

問題解決指導における数学的表現の修正と その役割：表現の抽象化に着目して

愛知教育大学 山 田 篤 史

1. はじめに

数学教育研究において、問題解決と表現という研究分野は、80年代初頭から、互いに研究の文脈を提供しながら研究成果を蓄積してきた。例えば、*Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (Janvier, 1987) のような基礎的研究書でも、また「表現体系の研究」(中原, 1995) のようなより広範な領域をカバーする一連の研究などでも、そうした傾向はあるように思われる。このように、基礎的研究の文脈では、問題解決と表現は密接な関係を持ちうるものと考えられてきたが、特に我が国の実践研究で両者の関係に関心が持たれるようになったのは、平成20年改訂の新しい学習指導要領において「表現力の育成」が謳われるようになってからのように思われる。我が国では、日常的な授業が問題解決的に進められることが多く、その意味で「表現」が着目されるようになれば、「問題解決的な指導における表現」のような形で両者の関係を考えることも必要になるだろう。

しかし、問題解決的な指導の文脈で「表現」に着目する場合には注意も必要になる。例えば、自力解決の場面で自発的な表現を促した場合、学習者が構成する表現は様々だろうし、最初から定型的・規約的なものや数学的構造を反映したものでない可能性も高くなるはずである。そもそも、問題解決的な指導において、学習者は、未習である当該単元の学習内容の問題に対して、最初から教師が最終形として望む伝統的な規約的表現等を構成できることが期待されているわけでもないだろう。現実的な問題解決の指導を考慮する場合には、むしろ学習者が最初に構成した素朴な表現をふり返り、それを授業の中で修正・洗練しつつ問題の理解を徐々に深め、問題解決を進展させていくことこそが、表現を意識した重要な指導プロセスになるはずなのである。

一方、より一般的な文脈で、問題解決の進展と表現の構成・修正・洗練の過程の間の関係については、どのような議論があるのだろうか。例えば、山田(2012)は、一連の研究のデータから問題解決の進展を特徴づける、(a) 構成／再構成、(b) シフト、(c) 抽象化／具体化、という3つの問題表象の構成・変容のパターンを指摘している。これらは、解決過程の観察者側から見て解決が大きく進展したと解釈される所で、解決者が思考の対象にしている表現・表象がどのように変容したかについて、その特徴的なパターンを取り上げたものである。このようにして取り上げた表現・表象の変容パターンは、網羅的なものではないし、多様な問題解決過程を想定・分析するにも十分なものではない。また、それらが、必ずしも解決の進展を導くわけでもない。しかし、そうしたパターンに対する具体的な知見を持たなければ、解決の進展と表現の修正等との関係を意識した意図的な教授行為をすることはできないであろう。その種の知見は、そう

した意味で、教師が問題解決的な授業の進展を促そうとする際の示唆になり得ると考えられるのである。

そこで、本稿では、上記の(c)に着目し、特に表現・表象の「抽象化」のプロセスを取り上げ、その種の認知プロセスが問題解決に果たす一般的な役割について指摘し、問題解決的な指導におけるその教授学的な含意について議論することを目的とする。

2. 捨象に伴う認知的負荷の軽減と解決の洞察

そもそも抽象を思考作用と考える場合、抽象にも、注目している属性に注意を向けないという意味での「捨象」という側面と、多くの具体から共通な属性を抜き出すという意味での「抽象」という2つの側面があるだろう。例えば、ある心理学辞典で抽象という語を調べると、「事物・事象が有するさまざまな性質のうち、ある性質のみを取り上げ、それ以外の性質を捨て去るという精神の働き。この捨て去るという働きに注目する時には、捨象ともいう」(山崎1999)とある。一方、国語辞典で調べるならば、「多くの物や事柄や具体的な概念から、それらの範囲の全部に共通な属性を抜き出し、これを一般的な概念としてとらえること」(西尾他, 1994)とあり、その思考作用のどちらの側面を強調するかによって、辞書の記述も異なる。

もちろん、一般化を考える場合、両者の思考作用は一連のものであるかもしれない、ここではそれらの厳密な区別は議論しない。但し、問題解決という文脈で敢えて「捨象」の側面に着目すれば、情報の捨象の機能として、真っ先に「認知的負荷の軽減」を指摘できるだろう。例えば、次のような「じゃんけん問題」に伴う、解決活動を見てみよう(この問題の解決過程の分析については、山田・清水(2008)や清水・山田(2010)を参照のこと)。

