イプシロン　2015.Vol.57, 17 − 27

作図ツールを用いた九点円の指導に向けて
−12/11 の山中実践に向けた教材研究−

愛知教育大学数学教育講座　**飯　島　康　之**

0. はじめに

GC 活用研究会での公開授業は, 1,2 月に実施することが多い。ところが今年は 12 月 11 日に実施することになった。今年の授業者である山中先生は, 素材として九点円を選択した。このイプシロンが配布される 12 月 12 日は授業日の次の日なので, 実際の授業はどうだったかをご報告できる日に該当する。もちろん, 授業実施までに授業の構想は変化していく余地もあるけれども, 実践の前にどのような教材研究を行ったかの概略を示す記録として本稿をまとめておきたい。

1. 九点円とは

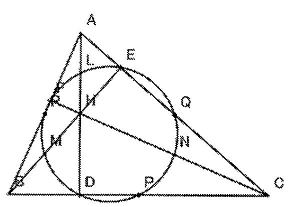
1.1 出発点

この素材に注目した山中先生の思いは, どのあたりにあったのだろうか。GC 活用研究会も今年で 13 回目(附属名古屋中学校での実施は 10 回目, なお九州で実施している GC 活用研究会も 5 回を数えた)を迎え,「かなりやりつくされていますね」というのは山中先生の言葉(同じ素材でもいろいろな展開があるので, 私はやりつくしたとは感じていない)。「ちょっとチャレンジだけれども, 数学らしさに引かれて九点円にこだわりたい」とその言葉が続いた。

私は個人的に九点円にはいろいろな思いがあったので, 即座に「おもしろい素材」と感じ, 山中先生と「これでいこう」と合意した(もちろん, 山中先生には, 附属名古屋中数学科での検討会で同僚を説得するというハードルは残っていたのだが)。

まず, 九点円とはどういうものかを簡単に触れておこう。

定理：△ABC に対して, A,B,C から対辺に下ろした垂線の足を D,E,F とし, BC,CA, AB の中点をそれぞれ,P,Q,R とする。△ABC の垂心を H とするとき, AH,BH,CH の中点をそれぞれ L,M,N とするとき, 9 つの点 P,Q,R,D,E,F,L,M,N は同一円周上にある。(これを△ABC の九点円と呼ぶ)



図−1 九点円

1.2 大学院生時代の思い出

この素材にかかわってもっとも印象的だったのは, 私が筑波大学の大学院生(5 年一貫の博士課

程の3年生)のとき，筑波大学附属中学校に非常勤講師として週1日伺ったのだが，当時の附属中には吉田稔先生(元信州大学)，相馬一彦先生(現北海道教育大学旭川校)がいらして，毎週いろいろな雑談をさせていただく中で多くのことを学ばせていただいた。その折，吉田先生からいただいた「学習意欲論の試み - 九点円の指導をめぐって - 」という論文(おそらく，附属中の研究紀要論文。その後，加筆修正され,「九点円の指導をめぐって」というタイトルで日本数学教育学会誌に掲載されている。)に,九点円を教材とした一連の授業(昭和57年1月14日から3月5日までの12時間)が詳述されていた。この実践は，吉田先生にとっても思い出深い会心の実践であったようで，「こういう実践をまたやりたい」というお話をいろいろな機会に伺った。当時の私は九点円という言葉も知らなかった。一方，吉田先生も「九点円の指導をめぐって」の中で引用されているが，1981年2月の数学セミナーの特集「幾何よ，よみがえれ」の中で，矢野健太郎は東南アジア数学会の折に,「私が何の気なしに9点円というと，そこにいた東南アジアの数学教育者のほとんど全部が，『プロフェサー・ヤノ，私たちはその9点円というのを中学校で習いましたよ。しかし今の中学では9点円までは教えません。したがって若い先生は9点円と言われても意味がわからないかもしれません。日本ではどうですか』ときかれて，先進国?の数学者としてはちょっと返答に困ったことがあった。私はこの九点円のこともぜひ本稿に入れたいと思ったのであるが，もう紙数がつきてしまったので..(略)」という記述を目にして，自分自身は幾何教育を研究しようとしているのに，九点円のことを知らないままの大学院生であることを恥ずかしく思いつつも，当時の幾何教育の枠組みの中で九点円がうまく位置づくだろうかとも思った。高校入試前の時期に，附属中だからこそ可能だった実践なのかもしれないとも思いつつ，いつか別の形で実践可能性を探ってみたいとも思った。

