イプシロン　2013.Vol.55, 67 − 70

初年次演習を終えて

愛知教育大学数学教育講座　岸　　康弘

1．序

「証明問題が苦手だ」という言葉をよく聞きます。計算問題と証明問題と分けて考えるのもどうかと思いますが，それはさておき確かに証明ができない学生は多いように感じられます。定義がなんなのかさえもわかっていない学生の答案は論外として（意外にいますが…），非論理的な文章の書いてある答案がとても目に付きます。例えば，結論を使って結論を導いたり，１つの具体例を示して全体を示した気になっていたりなどです。また，任意と存在の誤用もよくみられます。証明が苦手というよりは，論理が苦手なのでしょう。

本学では２年次の「集合と論理」で論理を学ぶことになっていますが，１年次より既に数学の科目は始まっており，微分積分における極限の定義には∀や∃は不可欠ですし，線形数学においても，ただ行列の計算をしているわけではなく「行列論」や「線形代数論」が展開されています。多くの学生は大学の「厳密な数学」に悩み苦しんでおり，そのような学生に対する「高校数学と大学数学の橋渡し」的な意味も込めて，私の担当する初年次演習の講義に論理を導入することとしました。

さて，講義として与えられた時間は５コマ分しかなく多くのことはできません。詰め込み過ぎて各単元をさらっと流してしまうと，理解できないまま終わりを迎えてしまいますので，ある程度内容を絞り込み演習問題を解きながらじっくり進めることにしました。次の節において，実際の授業の内容を述べたいと思います。第３節では学生からの感想を紹介します。

2．授業内容

３つの節に分けて授業を行いました。

まず第１節では命題とは何かから始め，否定命題¬ＰやＰ∨Ｑ，Ｐ∧Ｑ，Ｐ⇒Ｑ，Ｐ⇔Ｑなどの複合命題を定義しました。そして，それらの真理値表を作成させ，各命題の意味を確認していきます。その際，いくつかの複合命題には日常で使う言葉と少しギャップがあることを注意しました。例えば，「明日晴れたら野球をする」という命題は晴れたときのことしか述べておらず，晴れなかった場合は野球をするともしないとも言っていませんが，この場合はどちらでも真であるとなります。つまり，起こりうる状況として，①明日は晴れて野球をする，②明日は晴れて野球はしない，③明日は晴れないが野球はする，④明日は晴れずに野球はしない，の４通りありますが，「明日晴れたら野球をする」という命題はこれらのうちの「②明日は晴れて野球はしない」となるときだけが偽となり，他の①，③，④の場合は真となるのです。「真」というより

「偽でない」つまり「嘘でない」といえば納得がいくでしょうか。$P \vee Q$についても日常の使い方とのギャップがあります。$P \vee Q$が真となるのはPとQの少なくとも一方が真になるときです。したがって，リンゴとみかんを両方買った場合，「リンゴまたはみかんを買う」という命題は真となります。子どもに「ケーキかお菓子を買ってきて～」とおつかいを頼んで両方買ってきたとしても，論理的には間違ってはいないというわけです。

またこの節では，命題$P \Rightarrow Q$に対する逆，裏，対偶や必要条件，十分条件などの用語の定義を行いました。ここは高校数学の復習になりますが，逆と裏，必要条件と十分条件をそれぞれ混同するなど，忘れている学生が何人かみられました。そして，真理値表を用いて，三段論法（$P \Rightarrow Q$かつ$Q \Rightarrow R$ならば$P \Rightarrow R$）の正当性，命題$P \Rightarrow Q$とその対偶$\neg Q \Rightarrow \neg P$が同値となること，ド・モルガンの法則$((\neg(P \vee Q)) \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$，$(\neg(P \wedge Q)) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q))$などを示しました。この辺りが５回の講義の中で一番重点に置いていたところなのですが，予想以上に良い反応が得られました。

続く第２節では$\forall$，$\exists$などの記号を定義し，述語命題を導入しました。$\neg \forall x P(x)$と$\exists x \neg P(x)$が同値であることを示し，$\forall x \exists y P(x, y)$と$\exists y \forall x P(x, y)$が異なる命題であることを具体的な例を見ながら解説しました。少し難しいところではありますが，多くの学生が興味を持って演習問題に取り組んでいました。

第３節では，いくつかの証明法を紹介しました。そして，１つの命題に対し３つの異なる証明法（直接法，間接法：対偶を示す，間接法：背理法）による証明を具体的に与え，その違いを見ることにしました。最後に，自然数の集合からなる空でない集合は最小元を持つという整列原理を用いて数学的帰納法の妥当性を証明しました（講義ではその逆も示しました）。この部分は多くの学生が音を上げていましたが，何人かの学生には有効だったようで（次の節を参照），30分以上時間を費やして解説した甲斐はあったようです。

ところで，序において任意と存在の誤用がみられると述べましたが，ここに一例を紹介しておきます。「任意の偶数xは，任意の整数aを用いて$x = 2a$と表される」という命題において，２つ目の『任意』は『ある』でなければなりません。