【じゃんけん問題】

A, B, C, D, Eの5人でじゃんけんをします。1回のじゃんけんで勝ち、負け、引き分けを決めます。例えば、Aが「グー」、Bが「グー」、Cが「チョキ」、Dが「チョキ」、Eが「チョキ」のときは、A, Bが勝ち、C, D, Eが負けとなります。また、Aが「グー」、Bが「グー」、Cが「チョキ」、Dが「パー」、Eが「パー」のときは、引き分けとなります。

このとき、Aが勝つ確率を求めなさい。

この種の問題を大学生に(あるいはじゃんけんの人数を3人程度に少なくして中学生に)解決させてみると、多くの解決者が先ずは樹形図に頼る解法をとる。しかし、その樹形図の複雑さから、直ぐに図の一部を抽象化する形で修正する活動が見られるようになる。典型的には、「グー・チョキ・パー」を、それぞれ「○・×・△」にするといったような「略記」に近い程度のものなのだが、中には樹形図のどこを考えなくてもよいか(捨象すればよいか)を考える者が出てくる。その典型は、「Aがグーを出した場合、B以降がパーを出すと、Aに勝ちは無くなるので、その先は考えなくてよい」として、次の図1ように樹形図を修正するものである。

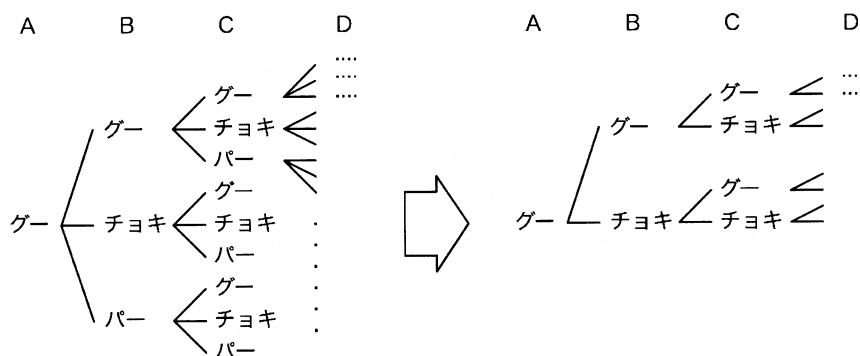


図1：解決に直結しない情報の捨象による認知的負荷の軽減と正答への洞察

ここでの情報の捨象という意味での抽象化は、Aが負けない場合の数の計数活動に（そして、それに先行する樹形図をかく活動に）圧倒的な認知的負荷の軽減効果をもたらす。但し、この種の思考は単純な略記を超えており、児童・生徒の自然な解決活動から自発的に出てくることを期待できない面もあるため、指導的介入に関わる教授上の示唆を引き出しておく必要があるだろう。

まず、単純な略記に近い抽象化ではない上のような図の修正をもたらす契機には様々あるが、例えば、一旦、図1の左側の図をかいて、Aがグーを出した時の枝を伸ばしつつ、Aが勝つ場合だけに印を付けていこうとするときのことを考えてみよう。勝ちの印が付きそうな所を見据えつつ、注意深く枝を伸ばしていくと、「Bがパーのとき、その下の枝には勝ちの印が付かない」ことに気づくことがある（直ぐには気付かなくても、粘り強く最後まで81の枝を伸ばせば、そして、「どこに勝ちの印が付いていない？」と問えば、Bがパーの場合の下枝には、勝ちの印が一切付いていないことには気付くことが多い）。これは、図1の右側の樹形図に修正が図られる契機の典型である。しかも、そうした気づきをもって図の抽象化を行い図1の右側の図を利用し、グー・チョキ・パーの対称性を利用すれば、5人のじゃんけんでAが負けない場合の数が 3×2^4 であることを（すなわち、Aが勝つ場合は全員が同じ手の場合を除いた $3 \times (2^4 - 1)$ であることを）容易に洞察できることも見て取れるだろう。

