

問題解決的な授業における数学的表現の使用と その修正：考え方の説明における図の場合

愛知教育大学 山田 篤史

1. はじめに

平成20年の算数科学習指導要領改訂以降、算数・数学教育でも「表現力の育成」が注目を浴びるようになってきた。しかし、我が国の算数・数学指導に普及している問題解決的な指導の文脈で「表現」に着目する場合には、幾つか注意も必要になる。例えば、自力解決の場面で自発的な表現を促した場合、学習者は最初から定型的・規約的表現や数学的構造を反映した表現を構成できないのが普通であるため、それを授業の中で修正・洗練させつつ問題解決を進展させていくような指導プロセスが重要になる(山田,2013)、といった指摘などはその典型であろう。

ところが、そうした指摘は、低学年から線分図に類する定型的・規約的表現を明示的に指導しようとする我が国の算数教科書の使用を前提とした場合には、そして学習指導要領に示される内容を問題解決的な文脈で指導しようとする「方法型の問題解決指導」(石田,1987)を前提とした場合には、問題意識となりにくいものとなる。例えば、小学校低学年における加減の意味や関係に関わる指導では、文章題解決の文脈で、ブロック等による直接的なモデリングやそれらの操作的表現、帯図やテープ図、さらには線分図等々の表現を使って指導されることがあるが、自力解決の際の思考の道具として機能させたいその種の表現(例えば「線分図」など)は、予め用意されてしまっているのが通常であるため、実際の指導では、そのかき方・使い方、あるいは当該表現への数値の当てはめ方などの方に注意が向けられがちになるからである。

このように、児童に使わせたい表現を予め絞り込んでおくような指導がとられる場合、児童は、思考に沿った表現を工夫するという傾向よりは、予め与えられた表現に思考を合わせるような傾向をとるようになるかもしれない。この種の傾向は、悪いものではないかもしれないが(例えば、当該表現が特定の数学的構造をよく反映しており、実際特定の問題群の解決に使用される事を通じて、特定の数学的概念の形成等に寄与するものであるから)、指導に当たっては十分な注意と配慮も必要となる。例えば、特定の表現の使用が暗黙的な前提となっている場合、子どもたちはその(事実上与えられている)表現をどのように使うのか、さらには、どのように自らの思考に沿うようにその表現を修正しうるのか、等々についての知見を踏まえて指導を検討する必要があると思われるのである。

本稿は、上記のような問題意識を背景にしており、筆者が観察した小学校1年生の「加減の意味」指導のある授業場面、特に、問題解決的な授業ではよく見かける、自らの考えを説明する場面で使用される表現に関わって、幾つかの指導への示唆を引き出すことを目的とするものである。

より具体的には、児童が特定の表現（自ら選んでいるのだが、それでも使用される表現は比較的絞られてしまっているように見える表現）を通じて自身の考えを説明する場面で観察された、「当該表現の使われ方」と「ある児童のその表現の使い方に合わせた表現の修正の仕方」について検討し、その議論を踏まえた指導への示唆について議論してみたい。

2. 考え方の説明における2つの表現とその使われ方

(1) 授業のスケッチとそこで取り上げられた説明における2つの表現

平成26年6月、筆者はある小学校の研究会に参加し、小学校1年生の授業（減法の導入単元の授業）を観察する機会を得た。その授業で取り上げられた問題は、「運動場で、9人の子どもが遊んでいます。そのうち、男の子は、3人です。女の子は、何人いるでしょう。」というものであり、減法の意味（求残・求補）とその式表現の指導では普通に上げられる類のものであった。授業は、「問題把握」「めあての確認」「解決に対する方法の見通し」と、問題解決的な授業でよく採用される段階を経由し、見通しの段階から自然に「自力解決」の段階へと入っていった。

この授業の注目すべきポイントの1つは、解決に対する見通しを立てる段階で、児童に様々な考えるための手立てを発言させていた点であった。ここで児童は、「数図ブロック」「おはじき」「数図カード」「○図（まる図）」「□図（四面図）」といった解決で利用できそうな表現的手段を挙げており、自力解決の段階では、これらの表現を使う児童が殆どであった。これらの表現は、ここまでの指導でも使われていたようであり、その意味でも、児童にとっては、その使用が前提になっているようなものとして機能していた可能性があった。