３．学生の感想

授業の最後に出したレポートの中に，感想を書く欄を設けました。記名制ということもあり，比較的良いことを書いてくれていましたが，その中でも特に良い感想のみをいくつか紹介したいと思います。（多少の省略はありますが，ニュアンスを変えないようにするため少し長めの引用をした箇所もあります。また，誤字脱字もそのままとし，一字一句写すことにしています。）

・$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$という定理の証明が，高校ではベン図で与えられており，いまいち納得できなかった。上の定理を真理値表を用いて証明したことで，心のひっかかりがとれた。

・当たり前のことを証明していくのは，困難で，当たり前だから当たり前，というのでは通用しないし，分からない。これは例えば学校現場に出たときも，児童生徒との対話で起こりうるこ

とであるし，自分の人生で，当然と思っていた世界の見方，物事の考え方を深めたり，疑ったり，広げたりするきっかけにもなった。
・元々論理には苦手意識があったのですが，一つずつゆっくり考えればわかるものなんですね。今でも，論理は国語だと思っている自分がいますが，証明には非常に有効な考え方なのでまた勉強します。
・今まで背理法に感じていた不安がなくなった。
・真理値表とか新しい視点から多くの証明法の正しさが確認できて，こんなアプローチのしかたがあったんだなぁと視野が少し広がった気がします。
・この授業では，いろいろな証明法を学んだが，その中でも特に数学的帰納法について，この方法が正しいか，ということを学べてよかった。私は，高校でこの証明方法を知った時から，理論的には合っているとは思いながらも，どこかで間違いが起こっているのではないか，とずっと考えていた。だけど，整列原理を用いて正しいと証明してもらえて，自分の中では納得し，すっきりすることができた。
・数Aの集合と論理は苦手な方でした。どうしても感覚で解いてしまい，その度に×をもらっていました。この授業で真理値表を用いた考え方を知って，これを高校で教えてほしかったとギリィしています。
・大学に入って（中略）自力じゃ証明できない問題ばかりで，少し数学が嫌いになりつつあった。でも，この授業で，論理記号を復習できたり，背理法が使える理由もしっかり理解できたと思う。嫌いになりかけていた数学をもう一度楽しいと感じることができた。

次に，授業の内容に関する直接的な感想ではありませんが，感想欄に書かれた心に残った箇所を紹介します。
・今期のテストで感じたことですが，やっぱり数学を勉強するのが一番楽しいと思いました。特に課題でない問題を解いている時の方が。
（数学を楽しく勉強してくれるなんて嬉しいですね。確かに，課題で解くよりも自主的に問題を解く方が面白いでしょう。その楽しさを持続させてほしいものです。）
・私は，数学を解くことが好きで教師になろうと思いました。この大学にはいって学び方をしっかり学んで生徒たちから信頼される教師になりたいと思います。この授業で学んだようなあたり前であるようなことも生徒たちに教えていたらと思います。
（最後は『教えていけたら』ということですよね。知識の伝達，実現されると嬉しいです。）
・大学の数学の授業を受けて，まだ２ヵ月くらいしかたちませんが，高校の数学の授業とはほとんど違い，今まで受けていた数学の授業は，数学の授業と言えるのだろうかと思うぐらい大学の数学の授業はとても細かくて，難しくて疲れます。
（おっ，早速ギャップに悩んでいますね。登山と同じように，上へ行くには楽ではありませんが，上からの眺めはきっといいはずです。）

・どちらかというと，理論よりも整数論の方が自分は好きです。
（何か誤解させるようなことを言ってしまったのでしょうか。整数論も深い理論からなっておりますが…。）
・授業は板書も一から十までという感じですごくわかりやすかったです。プリント演習があったのはいいですが，教科書もないのでもう少し演習プリント（授業でできなくても）あったほうが理解度は高いかもしれません。
（あ，ありがとうございます。）
・まじめにとりくめてよかった。数学をやっているかんじがしてよかった。
（他では感じていないのかな？）
・大学での目標は，数学をもっと好きになることです。
（とてもいい目標ですね。逆にならないことを切に願います。）

4．終わりに

いくつかの感想の中に，疑問に思っていた証明法に納得がいくようになったとありました。少なくとも何人かの学生にはこの授業の狙いが届いたようです。当たり前で証明は易しいだろうと思っていても，いざ証明するとなるとそうでないことがあります。どんなことも，一度証明をしておくと，自信を持って使うことができることでしょう。学生のうちに１つでも多くの定理の証明を経験してほしいと思います。さらに言えば，証明していないことには本当かどうか疑う心を身に付けてもらいたいと思っています。例えば，素因数分解は本当に一意的なのか？２次方程式の解は本当に高々２つなのか？これらの証明は意外に難しく，世界を変えれば成り立たない場合もあるのです。（$X^2=E$を満たす２次正方行列は３つ以上あります。）なぜ成り立つのか，成り立たない世界ではなぜ成り立たないのか？それらを知ると，素因数分解のありがたみや方程式の解き方がわかってくるのです。

初年次演習を受講し終えた学生たちは，この先多くの数学を学んでいきます。それらを，「たぶん成り立つだろう（曖昧）。証明は知らないけど…」という数学の上に積み上げていくのではなく，せめて「これは正しい（断言）。証明は忘れたけど…」という数学の上に構築していってほしいと思います。そして，数学に関しては自信を持った教師として，活躍してくれることを願います。