このように、「じゃんけん問題」の解決から表現の抽象化に関わって引き出される一般的な教授上の示唆は、図の生成に際して「余剰情報は何か？」「捨象しても、部分的解決に成功する（全面的解決に成功した）情報は何か？」といった類の質問を投げかけてみることだろう。一般的に余剰情報を含む問題は（情報の適切な選択という思考が付加されるため）難しいものだが、この「じゃんけん問題」の解決のように、問題文そのものには余剰な情報は含まれていないにもかかわらず、問題の理解・問題構造の把握・問題空間の生成等に関わって、解決に必ずしも直結しない（しかも時に攪乱要因になり得るような）情報を含む図を生成することになる場合もある（「じゃんけん問題」の解決では、図1の左側のような全問題空間の生成を飛び越えて、図1の右側のような解決に直結する情報だけを残した図をかくことの方が難しい）。児童・生徒が、最

初から解決に直結する情報だけを含んだ適切な図をかくことはそれほど容易なことではないし、図の生成の仕方や使い方が豊富なバリエーションをもって明示的に指導されることも少ないはずだ。とすれば、余剰情報の選択・捨象は後でもよいので、まずは「自らの」問題理解に貢献する図を生成してみるよう促すことが、（特に日々の指導を考える上では）特に重要であろう。

3. より一般的な表現の構成による「類推や統合的な考え方の誘発」や「類似問題の探索」

本節では、前節で注目した「捨象」ではなく、もう一方の「一般化」に繋がるような抽象化の側面に着目して考えてみよう。

問題解決で具体的な問題場面から抽象的な表現を構成することは、「類推や統合的な考え方の誘発」や「類似問題の探索」のような解決活動に繋がりと考えられる。実際、ベースとターゲットという最も素朴な写像関係による類推ではなく、より上位のカテゴリーの抽象化を構成して類推を働かせるという思考作用（図2）を思い浮かべれば、この種の活動の例は幾つも指摘できる。例えば、算数で、結合・変化・比較などの幾つかの具体的問題場面を持つ一段階加減文章題を、「部分・全体関係」の図式のような抽象的な表現の下で統合的に捉えたり、そうした問題群を類似問題として捉えようとしたりすることが考えられる（図3）。「私はビー玉を5個、弟はビー玉を何個か持っていて、合わせるとビー玉は8個になるのだが、弟は何個のビー玉を持っているのでしょうか」という結合場面の問題と、「私は8個のアメを持っていて、5個食べてしまったのだが、アメは何個残っているのでしょうか」という変化場面の問題を考えてみよう。このとき、結合問題場面における量（ビー玉の個数）に付帯する所有者属性や、変化場面問題のストーリーや量（変化するアメの個数）に付帯する時間的／変量的属性を捨象して、「部分・全体関係」という静的な図式で統合的に捉えることは一般的なことであろう。しかも、教科書などでは、そうした様子が、ブロック図や帯図のような形で表現されている（例えば、図4）。また、問題設定のような活動を仕組めば、2つの問題場面を更に抽象的な「 $8-5$ 」のような共通の式で統合的に、あるいは類似問題として捉えることも可能になろう。