その後、しばらくの自力解決の後、黒板に「① 数図ブロックを使って考えた」と「② ○図と□図と△図を使う」という2つの見通しに基づく児童の解決方法が取り上げられ、それら2つの考え方に関する「話し合い」の中で、その式表現や問題の答えが確認され、「まとめ」へと繋がっていった。

自力解決を経た後の「発表」段階で黒板に取り上げられた2つの考えに対する児童の説明は、最終的には下の図1のような板書として残った。なお、この図1(a)の四角は、実際には数図ブロックであり、黒板でも具体的なブロックの操作で説明がなされた。また、図1の中の文字に関して、明朝体は児童の筆記、ゴシック体は教師が児童とのやり取りの中で加えた追記である（例えば、図1(a)の「うごかして／おとこのことおんなのこ...」の部分や「さいしょ 9にん」の部分など）。図1を見れば分かるように、図1(a)の考えは、具体的なブロックの時系列的な操作的表現として示されており、図1(b)の考えは、3つの量の関係だけを抽象して捉えた図的表現（図的表現の中でも、ある種の「構造図」）として示されている（「操作的表現」「図的表現」「構造図」については、中原(1995)を参照のこと）。

これらの説明に伴う2つの表現は、具体的なブロック操作を伴う操作的表現とそこでの操作の系列を捨象した抽象的な図的表現という著しいコントラストをなすものであり、この2人の児童の考えを黒板に取り上げクラスで議論できたこと、両者とも（答えを出すための）式は「 $9-3$

＝6」で表すことができることを確認できたのは、この授業の素晴らしい点であった。説明における表現の指導という観点から見れば、この授業の話し合いの場面は、ある意味では、1つの問題から生成される2つの考え方を説明する別の表現(図1の(a)と(b))が最終的には1つの式表現で表されることの認識(そしてその意味での減法の意味の認識)、更には、児童にとっては(ブロック操作などによって)既に分かっている答え「3(人)」を媒介にした「図1の(a)と(b)の互換性の認識」までは進行していたと見てよいだろう。

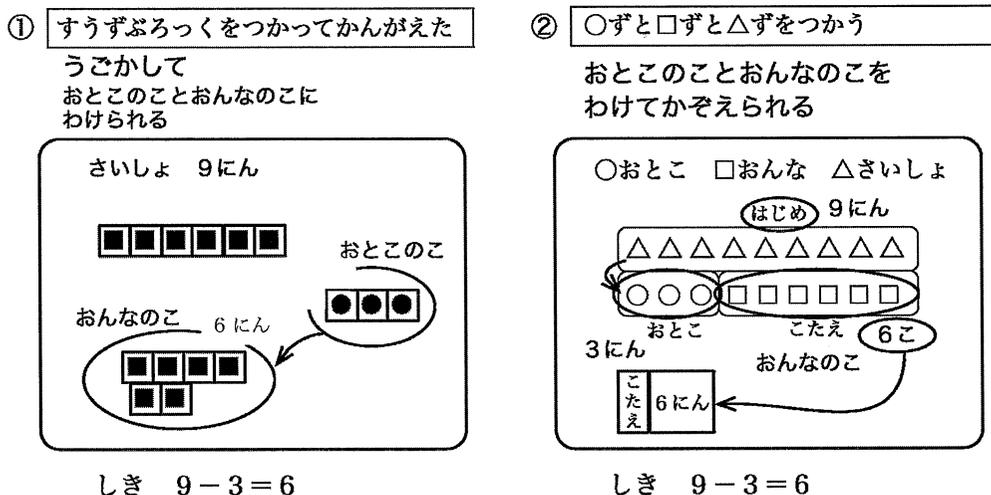


図1：黒板に取り上げられた2つの考え方を示す表現(教師の追記を含む)

