいきそうだ。

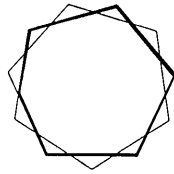


図-13

星型の内角 n 個 + $(2n+1)$ 角形の内角 1 つ
 $= (n-1) \times 2 \angle R$
 を $2n+1$ 回繰り返すと、
 $n \Sigma(\text{内角}) + (2n-1) \times 2 \angle R$
 $= (2n+1)(n-1) \times 2 \angle R$
 $n \Sigma(\text{内角}) = (2n^2 - 3n) \times 2 \angle R$
 $\Sigma(\text{内角}) = (2n - 3) \times 2 \angle R$
 となる。

(a)だけ満たすような場合はうまくいかないだろうか。11/4 角形の場合があった。この場合は(b)がどう変わるかを考えてみると、11/3 角形の内角の和になることが分かった。その結果を使うと求められそうである。

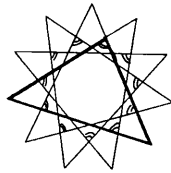


図-14

これだけ修正しても、まだうまくいかない場合もある。例えば、11/3 角形などは(a)、(b)の両方とも満たさない。

ここでは2通りの修正が可能であった。

星型の内角 3 つ + 11/2 角形の内角の 1 つ = $4 \angle R$

星型の内角 2 つ + 11角形の内角 5 つ = $10 \angle R$
 という見方である。

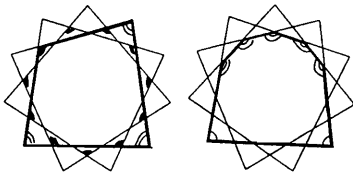


図-15

最後の見方は一般化できそうだ。つまり、星型の内角は2つだけ使うことにすると、 m/n 角形

の場合には、

星型の内角 2 つ + m 角形の内角 $(m-2n)$ 個
 $= (m-2n) \times 2 \angle R$

m 回繰り返して

$2 \Sigma(\text{内角}) + (m-2n)(m-2) \times 2 \angle R$
 $= m(m-2n) 2 \angle R$

$\Sigma(\text{内角}) = (m-2n) \times 4 \angle R$

$\Sigma(\text{内角}) = (m-2n) \times 4 \angle R$

が得られ、より一般の場合にも使えるようにアイデアを修正できる見通しが立った。

2.3.4 ⑦のアイデアの一般化

⑦のアイデアは、内角の多角形のまわりに3角形がついている形になっている場合に使えるアイデアである。従って、 $n/2$ 角形には使えるけれども、それ以外には、そのままは使えない。

うまくいかない例の1つとして、7/3 角形を考えてみる。斜線部の3角形に注目すると、 $\angle a$ がうまく処理できない原因であることがわかる。

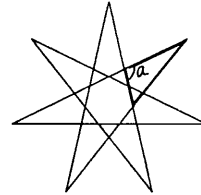


図-16

そこで、 $\angle a$ を何か関係するものに結びつけようと考え、これが三角形の外角になっていることを利用すると、次のような変形・分解ができることに気がついた。

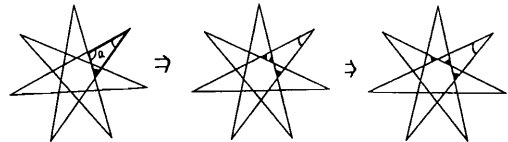


図-17

つまり、

星型内角 1 つ + 7 角形の五角 3 つ = $2 \angle R$

$\Sigma(\text{内角}) + 3 \times 4 \angle R = 7 \times 2 \angle R$

$\Sigma(\text{内角}) = 2 \angle R$

これは他の場合にも、すんなり一般化できそうである。つまり、 m/n 角形の場合に、

$$\begin{aligned} \text{星型内角 } 1 \text{ つ} + m \text{ 角形の外角 } n \text{ 個} &= 2 \angle R \\ (\text{内角}) + n \times 4 \angle R &= m \times 2 \angle R \\ (\text{内角}) &= (2m - 4n) \times 2 \angle R \end{aligned}$$