1.3 学部生と「定規とコンパス」で取り組んだ九点円

上越教育大学に職を得て，その気持ちをすぐに実践に生かすチャンスがきた。初等幾何学演習という授業を担当したので，矢野健太郎の「幾何の有名な定理」という本を選択し，まず冒頭の九点円にチャレンジした。矢野氏が冒頭に九点円を選んだのは，おそらく，前述の数学セミナーにつづった気持ちを形にしたからに違いないという思いで。

証明を読むのと並行して行ったのは，「九点円ってどういう円なのかを実感するために，いろいろな場合について九点円はどうなるのかを調べよう」と，定規・コンパスで学部生と一緒に作図した。これが結構手間がかかる。三角形の3辺の中点を取り，3頂点から垂線の足を下ろし，それらの交点として垂心を作り，垂心と頂点との中点をとる。この9点が円状になっているかどうかを観察し，そしてそれらを通る円を作図するために，さらに2点の中点を作図し,... ということをするうちに，紙上には数多くのコンパスでの描画跡が残り，きれいに書かないと一点で交わるはずのところがずれてしまう。最初の三角形の形を適切にしておかないと，中点と垂線の足がほぼ重なってしまったりする。特別な場合だけを観察して，九点円の全体像を実感できるともかぎらない。合計何枚の九点円の図を，どれだけの時間をかけて作図し，あるいはし直したことだったろうか。

1.4 GC の最初のターゲットとしての九点円

その思いがあったので，GC の開発に取りかかったといっても過言ではない。特に九点円の場合,3 点を基にきまる「外心」という概念があれば，与えられた 3 点に対して, 3 辺の中点をとり，それらの 3 中点に対する「外心」として構成可能という，手続きを階層的に構成することで実現可能な手続きという特別な意味も持っていて，ソフトの設計の仕方を考察する上でも示唆的な素材でもあった。上記の授業での経験や，それを基にどうソフトを設計したか，また九点円に関してどういう数学的探究が可能になったのかに関しては，飯島(1990)に記述してある。

1.5 九点円にかかわる山中実践の制約

吉田実践は 12 時間にも及ぶ。同じことを今回チャレンジできるはずもない。使える時間は 1 時間あるいは 2 時間だが，山中先生は 1 時間を選択した(つまり, GC 活用研究会では, 2 時間目にあるクラスで実践し, 3 時間目で協議をし，その協議にもとづいて 4 時間目に別のクラスで改良実践を行って，5 時間目に協議するというスタイルを選択した)。単に発展的な証明問題として扱うならば, 1 時間で扱うこともできるだろう。しかし, iPad を配布し, GC を使って予想・発見・検証などの数学的活動と連携しながら行えるはずの授業とはなにかを模索するところに，この研究授業のねらいがある。証明を考える部分を軸としながらも, GC の利用を前提とすることで，授業の中での生徒の数学的活動をどう変えることが可能なのか，それをふまえて発問や図そしてワークシートなどもどう変えることが可能なのか。そういう教材研究が始まった。

2. 九点円の証明に関連して

2.1 九点円の証明

この授業の中で証明を扱わないわけにはいかない。想定されるのは，次の証明である。

□RMNQ について,

AR=RB, AQ=QC より, RQ//BC, RQ=(1/2)BC

HM=MB, HN=NC より, MN//BC, MN=(1/2)BC

よって, RQ=MN, RQ//MN なので，□RMNQ は平行四辺形

一方 BR=RA, BM=MH なので,RM/=AH (AD)

しかも, BC⊥AD なので, RM⊥BC つまり, RM ⊥MN

よって，□RMNQ は長方形。

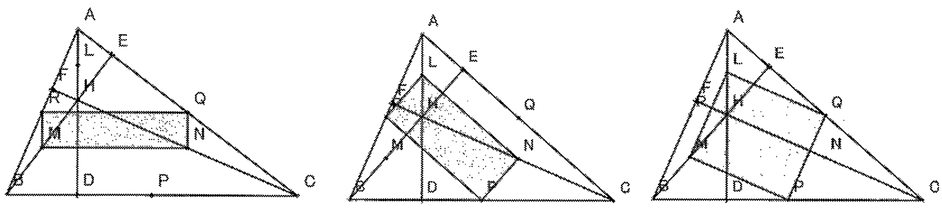
長方形は対角線の長さが等しく，互いに他を二等分するので，対角線 RN の中点を K とすると,