(2) 問題意識の所在

上記のように、この授業は十分な成功を収めていたが、あえて授業者の意図やこの授業の主目的を考慮せず、これ以降の「考え方の説明に伴う表現の指導」という観点から2つの表現の使われ方に着目してみると、そこには注意されるべきポイントがある。図1の幾つかの表現を模式的に整えた図2を頼りに考えていこう。

本稿で考える問題の所在は、式や答えを媒介にした(a)と(b)の関係の認識ではなく、式や答えを媒介としない「より直接的な(a)から(b)への移行」を如何に導くか、という点にある。まず、一般的な問題解決場面では、ブロック等による直接的なモデリングが常に可能であるわけではないため、図2のαのパスのように答えが分かっている場合での(a)(b)間の互換性の認識が常に確保できるわけではない。かといって、問題場面をどのように式で表現したらよいか分からないことも多いため、βのパスのように数式への翻訳を通じた(a)(b)間の互換性の認識も常に確保できるわけではないのだ。とすれば、図2のγのパスも答えが出る以前には常に確保されているわけではないことになり、結局、(a)(b)間の互換性の認識は自然学習に任されているのでは、という懸念も生じてくる。特に、2年生以降では、問題に現れる量の操作・変化と対応した具体的な操作的表現よりも、数量間の静的関係だけを取り出した図1・2(b)に類似する図(さらには、より抽象的なテー

ブ図、線分図など)の使用が考え方の説明では推奨されるにもかかわらず、図2の(a)と(b)の関係の認識がないまま(類似する操作的表現や図的表現間の関係の認識がないまま)図2(b)のような図をかくよう促されたりしても、問題の時系列にとらわれて図1・2(a)のような操作的表現に頼り切っている児童にとっては、その図をどのように使ってよいか分からない状態になりかねないのである。

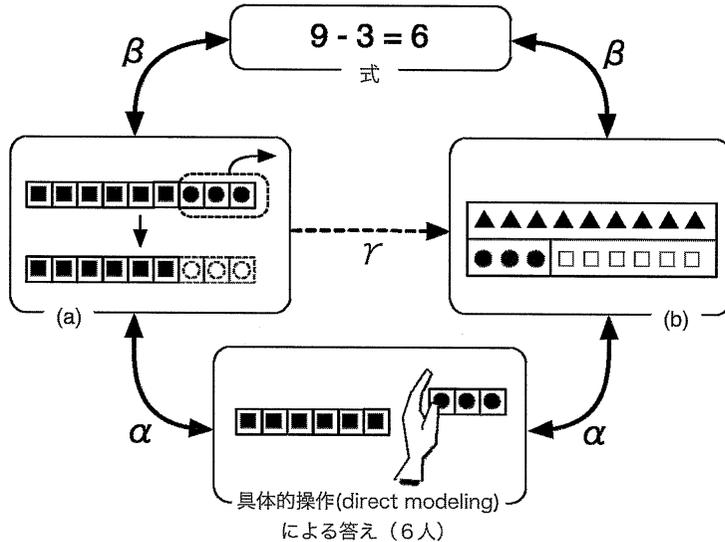


図2：図1の幾つかの表現とそれらの関係の模式図

この授業では、多くの児童は図1・2の(a)のような図を描いていたが、図1・2の(b)のような図をかいた児童が偶々おり、それを教師が上手く取り上げることができたため、図1・2の(a)(b)間の関係に注意は向けられたように思われる。しかし、そうした児童が必ずしもいるわけではないという想定の下で問題解決における表現の役割を考える場合には、より直接的な(a)から(b)への移行(図2のγのパス)の手立てを考えておくことは非常に重要になると思われる。

3. 加減問題の説明で頻繁に登場する2つの表現の間の移行

図2の2つ表現の直接的な関係を認識させるために先ず考えられるのは、(この種の文章題に現れる手続きを逐次的に示した)図2(a)を直接修正して(b)に変化させられないか、ということであろう。ここでの「加減の意味と式の指導」の文脈を前提にして具体的に述べるなら、図3のような教科書の「手続き図」(中原,1995)に類する表現は求残場面の手続きを求補場面でも適用できることを示しているため、この図3を図2の(a)と(b)の媒介として使用するというのが、指導系列の近接性も含めて1つのよい手立てになろう。