このアイデア⑦については、別のことに気付いた人もいた。 $\angle b$ に注目すると、このような角を集めれば、 $m/(n-1)$ 角形になっているらしいというのである。もし、それが正しいとすると、

$$\begin{aligned} m/n \text{ 角形の内角の } 1 \text{ つ} + m \text{ 角形の外角の } 1 \text{ つ} \\ = m/(n-1) \text{ 角形の内角 } 1 \text{ つ} \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} m/n \text{ 角形の内角の和} \\ = m/(n-1) \text{ 角形の内角の和} - 4 \angle R \end{aligned}$$

という規則が作れるから、 $m/1$ 角形の内角の和 = m 角形の内角の和 = $(m-2) \times 2 \angle R$ と合わせて、一般の場合について使う見通しが立った。

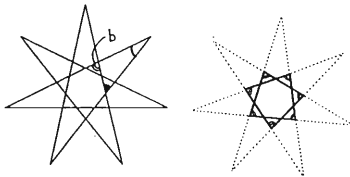


図-18

2.4 観点3：形式的な証明を形成したり、形式的な証明を読み、批判的考察をしながら、より一般化していくこと

2.4.1 形式的な証明を媒介とする過程としての「証明と論駁」

上述までの2つの観点では、主としてこの問題の特徴を生かし、アイデアを図的に表現することによって、自分自身のアイデアについて検討したり、あるいは図的に表現された他者のアイデアについて検討することを考えてきた。しかしながら、観点を広げてみると、他者が書いた形式的な証明を批判的に検討しながら「よむ」という活動や、自分自身で、自分の考えているアイデアを言語によって、形式的に表現するという活動があること、そして高次の数学的活動においては、それはかなり重要な役割を演じていることを無視することはできない。これが第3の観点の背景である。

以下の記述のほとんどは、筆者自身の思考過程

からのものであるが、学校での場面を考えるならば、「readings」として、ある証明を生徒に与え、それを手掛かりに批判・検討させるような場面が想定できるであろう。

2.4.2 ケーススタディ（大野氏の証明をよむ）

さて、前節で扱ったアイデアとその一般化にも、まだ限界はある。というのは、多くのものは、いわば、「正」星型多角形、あるいはそれを少し変形した形、つまり中に m 角形ができるものについてのみ成立するものが多いからである。もっと一般の場合にも量用するようにするためには、中にできる m 角形に依存しない方法を見つけなければならない。

筆者はこの点をクリアするために、2種類の証明を考案（再考案）したが、その後、大野敏雄氏が別の方法で証明を与えていることを発見した。

大野氏のアイデアの中心は、

- (a) m/n 角形の場合、 n 個の頂点を加えることで、 n 個の多角形に分解でき、
- (b) それぞれの接合点での関係を調べるとうまく相殺して最終的に $(m-2n) \times 2 \angle R$ になるというものであった¹⁰⁾。

筆者はこの(a)の部分に感銘し、もっと深く理解してみたくなった。そこで、その仕組みを調べるために、いくつかの場合について具体的に分解してみた。 $7/2$ 角形はすぐにうまくいった。 $7/3$ 角形は最初うまくできなかったが、組織的にきちんとやったらうまく分解することができた。

ところが、 $11/5$ 角形になるとうまくいかない。 $7/3$ 角形のときのようにやり方が悪いせいだろうと考え、他のものを調べ、パターンを見つけようとした。 $11/3$ 、 $11/4$ 、 $13/3$ 、 $13/4$ 、 $15/5$ 角形はうまくいったが、 $13/6$ 角形はうまくいかない。 $(2n+1)/n$ 角形はうまくいかないのだろうかと思うのだが、 $5/2$ 、 $3/5$ 角形はうまくいくのだから、その予想は正しくないようだ。