MK = NK = RK = QK

同様に□LRPN と□LMPQ も長方形になるので,

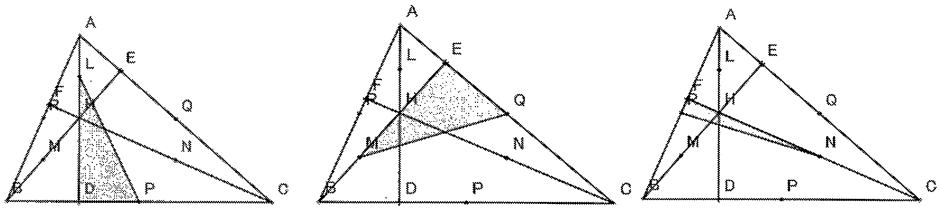
LK=MK = NK =PK= RK = QK

となり, L,M,N,P,Q,R の 6 点は K を中心とする円上にあることがわかる。



図–2 三つの長方形

一方，AD は BC に下ろした垂線なので，△LDP は直角三角形であり，円周角の定理の逆から，LP を直径とする円周上に点 D があることが分かる。同様に，△MEG，△RFN が直角三角形であることから，E,F は MG, RN を直径とする円周上にあることが分かるが，LP,MG,RN は K を中点として等しい長さなので，共通の円の直径であり，上記の 6 点と D,E,F の 9 点は同一円周上にあることが分かる。



図–3 三つの直角三角形

2.2 九点円の証明への手がかり

おそらく，山中実践では 9 つの点を与え，「それらが同一円周上にあることを証明せよ」と問題を提示するのが基本であろうが，生徒の数学的活動を想定し，紙を使った指導を支援するためのワークシート作成や，GC 上で操作させるための図の作成，また生徒の思考の様子を把握したり，行き詰まっているときの支援の在り方などを考えたりする上でも，証明に到達するための手がかりなどを分析することが必要になる。

最初に分かるのは，証明を考える上で，各頂点と垂心との中点 L,M,N が重要な役割を果たすことである。辺の中点や垂線の足だけでは証明を完結することはできない。

次に，9 点を基に構成される図形や関係性として，注目に値するものとして，形としては，長方形，直角三角形，構成要素としては，直角，関係性としては，平行性，直交性，(線分の長さの)相等性がある。また，証明のターゲットが「円」であることから，円を同定するために必要なものとして，中心，半径，直径などを想起し，円上にあることを示すための定義や性質として，中心からの等距離性，円周角の相等性などに注目し，観察すべきものを焦点化することも重要である。おそらく，これらを発見するには，紙の上に書かれた図形に対して補助線を追加したり，定規等で測ったりすることが適切と思われる。

一方，ワークシートとして最も一般的な状況が分かる図を与えるという方法もあるが，通常一般的な図と思って作図しても，その中での関係性が判断しにくい場合もある。たとえば，図-4 の左の図では，三角形の内部にある二つの四角形は両方とも長方形にみえるし，AD も RQ も垂心 H を通っているようにみえる。正しくない命題を正しいと勘違いして証明に取り組むと不毛な時間を費やしてしまうが，「多くの場合で成り立つかどうか」の妥当性を検証するために，頂点 A を少し動かしてみるだけで，図-4 の右のような図を観察することができるので，不適切な命題を排除したり，正しい命題の妥当性を認識したりするために GC を使う可能性があるといえよう。