しかし、この種の表現を求差(比較)の場面にまで適用した場合には、図1(a)の児童の説明のように一方の比較対象の差に当たる部分が消えてしまうことになりかねないし、2つの比較対象

を同時に明示することもできない。また、もし後に比較場面で図2(b)のような表現を使うのであれば、結局は、そこで図3と図2(b)を統合的に見ることができるような指導の工夫が必要になってくる。例えば、清水・船越他(2010)の教科書における減法の導入単元では、多分に指導の一貫性を考慮してか、求差場面でも図3のような図を使っているのだが(p.49), 後の比較場面が頻繁に登場する紙面では図4のような図を使っているため(p.139), 後者の単元における指導の工夫は必要になってくるだろう。

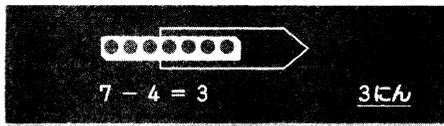


図3：求残（変化）と求補（結合）を媒介する表現(清水・船越他,2010,p.46)

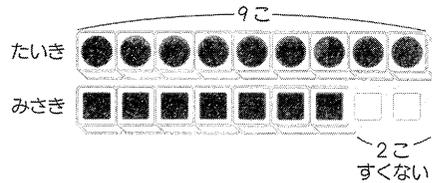


図4：比較の問題場面の表現
(清水・船越他,2010,p.139)

上記の手立ては、結局、「操作の系列」も「部分-全体の関係」も表現しうるような図に図2の(a)(b)間を媒介させよ、という考え方である(図5)。ただし、ここにも、そのような媒介的な図に何を選択するか、児童は自発的にそのような図を構成しうるか等々の問題がある。

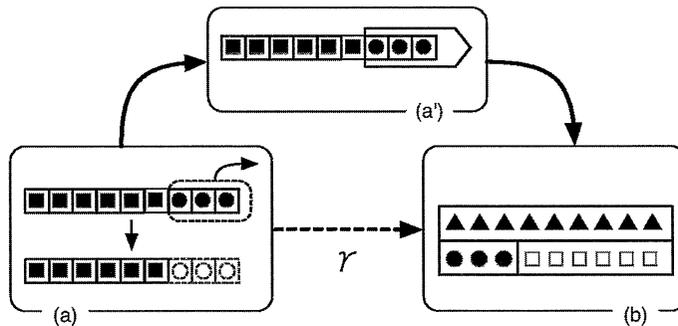


図5：2つの表現を媒介する表現の挿入

これらの問題に返答するのは非常に難しいが、もし児童が自発的に図2(b)のような「部分-全体関係」を示唆する図をかいたのであれば、それと共にそれに類似する図を積極的に黒板に取り上げて、図の共通項を抜き出すようにして、取り上げた図を解釈するような活動を盛り込むことが考えられるだろう。こうした手立ては、(児童にとっては困難なことなのかもしれないが)例えば、この授業で取り上げられた操作的表現(図1(a)やその具体的操作の例示)やその手続き図的な図的表現(図2(a))も、そこでの操作の系列を捨象した図的表現(図1(b)・図2(b))も、そして実際には、教科書次節の求差場面で現れる2つの量を比較するような図的表現(例えば、図4)も、全て3量間の「部分-全体関係」を保つ形で、それを表すような図5(c)に変化させられるのだ、

という認識を導くような指導場面を、敢えてこの単元内で設定するというものである(図6)。これは、図2の γ のパスを築くことを、あらゆる(一段階)加減の問題場面が図5(c)の「部分-全体関係の図」のもとで表現可能であるという認識に(図2における直接的な β へのパスも回避して)至らしめるようなものかもしれないが、より抽象的な図への移行を媒介する図が、先の図5(a)1つに限定されるよりは、児童の理解を導くのに有利な点もあるだろう。次節では、そうしたことを示唆する事例について取り上げよう。