何回も失敗を重ねていくうちに、「これはできないのではないだろうか」と考えるようになった。それまでの場合、凸多角形 $n-1$ 個、凹多角形 1 個と分けられたので、この方針で分割するのに必要な点と、分解に使える点の数を調べ、比べてみた。

その結果、必要とする点の方が多い場合として、 $11/5$ 、 $13/6$ 、 $17/7$ 、 $17/8$ 角形などが見つかった。やはり $11/5$ 、 $13/6$ 角形は分解できないのである。

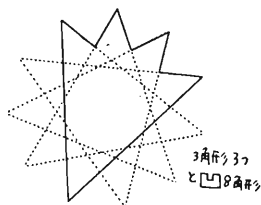


図-19

ここに至って、大野氏の証明の一部「一般に k 回まわって閉じた図形は、 k 個の多角形に分けられる」という論述に対して反例が見つかったことになった。

しかし、この命題自体が誤っているとは言いがたい。例えば、図-20のような分解を考えると、どのような m/n 角形にも成立する。しかし、これは(a)中での「 n 個の頂点を加える」という内容に反するため、この分解方法を使うには、証明を部分的に直す必要がある。

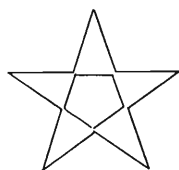


図-20

更に、後になってからのことであるが、この反例の意味は、「凸多角形 $n-1$ 個、凹多角形 1 個に分解」することはできないという意味であることがわかった。つまり、「凹多角形がいくつあっても構わない」と考えると、(a)、(b)を満たす分割も可能なのである¹¹⁾。

しかし、この時点において、私自身は、(a)、(b)を満たす分割は無理ではないかと考え、ここでの問題点を回避し、乗り越えることを考えていた。

偶然、 $7/2$ 角形の場合について3角形と4角形に変形・分解できることに気づいた。よく見ると、この方法を使う学生も時々いる。 $7/2$ の「2」と、3角形+4角形の「2個」は単なる偶然であろうか。

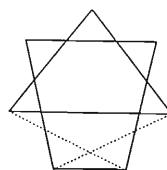


図-21

組織的に調べてみる。すると、結構うまくいくことがわかったので、その原理を考えてみた。すると、すべての場合において \times という交差があるときに解消できること。そして解消できる理由は星型5角形のときのアイデア②の一般化そのものであることがわかった。

このアイデアを生かすと、例えば、 $9/4$ 角形の内角の和は、次のようにして3角形と等しいことがわかった。

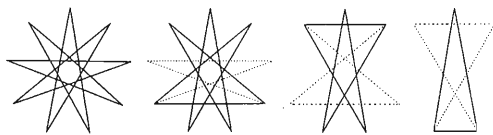


図-22

しかし、これでは大野氏のアイデアの(a)で示される n 個への分解という意味が消えてしまう。そして、 $7/2$ 角形の場合などは確かに2個への分解になるのである。

この変形・分解の仕方をよく調べてみると、次のような仕組みが分かった。つまり、

m/n 角形 $\rightarrow \alpha/1$ 角形 + $(m-\alpha)/(n-1)$ 角形
ただし、 α は $(m+1)/n$ を越えない最大の整数

そして、 $2/1$ 角形の場合も、2角形(内角は0)として考えると、「 m/n 角形の場合には、 n 個の多角形に変形・分解できる」という意味で、大野氏の証明の方針を生かしつつ、分解のみでなく、変形も取り入れているという意味での別証明が得られた。

2.4.3 依然として残る問題

前節では、大野氏の証明を読み、そしてそれに対して反例(実際には反例ではなかったわけだが、探究過程においては反例であった)を作ったり、

その問題点を回避する方法を作る過程を記述したが、今度の場合も、上記のことによって、問題がすべて解決したわけではない。例えば、アイデアがどこまで使えるかという観点から対象を広げてきた結果、「星型多角形」というのはどう定義すべきかということが、非常に難しい問題として残ってしまった。また、大野氏の証明などから、 n 回回ることが本質的であることがわかってきたが、この、「 n 回回る」ということも、それをきちんと定式化することが大きな問題として残ってしまった。Lakatos 自身も引用しているように、「『科学的探究』は『問題に始まり、問題に終わる』」¹²⁾という状況、そして Lakatos 自身の言葉から引用すれば、「しかし初めに、僕は全然問題をもっていなかった。そして、今は持っているものとはといえば問題ばかりです。」¹³⁾という状況が、ここでも登場している¹⁴⁾。