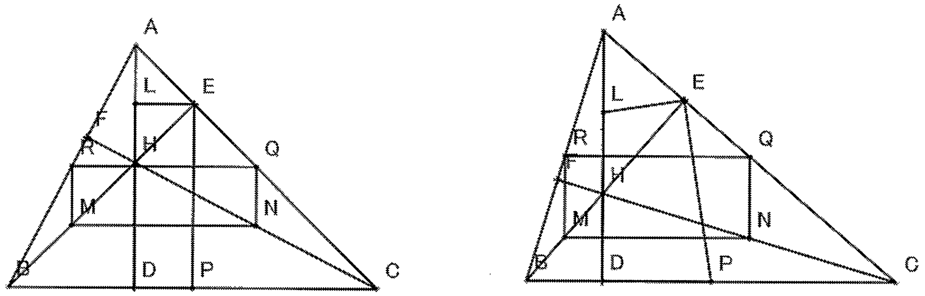


図-4 仮説の検証

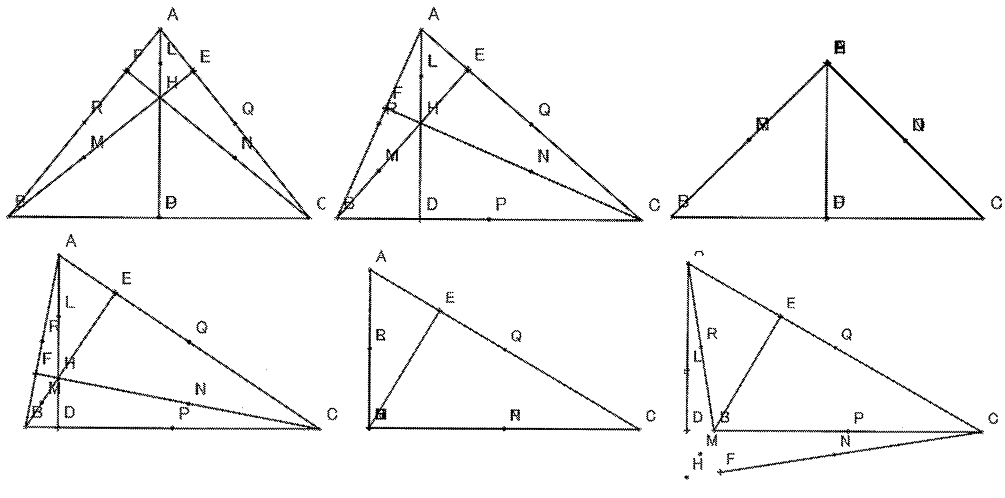


図-5 いろいろな場合の観察

作図のスキルがある生徒が取り組む場合，図-4 のように，多角形を書き込んだ図を動かして調べることも考えられるが，今回の実践の中ではもともと生徒はそれほどソフトの機能に習熟しているわけではないし，ソフトで多角形を追加するところなどにあまり時間をかけたくない。しかし，活動の冒頭や途中で四角形が追加された図を配布するのもあまり適切とは思えない。とすると，3 つの垂線の足と 6 つの点が書かれている図を動かし，その上にマーカーで図形を書き込んで

は消したり，重ねたTPシートに書いたり，あるいは念頭で考えることを求める方が適切といえるだろう。

3. 九点円を考える必然性

3.1 「9つもの点を通る」円の数学的価値

2点が決まれば直線がきまる。いつも特定の3点が一直線上にならんでいること(共線性)は定理に値する。同様に,3点が決まれば，それらを通る円がきまる。特定の4点が円上にならんでいることは定理に値する。それなのに，九点円の場合9つもの特定の点が一つの円上にあるのだから，これは驚くべきことだ。おそらく山中先生が九点円に注目する一つの理由はこの点にあるだろう。

実際，証明をしてみると，頂点と垂心の中点L,M,Nは単に「中点」だから注目されるのではなく，円の直径にかかわる重要な点であり，証明に不可欠な点であることをふまえると，3つの中点と3つの垂線の足を通る「6点円」という扱いでは適切でなく，この3点を加えた「9点」円であることも実感できる。しかし，これらは学んだ後で実感できることであり，学びはじめる段階で,なぜこれらの9点に注目するのかという点に関して，中学生にとっての学びの連続性からみた必然性が授業構成には必要といえる。

3.2 事前に扱うべきものとしての垂心

九点円を扱う上で必要な概念の中で，既習事項と思われる主なものが，中点連結定理，円周角の定理(とその逆)，三角形の外接円，長方形の(対角線の)性質である。そして，通常のカリキュラムでは習っていないので，事前に学ぶ必要があるものが，垂心である。「3頂点から対辺に垂線の足を下ろしたとき，これらの3直線は一点で交わり，それを垂心という」と説明し,GCなどで現象から説明する方法もありうるが，山中実践の生徒たちはそれでは満足しないと思われる。