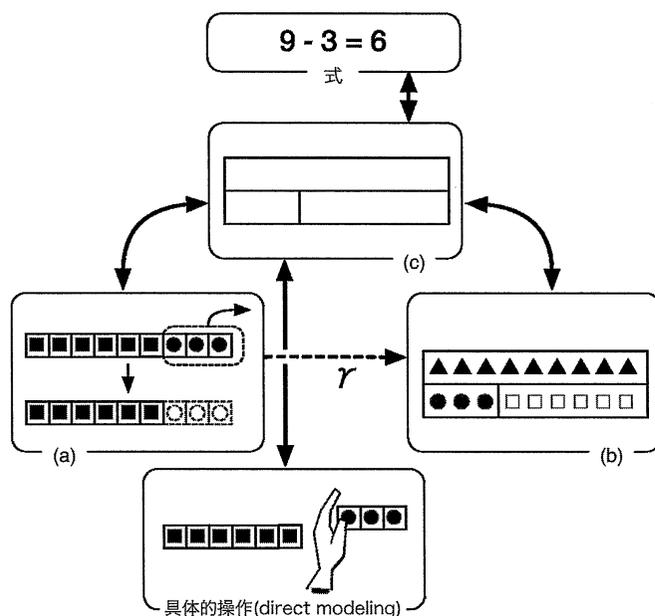


図6：加減の問題場面の「部分-全体関係」による統一的な把握

4. 子どもが自発的に描く図とその修正

前節で描く指導の手立ては、ある意味では理論的・仮想的な指導の手立ての構想であろうが、この授業で図1・2(b)のような図で説明した児童がいたように、子どもの自発的な活動を許容する環境があれば、教室全体でのその後の学習に貢献するような特徴的な考えを提示する児童は出てくる可能性はあると思われる。指導においてのポイントは、そうした特徴的な考えを許容しつつ適切に取り上げ、元の図に修正を加えて、より汎用的な図にまとめていく作業であろう。ここでは、この授業で偶々観察された、特徴的な考えを提示していたある児童の自発的な図の修正の様子を報告しておこう。

ここで取り上げる児童は、当初の自力解決の段階では、元々の問題場面を、数図ブロックの図を使いながらも「情景図」(中原,1995)的な形で示していた(図7)。この児童は、数図ブロックを示す大きな四角を9つ描き、図7のように、その中に男の子を示す□を3つかき入れ、残りの四角に女の子を示す○をかき入れていった。○と□はランダムに並んでおり、○を数えることで

答えが認識されたようであるし、問題文中の3量間の関係も、もちろん部分-全体関係のような形で把握されていなかったようである。そうした意味で、この図7は、問題場面を直接あらわした「情景図」的なもの、あるいは単純に数図ブロックを使わない直接モデリングとして機能していたと言ってもよいだろう。

ところがその後、女の子を示す○に赤色を、男の子を示す□に青色を塗り、各々の数を数え、その説明か答えを書こうとしているときに、この児童は作業を切り替え、図8に示すように、一部のブロックの色を塗り替える作業を始めた。○を左に、□を右に移し替えるように、色鉛筆で重ね書きをして、左側に「おんなのこ」、右側に「おとこのこ」と書き加えたのである。



図7：児童の当初の図

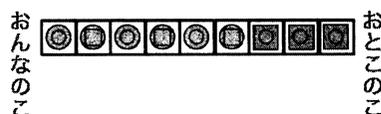


図8：修正された図

これは、図の使われ方の大きな変化・修正であった。最初の図は、□と○がバラバラに配置され、問題場面を数図ブロックによって直接翻訳しただけのような、ある意味では、その情景を表して答えを数えるためのものであったのだが、図8は、答えを上手く説明するためなのか、女の子と男の子と全体の人数の関係を説明する図に変化しているのだ。児童が各自の目的で自発的かつ自由に描いた図に、「説明」という当初の役割とは異なる役割を付与させた場合、当初の図では不都合な部分が顕在化し、図は修正させられたのである。児童は当初、「問題理解のため」あるいは「答えを求めるため」に図をかいたのだが、「説明のため」という目的の変化が意識され、それと連動する形で図にも役割の変化が求められ、ここでの図の修正に繋がったと見てよいだろう。そして、この新しい図（図8）には、もはや具体的操作の系列が強烈に意識されておらず、図2(b)にも似た加減構造が見て取れるのである。