3. 考察

3.1 星型多角形の内包する「証明と論駁」の過程

筆者自身、当初、この問題に対しては、多様な解決が可能な問題の一つとしてしか考えていなかったが、様々な場面での解決過程を分析したり、また自分自身で探究を進めていくことによって、かなり豊富な過程を内包している問題であることが明らかにってきた。

本稿で提示した主なものは、2.2におけるアイデア②とその修正、2.3におけるアイデア⑤と⑦の限界とそれらの修正による一般化、2.4における大野氏の証明を批判的によむ過程とそこで感じた障害を回避するために別証明を作る過程、そしてそれらの一般化によって星型多角形の定義まで問題となってきたことである。しかし、星型多角形の内角の和の問題から生まれる証明と論駁の過程は、これらに限られているわけではない。むしろ、ほんの一例である。

このような側面から考えると、この星型多角形という教材を考えると、角の性質に関する問題という位置づけだけでなく、数学的探究の中で生じる過程を学習する場を提供する教材としての位置づけが可能な教材であることが示唆されてくる。

そしてまた、ここで注意したいのは、一言で「証明と論駁」と言っても、その過程は一律に捉えきれないものではないということである。ある意味ではどの過程も、反例を元に数学的活動を展開していくわけであるが、それを回避するために、反例を排除することもあれば、反例を例の中に取り込むよう方法を修正することもある。一般化が中心となるものもあれば、概念や論述の精緻化が中心となるものもある。

さらに2.4.2において見られるように、厳密な意味では反例ではないのだが、探究者自身にとって「反例」であれば、探究者がそれを分析することによって、反例として機能していることにも注意しておきたい。つまり、それが反例かどうかは、理論的な問題というよりも、探究者自身の判断の問題であり、それを基にどのような活動を展開していくかという問題なのである。

従って、この事例から示唆されることは、「証明と論駁」の過程をより綿密に考察し、教授への応用を考えるには、単に「反例」や「異なるアイデア」が出てくるような事例を探すというだけでなく、それらはどういうことを契機として生じるのか、そしてそれらを契機としてどのような過程が生じるのか、ということについて吟味することが可能なケーススタディを蓄積することである。そして、それらを基にして、様々な事例を適切に記述し、教授への利用が可能な枠組みを作ることである。

3.2 「証明と論駁」に基づく教授におけるアプローチ

次に、教育実践との関わりから、本稿で扱った事例について考える。まず、第一に、次のことが指摘できる。すなわち、3.1で述べたように「証明と論駁」の過程の中にも、様々な差異があるが、教育で「証明と論駁」を実践しようとする際には、いくつかのアプローチの仕方が段階的に考えられる点である。

Lakatos の理論は、一つの理論であり、形式的な数学に対峙すべきものとしての理論構築がなされているため、「証明と論駁」に対して、一貫した一つの態度で望んでいる。そして記述の中で取

られている教授スタイルも1つである。しかし、Lakatosの理論をいかに教授の中で生かしていくかを考えると、必ずしも一つのアプローチの仕方のみが導かれるとは思えない。

たとえば、本稿では、2章において、教授へのアプローチを考察するための3つの観点に基づいて考察してきたが、それらは次のようにより明確なアプローチとしてまとめることができよう。なお、観点1は、分かりやすいように2つに分割するため、A～Dの4つとしてまとめる。