若干トリッキーであるが，垂心の証明を簡単に扱えるのは次の方法である。

垂心の証明

△ABCに対して，次の手続きで△DEFをつくる。

まず,BCに平行でAを通る直線L1を引く。

同様に,CAに平行でBを通る直線L2,ABに平行でCを通る直線L3を引く。

L2とL3，L3とL1，L1とL2の交点をそれぞれD,E,Fとし，これらを結んで△DEFとする。

△DEFの3つの線分に対して垂直二等分線を引くと，これらは一点で交わり，△DEFの外心になる。

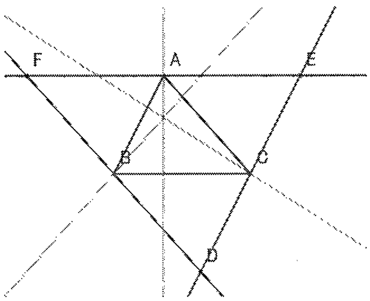


図-6 △DEFの外心が△ABCの垂心

一方，これらの垂直二等分線は，それぞれ，△ABCにおいて，3つの頂点から対辺に下ろした垂線になっている。そのため，これらの3つの垂線の足は一点で交わることになる。

3.3 垂心の図を出発点として構成する九点円

垂心の図，つまり△ABC に 3 つの垂線の足とその交点としての垂心 H が書かれている図が既習ならば，垂線の足を結んだ△DEF の外接円について考えることを出発点にすることができる。

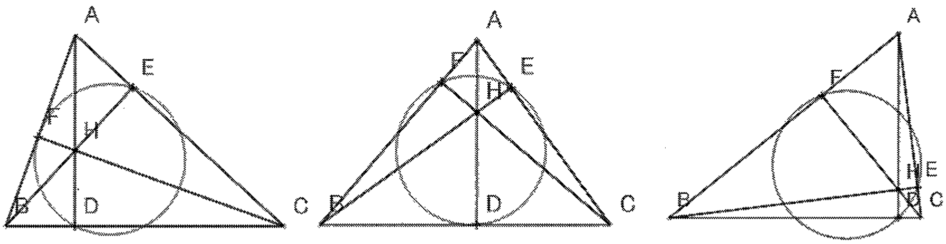


図-7 点 A を左右に動かしても BC の中点を通る

垂線の足の 3 点以外に，どのような特徴的な点を通るだろうという問いをすることになる。頂点 A を動かしたときの様子を図-7 に示しているが，BC との交点は定点であり，BC の中点になりそうということは多くの生徒が推測するのではないだろうか。AB,AC の中点もそれに準じて見いだすだろう。垂線の足との交点が，D,E,F 以外に 3 点ある。これらは A を動かしたときにはすべて動いてしまうのだが，辺の中点が上記で見いだされたのに応じて，学級の中で少なくとも数人は気づくのではないかと思われる。

この推測，つまり△DEF の外接円を描くと，9 つの点(垂線の足，辺の中点，頂点と垂心の中点)を通るように思われるが，本当にそうかどうかを今日の問題としたい，というのが，垂線の図からの出発点になるだろう。

3.4 垂心に関する証明の図を出発点として構成する九点円

垂心の定義や証明を既習とする場合，3 辺の中点 P,Q,R の外接円を出発点とすることも考えられる。垂心の証明において，△ABC に対してその外部に△DEF をつくり，△DEF の外心として構成したものが，△ABC の垂心として構成されるという論法であった。その図と似た図であるが，今度は△ABC に対して，3 辺の中点 P,Q,R をとり，それらを結んで△PQR をつくる。この△PQR の外接円について注目したいという提示の仕方である。

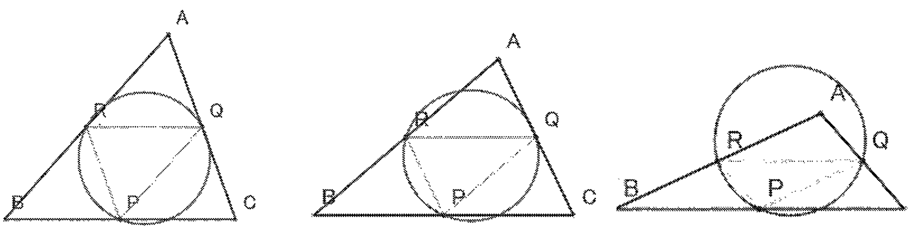
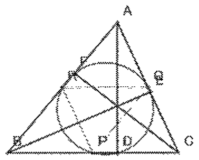