実際には、教師の適切な発問・助言があれば、かなり低学年の児童でも、こうした図の修正を行うことができることは、例えば、花形(1990)などの研究でもよく知られているところである。ここでの活動の背後にも、教師が黒板に取り上げようとしている児童とのやりとりや、周囲の児童のつぶやき、教師の机間指導における「1個だけじゃなくて、もう1個考え方がないかな」や「(説明に)数字が書き加えられるかな」のような発言が効いていたのかもしれない。しかし、こうした図の修正は児童のかなり自発的な一連の作業の中で生まれている点は重要なポイントであり、この種の可能性を頼りにすれば、かなり大胆に児童の自由な問題場面の表現・説明を取り上げてよいように思われるのである。

4. おわりに

本稿では、筆者が観察した小学校1年生の「加減の意味」指導のある授業場面と児童の作業の

実態を頼りに、問題解決的な授業での説明における表現の使われ方やそこでの図・表現の修正に関わって、幾つかの指導への示唆について議論してみた。

一般的な問題解決（的な指導）の文脈では、問題場面を直接教科書に登場するような図・表現に表せるとは限らないため、児童の素朴な表現を頼りに考え方を説明したり、問題を解決していくしかないことも多いはずである。とすれば、そうした児童の素朴な表現から、我々が理想として期待する図（本稿では、図2 (b)や図3 (c)のような加減構造の基本となる「部分-全体関係」を示す図）に移行させていくことが指導上の問題となる。本稿では、答えや式を媒介としない直接的な図2の(a) (b)間の互換性の認識、さらには、(a)から(b)への移行に関する指導上の手立てをどのように目論むかが、具体的な問題であった。

そうした問題に対する現実的な手立ての1つとして、図3のような媒介的表現の使用を指摘したが、そこにも可能性としての問題は存在しているため、本稿では、より一般的な「部分-全体関係」を直接示すような図を用いて、児童の様々な表現を集約・統合するような指導の可能性について検討してみた。そうした類の指導は、確かに初期のハードルは高いのだが、実際には、求残場面から求補場面に移行した直後でも図2 (b)のような表現で、自らの考え方を説明できた児童は存在しており、また（多分に「図を用いた説明」を意識したことで）自発的に図7から図8への図の修正を行った児童も存在しているわけであるから、それ程、荒唐無稽な指導とも言えないのではないかと思われる。

本稿での議論は、「加減の意味と式」の問題解決的な指導における「考え方の説明」という文脈で観察された事例を頼りに行われたが、より一般的には、問題解決に関わる児童の素朴な表現を授業の中で振り返りつつ、有用かつ汎用的な表現に修正していくプロセスに関する分析的な議論を指導の手立ての導出に適用しようという試みとしても見ることができよう。今後は、更なる事例に基づく検討が必要であるし、「考え方の説明」という文脈変数の検討も必要になるだろう。

引用・参考文献

- 石田忠男(1987). 「問題解決指導のための教材開発」. 石田忠男,川崎昭三(編著), 『算数科問題解決指導の教材開発』 (pp.11-28). 東京:明治図書.
- 清水静海・船越俊介他 50名(2010). 『わくわくさんすう1』. 大阪:新興出版社啓林館.
- 中原忠男(1995). 『算数・数学教育における構成的アプローチの研究』. 東京:聖文社.
- 花形恵美子(1990). 「文章題の解決過程における絵の役割」. 『日本数学教育学会誌:算数教育』, 72(12), 28-36.
- 山田篤史(2013). 「問題解決指導における数学的表現の修正とその役割:表現の抽象化に着目して」. 愛知教育大学数学教育学会誌 『イプシロン』, vol.55, 23-29.

謝辞:本研究は科学研究費補助金(課題番号:25381184)の助成を受けたものである。