A：誤答に反例を挙げ、それを修正する

このアプローチの主な狙いは、誤答としてそのまま処理されやすいものを、より積極的に集団学習の中で生かしていこうとするものである。

B：解決の方法を比較・検討したり関連性を考察する

ここでは、それぞれの考えの良さや関連性を、集団思考の利点を生かす形で扱っていこうとするものである。2.2.3ではさらに、そのような差異、関連性を考察するための手掛かりとして、どのような一般化ができるかというアイデアを付与している。

C：一般化において生じる反例を乗り越える

ここでは、はじめの問題－解決の状態のままでは生じないはずの反例及び、それに基づく(3)～(7)の過程を導くために、一般化を利用する点に主な狙いがある。

D：形式的な証明を批判的に読んだり、自分で形式的な証明を作る

ここでは、批判という観点から数学的証明を読んだり、書いたりすることを主眼としている。

また、ここで注意しておきたいのは、A、Bは主として集団思考の良さを引きだそうとするものであるのに対して、C、Dになると、その活動は、集団による思考というよりも、個人の思考を深めるためのもの、つまり個人的な活動の充実へと移るという点であり、個人と集団との関係は、共に問題状況を共有したあとは、各自で探究を深め、その探究成果を報告したりそれを聞いたりするというものになるという点である。

このように、本稿の枠組みの中からも4つのアプローチが固定できるが、しかしその4つで網羅

できると考えるべきではないであろう。むしろ、連続的に考えられる、様々なアプローチの中の4つとして考えられるべきと思われる。表1では、上記で考察した4つのアプローチなどをまとめておいた。

3.3 「証明と論駁」の段階に対応する「証明の機能」と信念の変化

3.1で、証明と論駁の過程の中にも、様々なものがあることを指摘したが、それに関連すべきものとして、証明の機能の変化と、いくつかの信念の変化について考察する。

Schoenfeld は、「学生の問題解決パフォーマンスを綿密に分析してみると、彼らの多くは数学に関する大きな誤解をしていることが明らかになった」¹⁵⁾と述べ、例えば、作図題において、うまく解決できないときに「正確な作図」にこだわる特徴などを明確化し、分析を行っている¹⁶⁾。

この概念を用いると、特にここでのケーススタディに関連することの中から2つのことが明らかになる。

第一は、「数学では答えは1つ」という信念を生徒が持っていることが多いこと、また、多様な解決をさせようすると、生徒は、「表面的に異なるものをたくさん作ろう」と、いわば「多く作ることが美德」のように振る舞い、作れは作るほど貧しいものしか作らないことがある。これらを信念として捉えようとすると、このような信念は学習過程の中でどう獲得され、また変革されるのかということが一つの問題となる点である。

第二は、Lakatosは「批判、反例、帰結、真理、証明といった概念は不可分である。それらが変わる時、第一の変化は批判の概念に起こり、他のものが続く」¹⁷⁾と述べているが、実際、筆者自身、あるいは学部生の探究過程を見ていると、どのような活動を行っているかに応じて、そこで持っている信念などが変化しているという点である。

例えば、数学の問題や解法は発展するものであることを知っているはずの学部生でも、内角の和の問題を与えただけでは、「いろいろな解決を試みよう」と指示したとしても、一つの答えを得れば、最早新しいものを見つけようとか、それを

批判的に扱おうなどということは考えない。しかし、一般化してみたり、反例を探す過程を経ることによって、その場で使う信念が変化していく。そして、証明が果たす機能が、最初は、単に「正答と同じかどうかをチェックするもの」から、深化・発展していくのである。表2では、筆者自身が探究を進めていくとき、あるいは学部生の探究の場合の中で見受けられた変化をまとめておく。

以上の点から、次のことが示唆される。すなわち、「証明と論駁」へのアプローチを複数のアプローチによって段階的に捉えていくとしたら、それに対応して変化すべきものとして、証明の機能や信念が考えられる点である。そして、生徒にあまり理解されていない証明の機能や、数学に対する誤解としての信念が根強いことに対しては、それに対応した活動が不足、あるいは欠如していることにも原因があるのではないかという点、そしてそのような活動には、おそらく段階が想定できるのではないかという点である。