図-8 点 A を上下に動かすと BC 上の定点を通る

さきほどの図では，点Aをどのように動かしてもBC上の中点を通過したのと比べるとこちらの

図では不変要素は発見しにくい。だが，点 A を BC に対して垂直に動かせば BC 上の定点を通ることなどに注目すると，A から BC に下ろした垂線の足を通っていることに気づくであろう。頂点と垂心の中点に関して，図-8 からの発見は難しいが，垂線の足を通っているのではないかという指摘を受け，それを確認するために，3 つの垂線の足を追加した図(図-9)を作り，さらにその図について観察すれば，垂線と円との交点が垂心との中点になっていることを見いだすことも可能であろう。



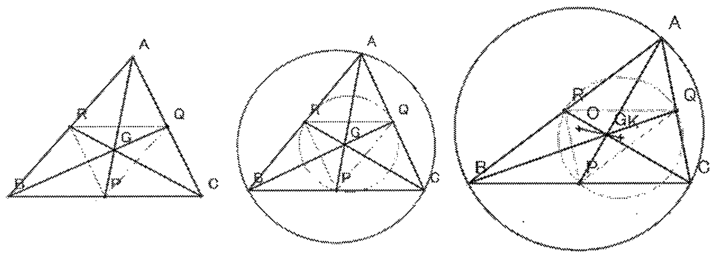


図-9 垂線の足の追加　　**図-10 △ABC と△DEF およびその外接円の相似**

また，垂足三角形の外接円の場合とは異なる点が一つある。△ABC と△PQR は相似だが，図-10 左のように対応する点を結ぶことで相似の中心として重心が見つかる。三角形が相似であることから，図-10 中のように，外接円も相似であることと，その相似比が 2:1 になることがわかる。つまり，△ABC の九点円の大きさは外接円の半分となる理由の手がかりが内在している図ということができる。実際,図-10 右のように，外心と九点円の中心を結ぶと，重心を通ることも確認できる。

4. 模擬授業による検証と考察

4.1 大学生を対象とした模擬授業

研究会当日は,2 学級で研究授業を実施する。2 時間目に一つ目の学級で実施し,3 時間目に改良の可能性を協議し，それを参考に授業者の山中先生は二つ目の学級で授業をし，最終的な協議会を行う。もちろん，その前に二つの通常学級と,15 人程度の帰国子女学級での実践を行い，その手応えをふまえて当日に備える。しかし，通常それ以前に，私が学部や大学院のゼミで検討したり，40 人程度の学部の授業の中で模擬授業を行い，その手応えを授業者に伝え，授業設計の参考にしていただくことが多い。今年は最初の模擬授業を 10/22 に実施した(2 年生，数学科教育 CII)。

多くの学生が，垂心の存在は知っていても，その証明には必ずしも接していないことをふまえて，末尾の二つのワークシートを配布して行った。

(1) 垂心の証明の理解

ワークシートで作図手続きを明示していたので，短時間でクリアできると思っていたのだが，意外に時間を要した。

(2) 九点円の証明

ワークシートに図を書き込み，「長方形を見つけよ」と明示したためか，学生の活動はかなり円滑に進んだ。そして，必要とされる定理が，中点連結定理，円周角の定理の逆，長方形の対角線の性質と，基本的なものの組み合わせであったせいか，証明にはかなり円滑に取り組むことができた。最初に指名した学生が，長方形であることとその対角線の長さが等しいことを証明し，そのような長方形が 3 つあることから, 6 つの点が同一円周上にあることを証明した。そして，別の学生が，他の 3 つの点に関しても直角三角形を示して，直径に対する円周角が直角であることから，円上にのることを証明した。

4.2 模擬授業から得られた検討課題

(1) 垂心の証明は附属中の生徒にとってはどの程度困難な課題なのか

多少トリッキーな証明とはいえ，大学生にとっては簡単に理解できると思っていた垂心の証明は思っていた以上に時間がかかった。名古屋中学校での実践でも，垂心は前時に扱うことが必要になるが, 1 時間を要すると考えるべきなのか, 10 分程度で簡単に扱うくらいで適切なのか。山中先生にご検討いただく課題となった。