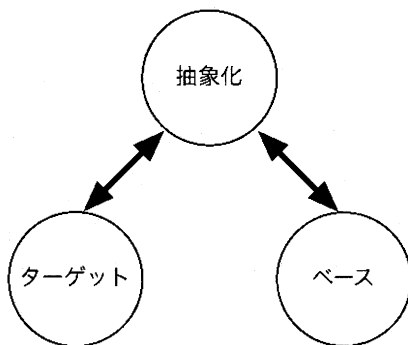


図2：抽象化を媒介とした類推
（鈴木，1996，p.86）

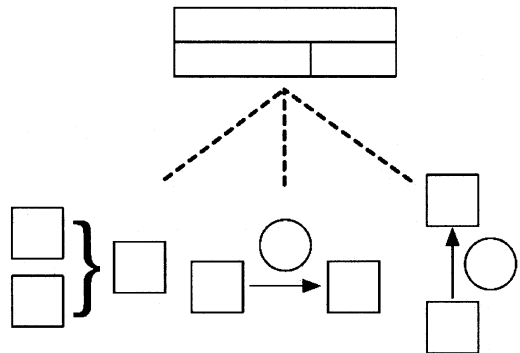


図3：Vergnaud (1982) の図式を経由した
一段階加減文章題の統合的な見方

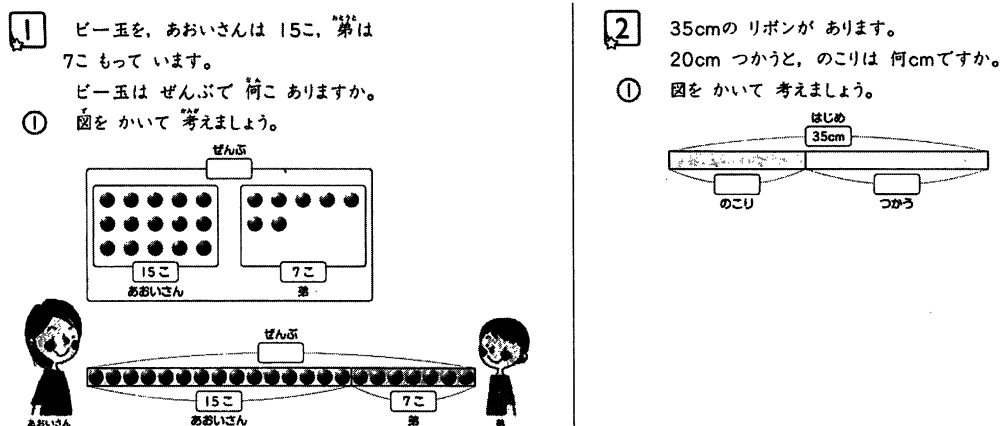


図 4：より抽象的な表現による結合場面と変化場面の統合の例

(小山・中原他, 2010, pp. 72-73)

この種の多様な文章題を、典型的な図（例えば、加減問題であれば図 4 のような帯図や線分図、乗除・割合問題であれば 2 重数直線）で統合的に捉えさせ、解決できるようにしようという指導は通常のことであろう。ただし、問題解決の文脈で、こうした問題場面から図への抽象化に伴う統合の機能を期待する場合、特に、実際の問題解決でそうした図が使えるようになるためには、図そのものについての指導で幾つかの注意が必要になる。

まず、E I S 原理（ブルナー、1966）や中原の表現体系（中原、1995）のような枠組みを使い、表現間の抽象性のレベルを区別しておく必要があるのは明らかだろう。図 4 左側の問題であれば、具体的なビー玉（現実的表現）、ブロックなどの半具体物によるそれらの操作（操作的表現）、それらを静的な関係の中に図像化・図式化した帯図や線分図（図的表現）、そして最終的には、そうした問題場面を記号的に表した式（記号的表現）のように、段階的に抽象的になる表現を区別する必要がある。そうした区別の上で、児童・生徒がどのレベルの表現を好み、どのレベルの表現まで理解可能なかを評価しつつ、それらがいずれも同じ問題の別表現であることを（互いに翻訳可能であることを）、そして幾つかの問題が同じような表現で統合的に見られることを（同じ抽象的表現で表される問題が幾つもあることを）指導しなければならないのだ。

そうした様々な表現の抽象性のレベルの設定に加え、指導では、同構造の表現・表象間の対応付けに基づく構造の理解を想定した「対応付け教授（mapping instruction）」（Resnick, 1982, p.150）の考え方が組合せられるべきだろう。図や記号とその使用の理解は、それらを他の表現に翻訳することで（上の例では異なる抽象度の表現に翻訳することで）深まるのだろうが、そうした理解は、その図が何を指し示しているか、特に 2 つの表現の要素間の対応関係を理解しているかに依存する。単純に「多様な表現間の翻訳」だけを考えるのではなく、「表現間の対応」も考えた方がよいのだ。

このような意味で、ここでの表現の抽象化に関わって引き出される教授上の示唆は、問題解決

で使われる特定の表現の理解を導いたり、それらへの翻訳を指導したりする場合には、「それらの（あるいは児童・生徒の）表現間に抽象度の差はあるのか？」「表現間の対応はできているか？」を自らに問いつつ、指導を組織化しよう心掛けることだろう。実際、そうした考え方は、既に算数の教科書にある程度実現されている。例えば、文章題の一文毎の具体的情景・操作の変化を、その場面が変化の場面であろうと比較の場面であろうと（また、未知数がどこにあると）、部分—全体関係を表す図の逐次的構成に対応させて指導するような紙面はそうであろう（図5）。