4. 結語

本稿においては、Lakatos の「証明と論駁」に関する数学教育での課題を次の3つの点によって捉えた。

- a：学校教育との接点を持ちやすいレベルでのケーススタディの蓄積
- b：教授におけるアプローチの明確化・細分化
- c：Lakatos の主張を反映した教授＝学習過程を経る中で、生徒の何が変化するかを明確にすること

そして、本稿ではそれらに対応して、次のことを行った。

- a：星型多角形の内角の和の問題に関するケーススタディを行い、3つの観点から記述した。
- b：3つの観点をより明確化したものとして、4つのアプローチを挙げるとともに、それらはより多くのアプローチと共に、連続的なものと見なすべきであることを指摘した。
- c：筆者自身および学部学生の探究過程の中で見出された、「証明の機能」の変化と、「信念」の変化を明確化すると共に、それら

が生徒の学習においても変化すべきものと考えられることを指摘した。

本稿では、一つの問題に関するケーススタディを行ったわけであるが、このようなケーススタディはまだ少なく、さらに蓄積していく必要がある。そして、星型多角形の内角の和の問題で同定できた証明と論駁の過程や「証明の機能」の変化、あるいは信念の変化が、他の問題の場合においてはどのように見い出せるかを明らかにする必要がある。そして、本稿で指摘したアプローチを、より多くの問題場面において使えるアプローチとして確立するために、必要となる教授上の工夫、あるいは教材開発における工夫などについて明確にしていくことは、今後の課題として残されている。

表1 「証明と論駁」に対応する一連の学習過程

活動の内容	活動の特徴	個人と集団の関わり	Lakatos のモデルとの関わりなど
同じ問題を同じ方法で解決する	画一的・機械的	共に練習する	
同じ問題を多様な方法で解決する	↑	↑	
誤っているアイデアに反例を挙げたり、それを修正したりする			誤りとして生じたものを(3)、(4)の過程として生かす
解決の方法を比較・検討したり関連性を考察する	集団的・討論的	練り合い	(5)を中心に行う
アイデアの限界を越えてより一般的なアイデアに結びつける	↓	↓	一般化によって、(3)–(7)を生む契機を積極的に作る
形式的な証明を批判的に読んだり、自分で形式的な証明を作る	個別的・探究的	研究成果を報告しあう	形式的な証明に対して(3)–(7)を行う

表2 「証明と論駁」の段階に対応する「証明の機能」と信念

活動の内容	証明の機能	予想される信念の例
同じ問題を同じ方法で解決する	一致させるべき模範解答	先生の答えと一致させることが大切 数学では答えは一つ 違う証明を作ってしまうと面倒
同じ問題を多様な方法で解決する	いろいろあることを列挙すべきもの	一つくらい、自分なりのものが作れるかもしれない たくさん見つけるのが美德
誤っているアイデアに反例を挙げたり、それを修正したりする	ミスを見つけ、修正すべきもの	反例があるかもしれない 反例が出てでも放棄せず修正しよう
解決の方法を比較・検討したり、関連性を考察する	類似性・関連性を見出すべきもの	見た目が異なれば違う 意外な関連性があるかもしれない
アイデアの限界を越えてより一般的なアイデアに結びつける	限界を見つけ、乗り越えるべき課題を見つけるもと	工夫したら乗り越えられるかもしれない
形式的な証明を批判的に読んだり、自分で形式的な証明を作る	新しい証明・問題を作るもと	他でも使えるアイデアがあるかもしれない 一見よさそうでも、実は間違っているかもしれない 別の観点から新しい問題にできるかもしれない

(1989年12月25日受理)

注

1. Lakatos, I. 「数学的発見の論理－証明と論駁－」佐々木力訳、共立出版、1980、p. 3
2. Ibid. pp. 154 - 155
3. 「最初」という表現には語弊があるかもしれない。例えば、Piaget は論理・数学的認識に関して、矛盾と均衡化などについても研究を行っているからである。したがって、ここで