(2)「長方形を見つけよ」と明示すべきか

無条件で九点円の証明に取り組ませるのは難しいと判断し，証明にかかわって，最も注目してほしい「長方形」という言葉を明示した。その言葉を手がかりに容易に解決したことは，中学生も「長方形」を明示されれば容易に解決してくれることを示唆するものではあるけれど，より発見的な活動を生徒にゆだねるならば，別の問いの選択肢を検討してみる必要がある。特に大学生は一人ひとりで問題に取り組んだが，研究授業では 4 人グループで考えることが想定されるから，活発な言語活動をしながら，長方形を発見していくことが望まれる。

(3) 図形の静的な分析が中心で, GC を使った動的な探究を生かす場所が少なかった。

証明を考える上で，補助線を書き込む等の静的な図形の分析が必要と考え,ワークシート上に代表的な図をかき，配布した。「長方形」という指示もあったため，この問題を解決する上では，GC を使って動的な探究をする必要性はほとんどなかった。(2)の「長方形を見つけよ」への代替の問いを検討するのと同時に，動的な探究をどう生かすかを検討することが望まれる。

(4) 垂心から九点円へのつなぎ方

垂心について解決したのに続き，3 点を通る円を書き込み，「この円は実は 9 つの点を通る。どういう点だろう」と提示して，プロジェクタに投影された図を動かしながら観察したところ，3 辺の中点は学生からの発言があったが，頂点と垂心の中点という発言はなかったので，こちらから，「実はここは頂点と垂心の中点です」と語り，「これらの 9 点に今日は注目したい」とワークシートを配布した。よりよい方法があるかどうかという点も，検討課題の一つである。

5. おわりに

本稿では山中実践に向けて，つまり，作図ツールを利用した九点円の指導を 1 時間の中で行う授業を想定して，教材研究を行った。吉田実践のように 12 時間を想定するところまではいかなく

ても，数時間を想定し，生徒が主体的に問題を発見・発展させていくプロセスを学習の中心として位置づけるならば，またちがった授業設計も可能であろうし，より深い教材研究も必要になってくる。まずは，山中実践がどのような形に仕上がっていくかを楽しみにしたい。

引用・参考文献

飯島康之(1990)，作図の構成的な性格と computer による支援について：九点円の作図に関する数学的探究に焦点を当てて，数学教育研究，上越教育大学数学教室，5, 35-46

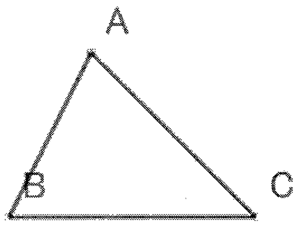
矢野健太郎(1981) 幾何の有名な定理，共立出版

矢野健太郎(1981) 幾何のおもしろさ，数学セミナー,20(2),日本評論社,20-25

吉田稔(1986) 九点円の指導をめぐって，日本数学教育学会誌，68(7), 174-186

付録：大学生対象の模擬授業でのワークシートの概略

ワークシート１：垂心の証明に関して

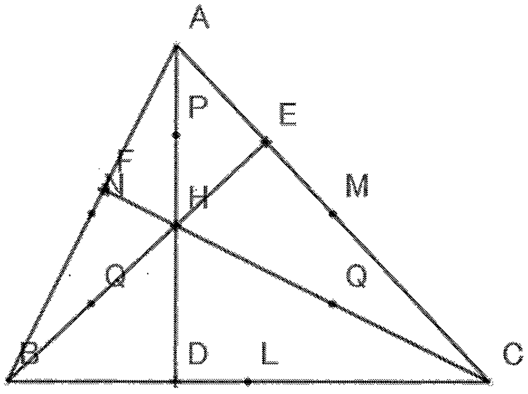


(1) 上の図に，次の手順で直線等を追加せよ。

1. A を通り BC に平行な直線 l1 をひけ。
2. B を通り CA に平行な直線 l2 をひけ。
3. C を通り AB に平行な直線 l3 をひけ。
4. l2,l3 の交点を D とせよ。
5. l3,l1 の交点を E とせよ。
6. l1,l2 の交点を F とせよ。
7. △DEF の外心 O をつくれ。

(2) 上記を手がかりに，三角形の 3 頂点から対辺におろした垂線は一点で交わることを証明せよ。

ワークシート２： 九点円に関して



⑴ 上の図の中に，「長方形」を見つけよ。

⑵ それが長方形になることを証明せよ。

⑶ 9 つの点が同一円周上にあることを証明せよ。