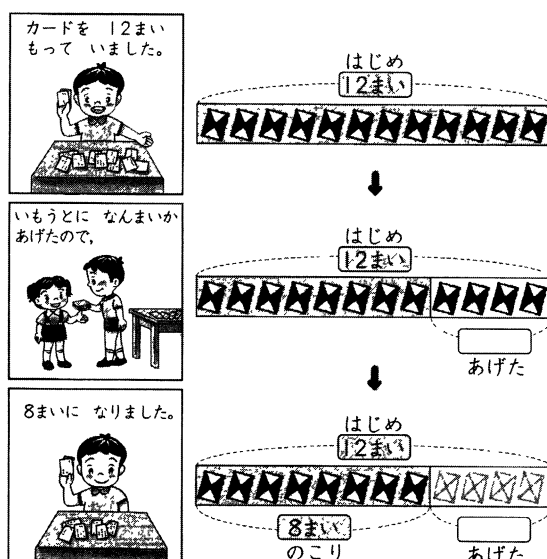


図5：表現の抽象化・翻訳と表現間の対応を意識した解決の進展（中原他，2002，p. 60）

4. おわりに

本稿では、問題解決過程における表現・表象の抽象化のプロセスを取り上げ、その種の思考作用が問題解決に果たす一般的な役割について指摘し、問題解決的な指導におけるその教授学的含意について議論した。

まず議論の出発点では、抽象にも、捨象と一般化という2つの若干異なる思考作用の方向性があることを指摘し、それら2つの側面に分けて議論を行った。捨象という側面に着目すると、その一般的役割としては認知的負荷の軽減が指摘でき、加えて、（やや複雑な問題解決過程の例を基にしているが）解決への洞察も引き出しうることが指摘された。また、ここでの一般的な教授上の示唆は、余情情報を含むような形でもよいので、先ずは図の生成を積極的行わせ、次第にその図の生成に際して、「余剰情報は何か？」「捨象しても、部分的解決に成功する（全面的解決に成功した）情報は何か？」といった類の質問を投げかけてみる、ということであった。

また、一般化という側面に着目すると、類推や統合的な考え方の誘発や類似問題の探索が一般的役割として指摘できた。また、そこでの一般的な教授上の示唆は、問題解決に汎用的に使用さ

れる特定の表現の理解を導いたり、それらへの翻訳を目論んだりするような問題解決的な指導では、指導の組織化に当たって「複数の表現間に抽象度の差はあるのか?」「表現間の（特に表現の要素間の）対応はできているか?」を教師側が十分意識せよ、ということであった。

本稿での議論は、問題解決過程における表現・表象の抽象化のプロセスに焦点化した議論であり、しかもそれらの問題解決に果たす役割についても十分網羅的なものではなかった。今後は、抽象化のプロセスの役割についての更なる検討が必要であるし、他のプロセスについても同様な検討が必要になるだろう。

引用・参考文献

- 小山正孝・中原忠男他 23 名 (2010). 『小学算数 2 年上』. 大阪：日本文教出版.
- 清水紀宏・山田篤史 (2010). 「数学的問題解決におけるふり返り活動による解法の進展について－「じゃんけん問題」の解決におけるふり返り活動の分析－」. 全国数学教育学会『数学教育学研究』, 第 16 巻, 第 1 号, 43-56.
- 鈴木宏昭 (1996). 『類似と思考』. 東京：共立出版.
- 中原忠男 (1995). 『算数・数学教育における構成的アプローチの研究』. 東京：聖文社.
- 中原忠男他 20 名 (2002). 『小学算数 2 年上』. 大阪：大阪書籍.
- 西尾実, 岩淵悦太郎, 水谷静夫 (編) (1994). 『岩波国語辞典：第五版』. 東京：岩波書店.
- 山崎晃男 (1999). 「抽象」. 中島義明他 (編), 『心理学辞典』 (p.584). 東京：有斐閣.
- 山田篤史・清水紀宏 (2008). 「数学的問題解決における自己参照的活動に関する研究 (IX)－「じゃんけん問題」解決終了後のふり返り活動による解法の進展について－」. 全国数学教育学会『数学教育学研究』, 第 14 巻, 31-40.
- Janvier, C. (ed.) (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operation of thought involved in addition and subtraction problems. In T.P. Carpenter, J.M. Moser, & T.A. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp.39-59). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

謝辞：本研究は科学研究費補助金（課題番号：25381184）の助成を受けたものである。