いう「最初」というのは、数学者あるいは、数学の哲学に係わる立場の研究者の中でと限定した意味においてと言える。

また、教育学において、知識の可謬性に関する議論は、例えば
Dewey, "Logic: The Theory of Inquiry", 1938
などに見出せる。

4. Lerman, S. "Problem-solving or knowledge-centered: the influence of philosophy on mathematics teaching", Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., 14 (1983), pp. 59-66
5. Ibid. p. 65
6. 高橋雄一「数学的Discussionとその構造」, 数学教育学論究, 49・50 (1988), pp. 31 - 33
7. 田中賢一「算数的な拮抗状態を生かす指導」, 数学教育学論究, 52 (1989), pp. 32 - 34
8. Proof without Word とは、文字通り言葉を使わずに、図を示すことだけによって与える証明である。Mathematical Magazine 誌に様々な例が継続して掲載されている。
9. 本当は、星型5角形の一般化として何を考えるかということは、それ自体、重要な問題なのであるが、様々な文献の中では m/n 角形、あるいは $\{m/n\}$ という表現が一般的なので、ここでもその表記に従って記述を進める。すなわち、

円周上を m 等分し、それらを n 個おきに結んでできる図形を m/n 角形という。

しかし、実際にはこの意味での m/n 角形の内角の和ならば、すべての角が等しいことから、ほとんど問題にならず、それらを含め、多少一般化したものを想定していることになる。

実際の場面においては、それらに代表される形全般を指して、 $[m, n]$ 型という表現を行った。

10. 大野敏雄「教材研究の一例－星型の一般化と解法について」, 日本数学教育学会誌, 51 (1969), no. 9, pp. 160 - 166

また、数学の専門の雑誌（例えばAnnals of Math.）でも、論文の訂正などが時々行われていることも、活発に「証明と論駁」がなされていることを示す一つの証拠であることを付記しておく。

11. この時点で、 $11/5$ 角形などは、「一般に k 回まわって閉じた図形は、 k 個の多角形に分けられる」ことへの反例ではないことがわかったが、同時に明らかになったのは、この命題は、厳密にはその手続きを与え、証明すべき対象であることが示唆されたことになる。つまり、「 n 回まわる」ということを、どう捉えたときには、どういう手続きによって処理できるかは、（特に回転の向きが戻る場合なども考慮すると）「自明」なことではないからである。

例えば、この点を回避した記述としては次のものがある。

「星の子の形の頂点の個数が n で、 k 個の多角形が重なっているとみられるとき、頂角の和は次の公式で与えられる。

$$(2n - 4k) \angle R \text{ つまり } 2(n - 2k) \angle R$$

菊池兵一「特殊化と一般化」研究会誌（日数教千葉大会記念集），13・14（1989），pp. 4 - 13

12. Popper, K. R. "Science: Problems, Aims, Responsibilities"
13. Lakatos, Ibid., p. 128
14. 星型多角形の概念の一般化については、前出の大野氏の論文や菊池氏の論文、また、拙稿「 $[m, n]$ 型の星型多角形の内角の和について」数学教育研究，上越教育大学数学教室，4（1989），pp. 40 - 44 を参照のこと
15. Schoenfeld, A. H. "Mathematical Problem Solving", Academic Press, 1985, p. 13

また、Schoenfeld 自身は、信念 (belief), あるいは信念体系 (belief systems) について次のように述べている。

「信念体系とは、ある人の数学的な世界観であり、数学や数学的な課題にアプローチしていくときに持っている観点である。数学に

関する信念は、問題へのアプローチを決定し、どのテクニックを使うかを決定し、また問題に対してどれくらい長く、どれくらい一生懸命にがんばるかなども決定する。信念は、リソース、ヒューリスティックス、そしてコントロールが機能するための文脈を形成するのである。」(p. 45)

16. Ibid., pp. 145 - 186
17. Lakatos, Ibid., p. 128 n